امتحان پایانی **ریاضی مهندسی** (جزوه بسته) تاریخ : ۹۸/۰۴/۰۱ ( مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه )

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی(**دانشکده مهندسی نقشه‌برداری**)

نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی :

---

۱-اگر $v(x,y)$ مزدوج همساز $u(x,y) = e^{y}\, sinx$ باشد و $f(z) = u + vi$ تابع تحلیلی باشد حاصل $f'(0)$ را بیابید . (۱۰نمره)

۲-تصویر ناحیه محدود به منحنی $1 \leq (x-1)^{2} + y^{2}$ را تحت نگاشت $\omega = \frac{-i}{z}$ رسم کنید .(۱۰نمره)

۳-نوع نقاط تکین توابع زیر را مشخص کرده و مقدار مانده آنها را بیابید . (۳۰ نمره)

$$I = \frac{sinz}{z^{3} + z} \qquad II = \frac{\ln(1+z)}{z^{2}}$$

۴-اگر $c$ دایره یکه به مرکز مبدا مختصات باشد،کدامیک از انتگرال های زیر دارای مقدار مخالف صفر است و این مقدار چقدر است ؟(۱۰نمره)

$$I_{1} = \oint_{c} \frac{dz}{z^{2} + 2z} \qquad I_{2} = \oint_{c} \frac{zdz}{z^{2} + 4}$$

۵-حاصل انتگرال $\oint_{|z|=1} z^{3} \cos(\frac{1}{z})\, dz$ را بیابید .(۱۰نمره)

۶- مطلوب است حاصل انتگرال $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ به کمک قضیه مانده ها. (۱۰نمره)

---

۷-مطلوب است حاصل انتگرال سوال۶ به کمک انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$.(اختیاری)

۸-در معادله موج داده شده، $u(x,t)$ را بدست آورده و سپس $u\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ را محاسبه کنید . (اختیاری)

$$u_{xx} = 4\, u_{tt}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = u_{t}(x,0) = sinx$$

پاسخنامه آزمون ریاضی مهندسی — دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی — تیر ۹۸

۱-

کوشی - ریمان

$$\begin{cases} u_x = v_y \to e^y \cos x = v_y \xrightarrow{\int dy} \boxed{e^y \cos x + f(x) = v} \\ u_y = -v_x \to e^y \sin x = -v_x \xrightarrow{\int dx} -e^y \cos x + c = -v \\ \qquad \to \boxed{e^y \cos x - c = v} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[f = u + vi]{\text{طبق رابطه}} \boxed{f(z) = e^y \sin x + (e^y \cos x - c)\, i}$$

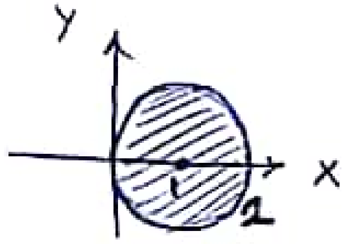
$$f'(z) = u_x + v_x i \to f'(z) = e^y \cos x - e^y \sin x\, i$$

$$\xrightarrow[x=y=0]{z=0} f'(0) = e^0 \cos 0 - \cancel{e^0 \sin 0 \cdot i} = \boxed{1}$$

math-teacher.blog.ir

ابراهیم شاه ابراهیمی - تیر ۹۸

۲-

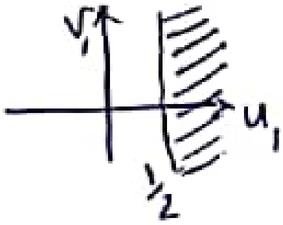



$$\omega = -\frac{i}{z} \begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{z} & \text{(معکوس)} \\ \omega_2 = \frac{i}{z} & \text{(دوران } \tfrac{\pi}{2}\text{)} \\ \omega_3 = -\frac{i}{z} & \text{(دوران } \pi\text{)} \end{cases}$$

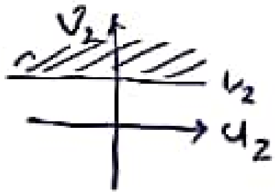
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 \leqslant 1 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0 \xrightarrow{\omega_1} \begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y = \dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2} - \frac{2u}{u^2+v^2} \leqslant 0 \rightarrow \frac{1-2u}{u^2+v^2} \leqslant 0 \rightarrow 1-2u \leqslant 0 \rightarrow 1 \leqslant 2u$$

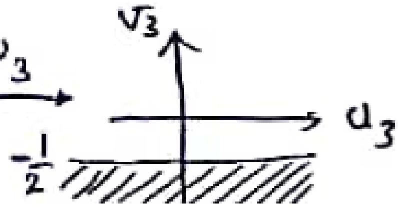
$$\leftarrow \boxed{u \geqslant 1/2}$$




$\xrightarrow{\omega_2}$




$\xrightarrow{\omega_3}$




پاسخ نهایی : $\boxed{v \leqslant -\frac{1}{2}}$

-۳

$$I = \frac{\sin z}{z^3+z} \qquad z^3+z=0 \longrightarrow z(z^2+1)=0 \begin{cases} z=0 \\ z=\pm i \end{cases}$$

z=۰ تکین نیست زیرا ریشه صورت نیز هست. اما z=i , z=-i تکین از نوع قطب ساده اند.

$$\underset{z=i}{\mathrm{Rez}}(I) = \lim_{z\to i} \cancel{(z-i)} \frac{\sin z}{z(z+i)\cancel{(z-i)}} = \frac{\sin i}{2i^2} = \boxed{-\frac{1}{2}\sin i}$$

$$\underset{z=-i}{\mathrm{Rez}}(I) = \lim_{z\to -i} \cancel{(z+i)} \frac{\sin z}{z\cancel{(z+i)}(z-i)} = \frac{\sin(-i)}{2i^2} = \boxed{\frac{1}{2}\sin i}$$

II) $\dfrac{\operatorname{Ln}(1+z)}{z^2}$ $\qquad z^2=0 \xrightarrow{\text{ریشه صورت و مخرج}} z=0$ قطب ساده

روش ۱ $\xrightarrow{\text{سری لوران}}$ $\dfrac{z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots}{z^2} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}z - \dfrac{1}{4}z^2 + \cdots$

ضریب جمله $\frac{1}{z}$

$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1$

روش ۲ $\xrightarrow{\text{فرمول}}$ $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left(z \cdot \dfrac{\operatorname{Ln}(1+z)}{z^2}\right) = \lim_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{Ln}(1+z)}{z}$ مبهم $\frac{0}{0}$

$\xrightarrow{\text{Hop}} = \lim_{z\to 0} \dfrac{1}{1+z} = 1$

ابراهیم شاه ابراهیمی - تیر ۹۸

math-teacher.blog.ir

۵-

$$f(z) = z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) = z^3\left(1 - \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^4}{4!} - \cdots\right)$$

$$= z^3\left(1 - \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{4!\,z^4} - \cdots\right)$$

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{4!}} \leftarrow$$ مانده = ضریب جمله $\frac{1}{z}$

قضیه مانده‌ها $\longrightarrow$ $I = 2\pi i\left(\frac{1}{4!}\right) = \boxed{\frac{\pi i}{12}}$

$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \to f(z)=\frac{1}{z}$ $\quad z=0$ تکین ۴-

$$f(z)e^{aiz} \xrightarrow[a=1]{} \frac{1}{z}e^{iz} = \frac{1}{z}\left(1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z}\left(1+iz-\frac{z^2}{2!}-\frac{iz^3}{3!}+\cdots\right)$$

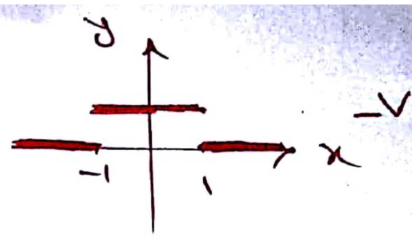
$$=\frac{1}{z}+i-\frac{z}{2!}-\frac{iz^2}{3!}+\cdots$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{1}{z}e^{iz}\right)=1$$ ضریب جمله $\frac{1}{z}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx \overset{\text{زوج}}{=} 2\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \operatorname{Im}\left(\cancel{2\pi i}(0)+\pi i(1)\right)=\pi$$

$$\to \boxed{\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - تیر ۹۸




تابع زوج

انتگرال فوریه $\longrightarrow$ $f(x) = \int_0^{\infty} \left( A(\omega)\cos(\omega x) + \cancelto{0}{B(\omega)\sin(\omega x)} \right) d\omega$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos(\omega x)\,dx = \frac{1}{\pi\omega}\sin(\omega x)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{\pi\omega}\sin(\omega x)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{2}{\pi\omega}\sin(\omega)}$$

$$\longrightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(\omega)\cos(\omega x)}{\omega}\,d\omega$$

$$\xrightarrow{x=0} \cancelto{1}{f(0)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(\omega)}{\omega}\,d\omega \longrightarrow \boxed{\int_0^{\infty}\frac{\sin(\omega)}{\omega}\,d\omega = \frac{\pi}{2}}$$

math-teacher.blog.ir

ابراهیم شاه ابراهیمی - تیر ۹۸

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\,\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \xrightarrow{L=\pi} \boxed{U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\,\sin(nx)}$$

$$\begin{cases} U_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty} -n^2 G_n(t)\,\sin(nx) \\ U_{tt}=\sum_{n=1}^{\infty} G_n''(t)\,\sin(nx) \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 G_n(t)\,\sin(nx) = 4\sum_{n=0}^{\infty} G_n''(t)\,\sin nx$$

$$\rightarrow -n^2 G_n(t) = 4G_n''(t) \rightarrow 4G_n''(t)+n^2 G_n(t)=0$$

$$\xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} 4t^2+n^2=0 \rightarrow t=\pm\frac{1}{4}ni \rightarrow \boxed{G_n(t)=C_1\sin\left(\frac{1}{4}nt\right)+C_2\cos\left(\frac{1}{4}nt\right)}$$

$$\rightarrow \boxed{U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_1\sin\left(\frac{1}{4}nt\right)+C_2\cos\left(\frac{1}{4}nt\right)\right)\sin(nx)}$$

$$\xrightarrow{U(x,0)=\sin(x)} \sin(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_2\sin(nx) \xrightarrow{\text{سری فوریه}} C_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x)\sin(nx)\,dx$$

حاصل این انتگرال بازای $n\neq 1$ می‌شود صفر پس فقط برای $n=1$ حساب می‌کنیم؛

$$\xrightarrow{n=1} C_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{\pi}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}=\boxed{1}$$

$$\xrightarrow{n=1} U(x,t)=C_1\sin\left(\frac{1}{4}t\right)+\cos\left(\frac{1}{4}t\right)\sin(x)$$

$$U_t(x,t)=\left(\frac{1}{4}C_1\cos\left(\frac{1}{4}t\right)-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{4}t\right)\right)\sin(x)$$

$$\xrightarrow{U_t(x,0)=\sin x} \sin(x)=\frac{1}{4}C_1\sin x \rightarrow 1=\frac{1}{4}C_1 \rightarrow \boxed{C_1=4}$$

$$\rightarrow \boxed{U(x,t)=\left(\cos\left(\frac{1}{4}t\right)+4\sin\left(\frac{1}{4}t\right)\right)\sin(x)}$$

$$\xrightarrow[t=\pi/2]{x=\pi/4} U(\pi/4,\pi/2)=\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+4\sin(\pi/8)\right)\sin(\pi/4)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}+4\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$$