Date: Subject:

باسمه تعالی

تمرین سری پنجم :

ترتیب حل : ۱ـ ابتدا تمرین سری ۴ به ترتیب سؤالات کامل شوند. یعنی ابتدا ۱ طلایی‌ها حل شوند و سپس ۵ سؤال بعد

۲ـ دو تمرینی که آقای بابایی دادند حل شود! حتماً.

۳ـ تمرینات این هفته به ترتیب :

تمرینات سری پنجم

۱ـ فرض کنید جسمی به جرم m و ضریب اصطکاک ایستایی و لغزشی به ترتیب μ_s و μ_k برای سطح صاف به فنری با ضریب k بسته شده است. فرض کنید جرم را تا فاصله x_0 از مبدأ [نقطه تعادل] دور می‌کنیم. چند نیم دور جسم نوسان می‌کند تا ساکن شود؟ $\boxed{N(x_0)=?}$ که N تعداد نیم دورهاست.

۲ـ سؤالات (۱/۴ تا ۳۰/۴) و ۳۲/۴ و ۳۷/۴ ، ۳۹/۴ و ۴۰/۴ و ۴۱/۴ و (۴۳/۴ تا ۴۷/۴) از تمرینات کتاب توماس که در صفحات بعد قرار دارد.

را محاسبه کنید.

حل با $f(x)=x^3$ و $g(x)=\sin x$ فهرست زیر را تهیه می‌کنیم:

$f(x)$ و مشتق‌های آن		$g(x)$ و انتگرال‌های آن
x^3	$(+)$	$\sin x$
$3x^2$	$(-)$	$-\cos x$
$6x$	$(+)$	$-\sin x$
6	$(-)$	$\cos x$
0		$\sin x$

دوباره با جمع حاصل‌ضرب‌ها با توجه به علامت روی پیکان‌ها جواب انتگرال به دست می‌آید.

$$\int x^3\sin x\,dx=-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+C$$

■

در تمرین‌های اضافی انتهای این فصل نشان داده می‌شود که روش جدولی برای توابع f و g که مشتقات متوالی هیچکدام صفر نمی‌شوند، چگونه به کار گرفته می‌شود.

خلاصه

هنگامی که جانشینی کارساز نباشد، انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء را آزمایش می‌کنیم. کار را با انتگرالی که انتگرالده آن شامل حاصل‌ضرب دو تابع است شروع می‌کنیم.

$$\int f(x)g(x)\,dx$$

(توجه داشته باشید که ممکن است $g(x)$ عدد ثابت ۱ باشد) مانند

$$\int u\,dv$$

انتگرال را با انتخاب dv به عنوان بخشی از انتگرالده که شامل dx و هر یک از $f(x)$ یا $g(x)$ است، شروع می‌کنیم. توجه داشته باشید که برای تعیین v در سمت راست باید از dv انتگرال بگیریم.

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

اگر انتگرال سمت راست از انتگرال اصلی پیچیده‌تر باشد، انتخاب دیگری برای u و dv در نظر می‌گیریم.

مثال ۹ یک فرمول کاهشی

یک فرمول «کاهشی» برای انتگرال

$$\int\cos^n x\,dx$$

یک انتگرال با توان کمتر برای $\cos x$ بنویسید.

حل ممکن است که $\cos^n x$ را به صورت $\cos^{n-1}x\cdot\cos x$ بنویسیم. سپس قرار دهیم

$u=\cos^{n-1}x$ و $dv=\cos x\,dx$،

سپس

$v=\sin x$ و $du=(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x\,dx)$

بنابراین

$$\int\cos^n x\,dx=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\sin^2 x\cos^{n-2}x\,dx$$

$$=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\,dx$$

$$=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx-(n-1)\int\cos^n x\,dx$$

به طرفین معادله آخر مقدار

$$(n-1)\int\cos^n x\,dx$$

را اضافه می‌کنیم، خواهیم داشت

$$n\int\cos^n x\,dx=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx$$

برای تعیین نتیجه نهایی طرفین معادله را بر n تقسیم می‌کنیم.

$$\int\cos^n x\,dx=\frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx$$

این عمل به ما امکان می‌دهد که توان $\cos x$ را ۲ واحد کم کرده و در نتیجه فرمول مفیدی حاصل گردد. وقتی که n عدد صحیح و مثبت باشد، این عمل را تکرار می‌کنیم تا به یکی از حالت‌های زیر برسیم

$\int\cos^0 x\,dx=\int dx=x+C$ یا $\int\cos x\,dx=\sin x+C$

■

مثال ۱۰ کاربرد فرمول کاهشی

انتگرال

$$\int\cos^3 x\,dx$$

را محاسبه کنید.

حل از نتیجه مثال ۹ داریم

$$\int\cos^3 x\,dx=\frac{\cos^2 x\sin x}{3}+\frac{2}{3}\int\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\cos^2 x\sin x+\frac{2}{3}\sin x+C$$

■

تمرین‌های ۲-۸

انتگرال‌گیری با روش جزءبه‌جزء

انتگرال‌های تمرین‌های ۲۴-۱را محاسبه کنید.

۱. $\int x\sin\frac{x}{2}\,dx$

۲. $\int\theta\cos\pi\theta\,d\theta$

۳. $\int t^2\cos t\,dt$

۴. $\int x^2\sin x\,dx$

۵. $\int_1^2 x\ln x\,dx$

۶. $\int_1^e x^3\ln x\,dx$

۷. $\int\tan^{-1}y\,dy$

۸. $\int\sin^{-1}y\,dy$

۹. $\int x\sec^2 x\,dx$

۱۰. $\int 4x\sec^2 2x\,dx$

۱۱. $\int x^3e^x\,dx$

۱۲. $\int p^4e^{-p}\,dp$

۱۳. $\int(x^2-5x)\,e^x\,dx$

۱۴. $\int(r^2+r+1)e^r\,dr$

۱۵. $\int x^5e^x\,dx$

۱۶. $\int t^2e^{4t}\,dt$

۱۷. $\int_0^{\pi/2}\theta^2\sin 2\theta\,d\theta$

۱۸. $\int_0^{\pi/2}x^3\cos 2x\,dx$

۱۹. $\int_{2/\sqrt{3}}^{2}t\sec^{-1}t\,dt$

۲۰. $\int_0^{1/\sqrt{2}}2x\sin^{-1}(x^2)\,dx$

۲۱. $\int e^\theta\sin\theta\,d\theta$

۲۲. $\int e^{-y}\cos y\,dy$

۲۳. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ ‏ ۲۴. $\int e^{-2x}\sin 2x\,dx$

جانشینی و انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء

در تمرین‌های ۲۵ تا ۳۰ به کمک یک جانشینی قبل از روش جزءبه‌جزء انتگرال‌ها را محاسبه کنید.

۲۵. $\int e^{\sqrt{3s+9}}\,ds$ ‏ ۲۶. $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

۲۷. $\int_0^{\pi/3} x\tan^2 x\,dx$ ‏ ۲۸. $\int \ln(x+x^2)\,dx$

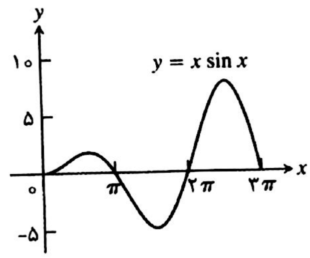
۲۹. $\int \sin(\ln x)\,dx$ ‏ ۳۰. $\int z(\ln z)^2\,dz$

نظریه و مثال

۳۱. **محاسبه مساحت** مطلوبست تعیین مساحت ناحیه محصور به خم $y = x\sin x$ و محور x ها (شکل پیوست را مشاهده کنید) برای

الف) $0 \le x \le \pi$ ‏ ب) $\pi \le x \le 2\pi$ ‏ پ) $2\pi \le x \le 3\pi$

ت) چه الگویی در اینجا می‌بینید؟ مساحت محدود به محور xها و خم در فاصله $n\pi \le x \le (n+1)\pi$ چقدر است؟ n عدد صحیح اختیاری نامنفی است. برای جواب خود دلیل بیاورید.



۳۲. **محاسبه مساحت** مطلوبست تعیین مساحت ناحیه محصور به خم $y = x\cos x$ و محور x ها (شکل پیوست را مشاهده کنید) برای

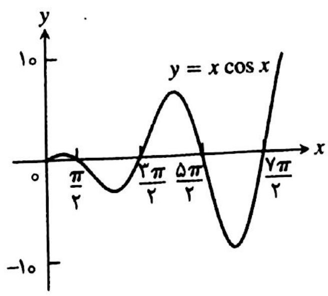
الف) $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$ ‏ ب) $3\pi/2 \le x \le 5\pi/2$

پ) $5\pi/2 \le x \le 7\pi/2$

ت) چه الگویی مشاهده می‌کنید؟ مساحت محدود به خم و محور x ها برای

$$\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi \le x \le \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi$$

چقدر است؟ (n عدد اختیاری صحیح مثبت است.) برای جواب خود دلیل بیاورید.



۳۳. **محاسبه حجم** مطلوبست تعیین حجم جسم حاصل از دوران ناحیه واقع در ربع اول محدود به محورهای مختصات، خم $y = e^x$، و خط $x = \ln 2$ حول خط $x = \ln 2$

۳۴. **محاسبه حجم** مطلوبست تعیین حجم جسم حاصل از دوران ناحیه واقع در ربع اول محدود به محورهای مختصات، خم $y = e^{-x}$، خط $x = 1$

الف) حول محور y ‏ **ب)** حول خط $x = 1$

۳۵. **محاسبه حجم** مطلوبست تعیین حجم جسم حاصل از دوران ناحیه واقع در ربع اول محدود به محورهای مختصات، خم $y = \cos x, 0 \le x \le \pi/2$، حول

الف) محور y ها ‏ **ب)** خط $x = \pi/2$

۳۶. **محاسبه حجم** مطلوبست تعیین حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به محور x ها و خم $y = x\sin x, 0 \le x \le \pi$ حول

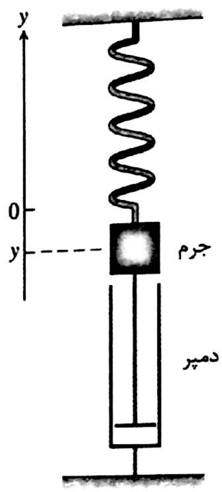
الف) محور y ها ‏ **ب)** خط $x = \pi$

(نمودار تمرین ۳۱ را نگاه کنید)

۳۷. **مقدار متوسط** نیروی تأخیری که در بخش پایین شکل مشخص شده است، حرکت جرم متصل به فنر را کُند می‌کند به طوری که موقعیت جرم در زمان t برابر است با

$$y = 2e^{-t}\cos t, \qquad t \ge 0$$

مقدار متوسط y را روی بازه $0 \le t \le 2\pi$ بیابید.



۳۸. **مقدار متوسط** در دستگاهی شبیه تمرین ۳۷ اگر موقعیت جرم در زمان t برابر باشد با

$$y = 4e^{-t}(\sin t - \cos t), \qquad t \ge 0$$

مقدار متوسط y را روی بازه $0 \le t \le 2\pi$ بیابید.

فرمول‌های کاهشی

در تمرین‌های ۴۲-۳۹ با استفاده از انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء *فرمول کاهشی* را بدست آورید.

۳۹. $\int x^n \cos x\,dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\,dx$

۴۰. $\int x^n \sin x\,dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$

۴۱. $\int x^n e^{ax}\,dx = \dfrac{x^n e^{ax}}{a} - \dfrac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx, \quad a \ne 0$

۴۲. $$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$$

انتگرال‌گیری از توابع معکوس

انتگرال‌گیری به روش جزء‌به‌جزء منجر به قاعده‌ای برای انتگرال‌گیری توابع معکوس می‌شود که معمولاً نتیجه خوبی را بدست می‌دهد.

$$\int f^{-1}(x)\,dx = \int y\,f'(y)\,dy \qquad y = f^{-1}(x),\ x = f(y),\ dx = f'(y)dy$$

$$= yf(y) - \int f(y)\,dy \qquad \text{انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء}\ u = y, dv = f'(y)dy$$

$$= x f^{-1}(x) - \int f(y)\,dy$$

ایده اصلی آن است که ابتدا پیچیده‌ترین بخش انتگرال، در این موقعیت $f^{-1}(x)$، را انتخاب کرده و آن را ساده کنیم. برای انتگرال $\ln x$ به شرح زیر عمل می‌کنیم.

$$\int \ln x\,dx = \int y e^y\,dy \qquad y = \ln x,\ x = e^y,\ dx = e^y dy$$

$$= ye^y - e^y + C$$

$$= x\ln x - x + C$$

برای انتگرال $\cos^{-1} x$ داریم.

$$\int \cos^{-1} x\,dx = x\cos^{-1} x - \int \cos y\,dy \qquad y = \cos^{-1} x$$

$$= x\cos^{-1} x - \sin y + C$$

$$= x\cos^{-1} x - \sin(\cos^{-1} x) + C$$

با استفاده از فرمول داریم

$$\int f^{-1}(x)\,dx = x f^{-1}(x) - \int f(y)\,dy \qquad y = f^{-1}(x) \quad (۴)$$

برای محاسبه انتگرال‌های تمرین‌های ۴۶-۴۳، جواب‌های خود را برحسب x بیان کنید.

۴۳. $\int \sin^{-1} x\,dx$ ۴۴. $\int \tan^{-1} x\,dx$

۴۵. $\int \sec^{-1} x\,dx$ ۴۶. $\int \log_2 x\,dx$

راه دیگری برای انتگرال‌گیری از $f^{-1}(x)$ (هرگاه $f^{-1}(x)$ انتگرال‌پذیر باشد) آن است که انتگرال‌گیری به روش جزء‌به‌جزء را با $u = f^{-1}(x)$ و $dv = dx$ شروع کنیم همانند

$$\int f^{-1}(x)\,dx = x f^{-1}(x) - \int x\left(\frac{d}{dx} f^{-1}(x)\right)dx \quad (۵)$$

در تمرین‌های ۴۷ و ۴۸ نتایج کاربرد معادلات (۴) و (۵) را مقایسه کنید.

۴۷. معادلات (۴) و (۵) فرمول‌هایی متفاوتی برای انتگرال $\cos^{-1} x$ می‌دهند:

الف) معادله (۴) $\int \cos^{-1} x\,dx = x\cos^{-1} x - \sin(\cos^{-1} x) + C$

ب) معادله (۵) $\int \cos^{-1} x\,dx = x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C$

آیا هر دو می‌توانند صحیح باشند؟ توضیح دهید.

۴۸. معادلات (۴) و (۵) منجر به فرمول‌های متفاوتی برای انتگرال $\tan^{-1} x$ می‌شوند:

الف) معادله (۴) $\int \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1} x - \ln\sec(\tan^{-1} x) + C$

ب) معادله (۵) $\int \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1} x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$

آیا هر دو می‌توانند درست باشند؟ توضیح دهید.

در تمرین‌های ۴۹ و ۵۰ انتگرال‌ها را با **(الف)** معادله (۴) و **(ب)** معادله (۵) محاسبه کنید. در هر حالت جواب خود را با مشتق‌گیری نسبت به x بیازمائید.

۴۹. $\int \sinh^{-1} x\,dx$ ۵۰. $\int \tanh^{-1} x\,dx$

۸-۳ انتگرال توابع گویا با تجزیه به کسرها

این بخش نشان می‌دهد که چگونه یک کسر گویا (خارج‌قسمت چند جمله‌ای‌ها) به مجموع کسرهای ساده‌تر تبدیل می‌شود، این عمل را تجزیه کسر می‌نامند. در این صورت انتگرال‌های آنها نیز ساده‌تر محاسبه می‌شوند. برای مثال کسر گویای $(5x-3)/(x^2-2x-3)$ را به شرح زیر می‌توان دوباره نویسی کرد.

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}$$

که در طرف راست می‌توان توابعی قرار داد که مخرج مشترک آنها $(x+1)(x-3)$ باشد و بطور جبری این توابع را تعیین کرد. (برای مثال، وقتی روش‌های ویژه‌ای را برای حل معادلات دیفرانسیل به کار می‌بریم.) به جای انتگرال‌گیری از تابع گویای سمت چپ $(5x-3)/(x+1)(x-3)$ به سادگی از مجموع توابع سمت راست انتگرال می‌گیریم.

$$\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\,dx = \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{3}{x-3}\,dx$$

$$= 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C$$

روشی که توابع گویا را به شکل مورد نظر تبدیل می‌کند، روش **تبدیل کسر به کسرهای** ساده (تفکیک به کسرها) نامیده می‌شود. در حالت بالا تکیه بر یافتن A و B است به گونه‌ای که

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \quad (1)$$

(وانمود می‌کنیم که نمی‌دانیم $A = 2$ و $B = 3$ است). کسرهای $A/(x+1)$ و $B/(x-3)$ را **کسرهای ساده** می‌نامیم. زیرا مخرج آنها تنها بخشی از مخرج اصلی یعنی x^2-2x-3 هستند. A و B را **ضرایب نامعین** می‌نامیم مگر این که مقدار مناسبی برای آنها بیابیم.

برای یافتن A و B ابتدا معادله (۱) را به شکل زیر می‌نویسیم

$$5x-3 = A(x-3) + B(x+1) = (A+B)x - 3A + B$$

این اتحاد وقتی برقرار است که ضرایب x های هم‌توان در طرفین معادله با هم برابر باشند. پس داریم

$$A + B = 5, \qquad -3A + B = -3$$

۳ـ مکعبی به ضلع $2a$ در نظر بگیرید که در هر رأس آن بار q قرار داده شده است.

پتانسیل حول مرکز مکعب را، $V(x,y,z)$، تا مرتبه ۴ بسط دهید. $\frac{x}{a}$ و $\frac{y}{a}$ و $\frac{z}{a}$ خیلی کوچک‌تر از یک هستند.

راهنمایی: همان‌طور که سر کلاس گفته شد کافی است جملات x^2، y^2، z^2، x^2y^2، x^2z^2 و y^2z^2 و x^4 و y^4 و z^4 نگه داشته شوند. اما از طرفی x و y و z نسبت به هم متقارن اند و ضریب مثلاً x^2y^2 و y^2z^2 یکی است یا x^4 و z^4! بنابراین می‌توان با نگه داشتن تنها ۳ جمله مسئله را حل کرد!

۴ـ دو قطعه به جرم‌های M و $2m$ توسط فنری با ضریب k به هم متصل اند و روی یک سطح افقی قرار دارند. با صرف نظر از اصطکاک دوره تناوب نوسانات طول فنر را به دست آورید. راهنمایی: مختصات مرکز جرم می‌تواند مفید باشد!