

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸/۳۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱۳۹۱ / ۱۰ / ۱۳		
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۱		مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	

ردیف	سؤالات	نمره
------	--------	------

۱	جاهای خالی را با یکی از کلمات (شهودی - تمثیلی - استقرایی - استنتاجی) کامل کنید: الف) استدلال ..... روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است. ب) استدلال ..... روش نتیجه گیری کلی با استفاده از حقایقی است که درستی آنها را پذیرفته ایم.	۰/۵
۲	با استفاده از اصل استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی $n$ ، ثابت کنید: $2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2) = 2n^2$	۱/۲۵
۳	کدام یک از عبارات های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ برای عبارات های نادرست مثال نقض بیاورید. الف) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گویاست. ب) مربع هر عدد فرد به اضافه یک، عددی زوج است. پ) برای هر عدد طبیعی $n$ آنگاه $2^n + 3$ عددی اول است.	۱/۲۵
۴	پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروض اند، ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\sqrt{2}$ است.	۱
۵	اگر $a, b$ دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $2a^2 + b^2 + 1 \geq 2(a - ba)$	۱
۶	با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر $\sqrt{3}$ گنگ باشد آنگاه $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ نیز عددی گنگ است.	۱
۷	مجموعه های $A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}, -2 < k < 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 4\}$ مفروضند: الف) مجموعه های $A, B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید. ب) اعضای مجموعه $A \Delta B$ را معین کنید. ج) اعضای مجموعه $B^2 - (A \times B)$ را مشخص کنید.	۲
۸	با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها، ثابت کنید: $(A - B) \cap (B - A) = \Phi$	۱/۵
۹	رابطه ی $R$ روی $\mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ به صورت زیر تعریف شده است: $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow x^2 + 5y^2 = z^2 + 5t^2$ الف) نشان دهید که $R$ یک رابطه هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(-2, 1)]$ را مشخص کنید.	۲
	« ادامه ی سؤالات در صفحه ی دوم »	

باسمه تعالی

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۸/۳۰ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۱ / ۱۰ / ۱۳		سال سوم آموزش متوسطه	
مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۱	

ردیف	سوالات	نمره
------	--------	------

۱۰	در عبارتهای زیر فضای نمونه پیوسته و گسسته را مشخص نمایید. الف) فضای نمونه طول عمر یک لامپ ب) فضای نمونه پرتاب یک سکه و یک تاس	۰/۵
۱۱	اگر $A$ و $B$ دو پیشامد معین باشند، پیشامد "تنها یکی از دو پیشامد $A$ و $B$ اتفاق بیفتد" را با استفاده از نمودار ون نمایش دهید.	۱
۱۲	تاس سالمی را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم، احتمال آن که ۷ بار عدد روی تاس فرد ظاهر شده باشد، چقدر است؟	۱
۱۳	سکه سالمی را پرتاب می‌کنیم اگر پشت بیاید ۲ بار دیگر سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر رو بیاید تاس سالمی را می‌ریزیم، مطلوب است احتمال آن که: الف) تاس زوج بیاید. ب) سکه فقط دو بار پشت بیاید.	۲
۱۴	دو عدد حقیقی به طور تصادفی بین $0$ و $2$ انتخاب می‌شوند، مطلوب است احتمال آن که مجموع دو عدد بین $1$ و $2$ باشد.	۲
۱۵	برای دو پیشامد $A$ و $B$ از فضای نمونه‌ی $S$ ثابت کنید: $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$	۲
۲۰	جمع نمره	«موفق باشید»

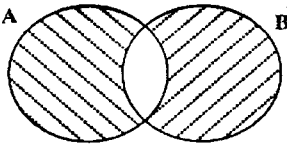
باسمه تعالی

ساعت شروع : ۳۰ : ۸ صبح	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳ / ۱۰ / ۱۳۹۱	مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	سال سوم آموزش متوسطه دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۱

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	الف) استقرایی (۰/۲۵)      ب) استنتاجی (۰/۲۵)	۰/۵
۲	$P(1): 2 = 2(1)^2 \quad (0/25)$ فرض استقراء $P(K): 2 + 4 + 6 + \dots + (4k - 2) = 2k^2 \quad (0/25)$ حکم استقراء $P(K+1): 2 + 4 + 6 + \dots + (4k - 2) + (4k + 2) = 2(k+1)^2 \quad (0/25)$ $P(K+1): 2 + 4 + 6 + \dots + (4k - 2) + (4k + 2) = 2k^2 + (4k + 2) \quad (0/25)$ $= 2(k^2 + 2k + 1) = 2(k+1)^2 \quad (0/25)$	۱/۲۵
۳	الف) نادرست (۰/۲۵) مثال نقض (۰/۲۵)      ب) درست (۰/۲۵)      پ) نادرست (۰/۲۵) مثال نقض (۰/۲۵)	۱/۲۵
۴	سطح مربع را به ۴ مربع مساوی تقسیم می کنیم. ۴ مربع را ۴ لانه و ۵ نقطه را ۵ کبوتر در نظر می گیریم (۰/۲۵) بنابراین اصل کبوتری حداقل دو تا از نقطه ها به یکی از مربع های کوچک تعلق دارند. (۰/۲۵) طول هر ضلع مربع کوچک یک واحد می باشد. با استفاده از قضیه فیثاغورس به دست می آید: $(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2 \quad (0/25)$ $(AB)^2 < 1^2 + 1^2 \Rightarrow (AB)^2 < 2 \Rightarrow AB < \sqrt{2} \quad (0/25)$	۱
۵	$2a^2 + b^2 + 1 \geq 2(a - ba) \Rightarrow 2a^2 + b^2 + 1 + 2ab - 2a \geq 0 \Rightarrow (a-1)^2 + (a+b)^2 \geq 0 \quad (0/25)$ درستی عبارت بدیهی است. بنابراین تمامی روابط برگشت پذیر است. (۰/۵)	۱
۶	$\sqrt{2} + \sqrt{3} = a \quad (a \text{ گویا}) \Rightarrow \sqrt{3} = a - \sqrt{2} \Rightarrow$ $3 = a^2 + 2 - 2a\sqrt{2} \Rightarrow 2a\sqrt{2} = a^2 - 1 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a^2 - 1}{2a} \Rightarrow$ گویا $\neq$ گنگی (۰/۲۵) به تناقض رسیده ایم یعنی حکم اولیه درست است. (۰/۲۵)	۱
« ادامه در صفحه ی دوم »		

باسمه تعالی

ساعت شروع: ۸:۳۰ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳/۱۰/۱۳۹۱		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۱

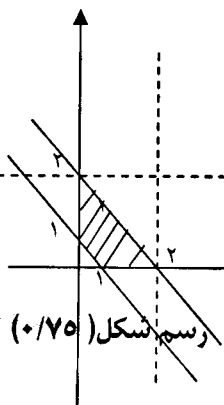
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۷	الف) $A = \{-1, 1, 3\}$ (۰/۵) $B = \{1, 2\}$ (۰/۵) ب) $A \Delta B = \{-1, 2, 3\}$ (۰/۵) پ) $B^c - (A \times B) = \{(2, 1), (2, 2)\}$ (۰/۵)	۲
۸	$(A - B) \cap (B - A) = (A \cap B') \cap (B \cap A') = (A \cap A') \cap (B \cap B') = \Phi$ (۰/۵) (۰/۵)	۱/۵
۹	بازتابی است. (۰/۲۵) $1) (x, y) R(x, y) \Rightarrow x^2 + 5y^2 = x^2 + 5y^2$ $2) (x, y) R(z, t) \Rightarrow x^2 + 5y^2 = z^2 + 5t^2 \Rightarrow z^2 + 5t^2 = x^2 + 5y^2 \Rightarrow (z, t) R(x, y)$ تقارنی است (۰/۲۵) $3) \left\{ \begin{array}{l} (x, y) R(z, t) \Rightarrow x^2 + 5y^2 = z^2 + 5t^2 \\ (z, t) R(e, f) \Rightarrow z^2 + 5t^2 = e^2 + 5f^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + 5y^2 = e^2 + 5f^2 \Rightarrow (x, y) R(e, f)$ تعدی است (۰/۵) پس رابطه R هم ارزی است (۰/۲۵) ب) $(-2, 1) = \{(x, y) \in Z^2 - \{(0, 0)\} \mid (x, y) R(-2, 1)\} = \{(x, y) \mid x^2 + 5y^2 = 9\}$ (۰/۲۵) (۰/۵)	۲
۱۰	الف) پیوسته (۰/۲۵) ب) گسسته (۰/۲۵)	۰/۵
۱۱		۱
۱۲	صورت و مخرج کسر هر قسمت (۰/۵) $P = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{\binom{10}{7}}{2^{10}}$	۱
	«ادامه در صفحه‌ی سوم»	

باسمه تعالی

ساعت شروع: ۸:۳۰ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳/۱۰/۱۳۹۱		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۱

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱۳	<p>۲</p> $S = \{1R, 2R, 3R, 4R, 5R, 6R, PRR, PRP, PPR, PPP\} \Rightarrow n(S) = 10 \quad (0/5)$ $A = \{2R, 4R, 6R\} \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow p(A) = \frac{3}{10} \quad (0/75)$ $B = \{PPR, PRP\} \Rightarrow n(B) = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad (0/75)$	۲
----	---	---

۱۴	<p>۲</p> $S = \{(x, y) \mid 0 < x < 2, 0 < y < 2\} \quad (0/25)$ $A = \{(x, y) \mid 1 < x + y < 2\} \quad (0/25)$  <p>رسم شکل (0/75)</p> $p(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{4} = \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{3}{8} \quad (0/75)$	۲
----	--	---

۱۵	<p>۲</p> $A = (A - B) \cup (A \cap B) \quad (0/5)$ $P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)] \quad (0/25)$ <p><math>(A - B)</math> و <math>(A \cap B)</math> دو پیشامد ناسازگارند پس طبق اصل ۳ داریم: (0/5)</p> $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \quad (0/5)$ $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \quad (0/25)$	۲
----	---	---

۲۰	جمع نمره	
----	----------	--

مصححین گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.