جبرخطی کاربردی

درس ۴

دستگاه معادلات جبری خطی

گروه سیستم و کنترل - ۱۳۸۸
مدرس: صدقی زاده

حل دستگاه معادلات جبری خطی به روش تجزیه ماتریس ها

۱- تجزیه ماتریس A

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad A = \underbrace{A_1 A_2 \cdots A_{k-1} A_k}_{\downarrow}$$

حاصلضرب ماتریس های ساده ← قطری و مثلثی

۲- حل دستگاه معادلات $(A_1 A_2 \cdots A_k)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ با حل k معادله ساده

$$A_1\mathbf{z}_1 = \mathbf{b}, \quad A_2\mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_1, \quad \cdots, \quad A_{k-1}\mathbf{z}_{k-1} = \mathbf{z}_{k-2}, \quad A_k\mathbf{x} = \mathbf{z}_{k-1}$$

تعداد عملیات در محاسبات جبری

$$\boxed{\#\text{flops} = f + s}$$

مرحله تجزیه $A = A_1 A_2 \cdots A_{k-1} A_k$

مرحله حل k معادله ساده

- معمولاً $f >> s$ است.

معرفی روشهای حل دستگاه معادلات جبری خطی بوسیله تجزیه ماتریس ها

۱- تجزیه LU (LU Factorization)

۲- تجزیه چالسکی (Cholesky Factorization)

۳- تجزیه QR (QR Factorization)

۴- تجزیه مقادیر منفرد (SVD) (Singular Value Decomposition)

حل دستگاه معادلات جبری خطی با استفاده از تجزیه LU

- برای ماتریس مربعی و غیرمنفرد $A_{n\times n}$،

$$\boxed{A = LU}$$

ماتریس بالا مثلثی

ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A\mathbf{x}=\mathbf{b} \xrightarrow{A=LU} LU\mathbf{x}=\mathbf{b} \xrightarrow{\mathbf{y}=U\mathbf{x}} L\mathbf{y}=\mathbf{b}}$$

جواب نهایی با حل دستگاه معادلات به روش جایگزینی پیشرو و پسرو بدست می آید،

$$\boxed{\begin{cases} L\mathbf{y}=\mathbf{b} \\ \mathbf{y}=U\mathbf{x} \end{cases}}$$

تعداد عملیات در حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ با استفاده از تجزیه LU

۱- تجزیه A=LU

$$\boxed{\frac{2n^3}{3}-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}\approx\frac{2}{3}n^3 \rightarrow \text{flops}}$$

۲- حل دستگاه معادلات با الگوریتم های جایگزینی پیشرو و پسرو

$$\boxed{\begin{cases} L\mathbf{y}=\mathbf{b} \\ \mathbf{y}=U\mathbf{x} \end{cases}} \qquad \boxed{2n^2 \rightarrow \text{flops}}$$

مثال ۱

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0$$
$$2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -4$$
$$-4x_1 + x_2 + 10x_3 = 3$$

با استفاده از روش تجزیه LU جواب دستگاه معادلات را بیابید.

فرم ماتریسی این معادلات به شکل زیر می باشد،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تجزیه LU ماتریس A به شکل زیر می باشد،

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

با حل معادلات ماتریسی اول بوسیله الگوریتم جایگزینی پیشرو جوابها بصورت زیر بدست می آیند،

$$y_1 = 0, \quad y_2 = -4, \quad y_3 = 39$$

با جایگذاری این مقادیر در معادلات ماتریس دوم پاسخ نهایی با یک الگوریتم جایگزینی پسرو محاسبه می گردد،

$$x_1 = \frac{-119}{29}, \quad x_2 = \frac{1}{29}, \quad x_3 = \frac{-39}{29}$$

روش های تجزیه LU ماتریس ها

- برای ماتریس مربعی و غیرمنفرد $A_{n\times n}$،

$$\boxed{A = LU}$$

ماتریس بالا مثلثی ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد

- استفاده از روش حذفی گوسی بدون محورگیری

- استفاده از الگوریتم ماتریس های بلوکی

تجزیه LU با استفاده از روش حذفی گوسی بدون محورگیری

- برای ماتریس مربعی و غیرمنفرد $A_{n\times n}$،

$$\boxed{A = LU}$$

ماتریس بالا مثلثی ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد

$$\boxed{E_k \cdots E_2 E_1 A = U}$$

ماتریس های مقدماتی مربعی و معکوس پذیر می باشند،

$$\boxed{A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} U = LU}$$

که در آن $\boxed{L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}}$ یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد می باشد.

مثال ۲

تجزیه LU ماتریس مربعی A را بیابید،

$$A=\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 2 & 5 & -3\\ -4 & 1 & 10\end{bmatrix}$$

همانند آنچه که در روش حذفی گوسی انجام دادیم سعی می کنیم تا ماتریس مذکور را با انجام یک سری عملیات سطری به صورت بالا مثلثی در آوریم.

$$\frac{-2}{3}r_1+r_2\to r_2 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ -4 & 1 & 10\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad E_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{-2}{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\frac{4}{3}r_1+r_3\to r_3 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 9 & -2\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad E_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{4}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$-9r_2+r_3\to r_3 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -29\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad E_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -9 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس بالا مثلثی U بصورت زیر بدست می آید،

$$U=E_3E_2E_1A=\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -29\end{bmatrix}$$

حال با محاسبه معکوس ماتریس های E_1، E_2، E_3 ماتریس پایین مثلثی L را بدست می آوریم،

$$L=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{-4}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 9 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 1 & 0\\ \frac{-4}{3} & 9 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین تجزیه LU ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A=LU=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 1 & 0\\ \frac{-4}{3} & 9 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -29\end{bmatrix}$$

تجزیه LU با استفاده از الگوریتم ماتریس های بلوکی

- اگر صورت کلی ماتریس های بلوکی $A_{n\times n}$، U و L را به شکل زیر در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad L=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad U=\begin{bmatrix} u_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}$$

در اینصورت داریم،

$$\boxed{A=LU \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11} & U_{12} \\ u_{11}L_{21} & L_{21}U_{12}+L_{22}U_{22} \end{bmatrix}}$$

بنابراین،

$$\boxed{\begin{aligned} & u_{11}=a_{11} \\ & U_{12}=A_{12} \\ & L_{21}=\frac{1}{a_{11}}A_{21} \\ & A_{22}-L_{21}U_{12}=L_{22}U_{22} \end{aligned}}$$

مثال ۳

تجزیه LU ماتریس مربعی A را بیابید،

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس $A=LU$ را بصورت زیر بنویسیم،

$$A=\left[\begin{array}{c:cc} 3 & 6 & -9 \\ \hdashline 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:cc} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \hdashline 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{array}\right]$$

با توجه به روابط بالا داریم،

$$\begin{aligned} & u_{11}=a_{11} \rightarrow u_{11}=3 \\ & U_{12}=A_{12} \rightarrow U_{12}=[6 \quad -9] \rightarrow u_{12}=6, \quad u_{13}=-9 \\ & L_{21}=\frac{1}{a_{11}}A_{21} \rightarrow L_{21}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \rightarrow l_{21}=\frac{2}{3}, \quad l_{31}=\frac{-4}{3} \end{aligned}$$

$$A_{22}-L_{21}U_{12}=L_{22}U_{22}$$

$$\begin{bmatrix}5 & -3\\ 1 & 10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{-4}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ l_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{22} & u_{23}\\ 0 & u_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 9 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{22} & u_{23}\\ l_{32}u_{22} & l_{32}u_{23}+u_{33}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}u_{22}=1\\ l_{32}u_{22}=9 \quad \xrightarrow{u_{22}=1} \quad l_{32}=9\\ u_{23}=3\\ l_{32}u_{23}+u_{33}=-2 \quad \rightarrow \quad u_{33}=-29\end{cases}$$

به این ترتیب تجزیه LU ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A=LU\rightarrow\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 2 & 5 & -3\\ -4 & 1 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 1 & 0\\ \frac{-4}{3} & 9 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -29\end{bmatrix}$$

آیا برای هر ماتریس مربعی غیرمنفرد تجزیه LU وجود دارد؟

مثال۴

$$A=\left[\begin{array}{c:cc}1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:cc}1 & 0 & 0\\ \hdashline l_{21} & 1 & 0\\ l_{31} & l_{32} & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c:cc}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ \hdashline 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{array}\right]$$

$$u_{11}=a_{11}\rightarrow u_{11}=1$$

$$U_{12}=A_{12}\rightarrow u_{12}=0,\quad u_{13}=0$$

$$L_{21}=\frac{1}{a_{11}}A_{21}\rightarrow l_{21}=0,\quad l_{31}=0$$

$$A_{22}-L_{21}U_{12}=L_{22}U_{22}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ l_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{22} & u_{23}\\ 0 & u_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{22} & u_{23}\\ l_{32}u_{22} & l_{32}u_{23}+u_{33}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}u_{22}=0\\ l_{32}u_{22}=1 \quad \xrightarrow{u_{22}=0} \quad l_{32}.0=1\rightarrow ?!\\ u_{23}=2\\ l_{32}u_{23}+u_{33}=-1\end{cases}$$

به تناقض بر می خوریم.

تجزیه PLU ماتریس ها (LU Factorization with Pivoting)

- برای ماتریس مربعی و غیرمنفرد $A_{n\times n}$،

$$\boxed{A = PLU}$$

ماتریس جایگشت (Permutation Matrix)

- استفاده از روش حذفی گوسی با محورگیری

- استفاده از ماتریس جایگشت در الگوریتم ماتریس های بلوکی

- دستور [L,U,P] = lu(A) در نرم افزار MATLAB

ادامه حل مثال ۴

$$A_{22}-L_{21}U_{12}=\begin{bmatrix}0&2\\1&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\1&-1\end{bmatrix}$$

عنصر (۱،۱) صفر است، لذا نیاز به یک جایگشت داریم،

$$\tilde{A}=P_1\begin{bmatrix}0&2\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}$$

حال تجزیه LU را برای ماتریس $\tilde{A}$ ادامه می دهیم،

$$\tilde{A}=L_{22}U_{22}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{22}&u_{23}\\0&u_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{22}&u_{23}\\l_{32}u_{22}&l_{32}u_{23}+u_{33}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}u_{22}=1\\ l_{32}u_{22}=0 \quad\xrightarrow{u_{22}=1}\quad l_{32}=0\\ u_{23}=-1\\ l_{32}u_{23}+u_{33}=2\quad\rightarrow\quad u_{33}=2\end{cases}$$

$$A=PLU\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

مثال۵

با اعمال روش حذفی گوسی تجزیه $A=PLU$ ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}5&6&7\\10&12&3\\20&17&19\end{bmatrix}$$

ماتریس A را به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می نماییم و ماتریس مقدماتی هر مرحله را بدست می آوریم،

$$\left.\begin{matrix}-2r_1+r_2\to r_2\\-4r_1+r_3\to r_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}5&6&7\\0&0&-11\\0&-7&-9\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad E_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix}$$

در اینجا نیاز به محور گیری داریم، زیرا عنصر(۲،۲) صفر است،

$$r_2\leftrightarrow r_3\quad\Rightarrow\begin{bmatrix}5&6&7\\0&-7&-9\\0&0&-11\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad E_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

به این ترتیب ماتریس بالا مثلثی U بصورت زیر بدست می آید،

$$U=\begin{bmatrix}5&6&7\\0&-7&-9\\0&0&-11\end{bmatrix}$$

ماتریس پایین مثلثی L نیز بشکل زیر قابل محاسبه است،

$$E_3E_2E_1A=U\quad\to\quad A=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U=PLU$$

$$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\4&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&1\\4&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}=PL$$

لذا تجزیه $A=PLU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$A=PLU\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}5&6&7\\10&12&3\\20&17&19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6&7\\0&-7&-9\\0&0&-11\end{bmatrix}$$

- استفاده از دستور [L,U,P]=lu(A) درنرم افزار MATLAB

```
A =[5 6 7;10 12 3;20 17 19];
[L,U,P]= lu(A)
L =
      1.0000       0       0
      0.5000  1.0000       0
      0.2500  0.5000  1.0000
U =
      20.0000  17.0000  19.0000
            0   3.5000  -6.5000
            0        0   5.5000
P =
      0  0  1
      0  1  0
      1  0  0
```


تجزیه چالسکی ماتریس ها(Cholesky Factorization)

- اگر $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن و مثبت معین(Positive Definite) باشد، می توان آن را بصورت زیر تجزیه نمود،

$$\boxed{A = LL^T}$$

یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری مثبت

مثال۶

ماتریس متقارن و مثبت معین زیر را در نظر بگیرید،

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات جبری خطی با استفاده از تجزیه چالسکی

- برای ماتریس متقارن و مثبت معین $A_{n\times n}$،

$$\boxed{A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \xrightarrow{A=LL^T} \quad LL^T\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \xrightarrow{\mathbf{y}=L^T\mathbf{x}} \quad L\mathbf{y}=\mathbf{b}}$$

جواب نهایی با حل دستگاه معادلات به روش جایگزینی پیشرو و پسرو بدست می آید،

$$\boxed{\begin{cases} L\mathbf{y}=\mathbf{b} \\ \mathbf{y}=L^T\mathbf{x} \end{cases}}$$

- تعداد عملیات در حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ با استفاده از تجزیه چالسکی

$$\boxed{\frac{1}{3}n^3+2n^2 \rightarrow \text{flops}}$$

تجزیه چالسکی

الگوریتم های جایگزینی پیشرو و پسرو

مثال۷

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 30 \\ 15 \\ -16 \end{bmatrix}$$

با استفاده از روش تجزیه چالسکی جواب دستگاه معادلات را بیابید.

از آنجائیکه ماتریس A یک ماتریس متقارن و مثبت معین است، لذا می توان از این روش استفاده کرد.

تجزیه چالسکی ماتریس A به شکل زیر می باشد،

$$A=LL^T=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L\mathbf{y}=\mathbf{b}\rightarrow\begin{bmatrix}5&0&0\\1&3&0\\-1&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\15\\-16\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}=L^T\mathbf{x}\rightarrow\begin{bmatrix}5&1&-1\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

با حل معادلات ماتریسی اول جوابها بصورت زیر بدست می آیند،

$$y_1=6,\qquad y_2=-1,\qquad y_3=-3$$

با جایگذاری این مقادیر در معادلات ماتریس دوم پاسخ نهایی محاسبه می گردد،

$$x_1=1,\qquad x_2=0,\qquad x_3=-1$$

بدست آوردن تجزیه چالسکی ماتریس ها با استفاده از ماتریس های بلوکی

- اگر $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن و مثبت معین (Positive Definite) باشد،

$$\boxed{A=LL^T}$$

یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری مثبت

- صورت کلی ماتریس های بلوکی $A_{n\times n}$، L را بشکل زیر در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&A_{21}^T\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}\quad,\quad L=\begin{bmatrix}l_{11}&0\\L_{21}&L_{22}\end{bmatrix}\quad,\quad L^T=\begin{bmatrix}l_{11}&L_{21}\\0&L_{22}\end{bmatrix}$$

در اینصورت داریم،

$$\boxed{\begin{aligned}&l_{11}=\sqrt{a_{11}}\\&L_{21}=\frac{1}{l_{11}}A_{21}\\&A_{22}-L_{21}L_{21}^T=L_{22}L_{22}^T\end{aligned}}$$

مثال ۸

تجزیه چالسکی ماتریس مثبت معین $A_{3\times3}$ را بیابید. اگر ماتریس $A = LL^T$ را بصورت زیر بنویسیم،

$$A=\begin{bmatrix}25 & 15 & -5\\ 15 & 18 & 0\\ -5 & 0 & 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{11} & 0 & 0\\ l_{21} & l_{22} & 0\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_{11} & l_{21} & l_{31}\\ 0 & l_{22} & l_{32}\\ 0 & 0 & l_{33}\end{bmatrix}$$

با توجه به روابط گفته شده داریم،

$$l_{11}=\sqrt{a_{11}} \rightarrow l_{11}=5$$

$$L_{21}=\frac{1}{l_{11}}A_{21} \rightarrow L_{21}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}15\\ -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix} \rightarrow l_{21}=3, \quad l_{31}=-1$$

$$A_{22}-L_{21}L_{21}^T=L_{22}L_{22}^T$$

$$\begin{bmatrix}18 & 0\\ 0 & 11\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{22} & 0\\ l_{32} & l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_{22} & l_{32}\\ 0 & l_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}9 & 3\\ 3 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{22}^2 & l_{22}l_{32}\\ l_{22}l_{32} & l_{32}^2+l_{33}^2\end{bmatrix} \rightarrow l_{22}=3, \quad l_{32}=1, \quad l_{33}=3$$

به این ترتیب تجزیه چالسکی ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A=\begin{bmatrix}25 & 15 & -5\\ 15 & 18 & 0\\ -5 & 0 & 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

استفاده از دستور chol(A) در نرم افزار MATLAB

```
A =[25 15 -5;15 18 0;-5 0 11];
chol(A)
ans =
       5   3  -1
       0   3   1
       0   0   3
```

- در صورتیکه ماتریس A مثبت معین نباشد، پیغام خطا ظاهر خواهد شد.

تعریف ماتریس مثبت معین (Positive Definite)

- ماتریس A را مثبت معین گویند، اگر متقارن باشد و شرط زیر را داشته باشد،

$$\begin{cases} \mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0\,, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0\,, & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

مثال۹

ماتریس A مثبت معین است،

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 5x_2^2$$

$$= (3x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2 + 5x_2^2$$

$$= (3x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2$$

تعریف ماتریس مثبت نیمه معین (Positive Semi definite)

- ماتریس A را مثبت نیمه معین گویند، اگر متقارن باشد و شرط زیر را داشته باشد،

$$\begin{cases} \mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0\,, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0\,, & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

مثال۱۰

ماتریس A مثبت نیمه معین است، زیرا برای $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ مانند $\mathbf{x} = (2,\text{-}3)$ مقدار $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$ است.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2$$

$$= (3x_1 + 2x_2)^2$$

صورت های درجه دوم (Quadratic Form)

- تابع اسکالر $V(\mathbf{x})$ یک صورت درجه دوم می باشد.

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad , \quad a_{ij} = a_{ji}$$

ماتریس متقارن حقیقی

$$V(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

مثال۱۱

توابع زیر نمونه هایی از صورت های درجه دوم هستند،

$$V_1(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 \quad \to \quad V_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$V_2(\mathbf{x}) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$$

$$V_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$V_3(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3$$

$$V_3(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

معیار سیلوستر برای تعیین علامت ماتریس های متقارن

۱- شرط مثبت معین:

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \cdots \quad , |A| > 0$$

- باید تمامی کهادهای اصلی مقدم ماتریس A مثبت باشند.

۲- شرط مثبت نیمه معین:

$$a_{ii} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \cdots \quad , |A| = 0$$

که در آن $i < j < k$ می باشد. باید تمامی کهادهای اصلی ماتریس A غیر منفی باشند.

- در اینجا علامت تمامی کهادهای اصلی باید بررسی شوند نه فقط کهادهای اصلی مقدم.

مثال۱۲

مثبت معین و مثبت نیمه معین بودن ماتریس ها را بررسی نمایید،

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

طبق معیار سیلوستر علامت کهادهای اصلی مقدم را بررسی می نماییم،

$$4 > 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 24 > 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 26 > 0 \quad \Rightarrow$$

ماتریس A_1 **مثبت معین** است

$$9 > 0, \quad \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 9 > 0 \quad \Rightarrow$$

ماتریس A_2 **مثبت معین** است

برای مثبت نیمه معین بودن باید $|A| = 0$ باشد،

$$9 > 0, \quad \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

ماتریس A_3 **مثبت نیمه معین** است

مثال۱۳

مثبت نیمه معین بودن ماتریس A را بررسی نمایید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

باید علامت تمامی کهادهای اصلی بررسی نماییم و دترمینان ماتریس نیز صفر باشد.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=0$$

همانطور که پیداست $|A|=0$ است، حال علامت کهادهای اصلی را بررسی می نماییم. برای یک ماتریس $A_{3\times3}$ شش کهاد اصلی بصورت زیر وجود دارد،

$$\boxed{a_{11}\,,\quad a_{22}\,,\quad a_{33}\,,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}}$$

برای ماتریس داده شده داریم،

$$a_{11}=1>0\,,\qquad a_{22}=4>0\,,\qquad a_{33}=0$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0\,,\qquad \begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4<0\,,\qquad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1<0$$

مشخص است که دو تا از کهادهای اصلی منفی هستند، لذا ماتریس A مثبت نیمه معین نمی باشد.

مثال۱۴

مثبت معین بودن ماتریس A را بررسی نمایید.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای این منظور می توان به دو طریق اقدام کرد،

۱- با استفاده از معیار سیلوستر،

$$2>0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=8>0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2>0$$

از آنجائیکه تمامی کهادهای اصلی مقدم مثبت هستند، لذا ماتریس A مثبت معین است.

۲- می توان مثبت معین بودن صورت درجه دوم $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ را بررسی کرد،

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3+6x_2^2+x_3^3 \\ &= (x_1-x_3)^2+(x_1+2x_2)^2+2x_2^2\end{aligned}$$

مشخص است که $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ به غیر از مبداء ($\mathbf{x}=\mathbf{0}$) بقیه جاها مثبت است، لذا ماتریس A مثبت معین می باشد.