

حمد بی حد آن خدای پاک را آن که ایمان داد مشتی خاک را

پندنامه‌ی فریدون عطار نیشابوری

تمرین‌های هفته‌ی نخست - مهلت تحویل: ۱۲ مهر ۱۳۹۲
امیر کفشدار گوه‌رشادی

آ) تمرین‌های ترکیبیات

• ثابت کنید $\forall n \in \mathbb{N} \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

• ثابت کنید $\forall n \in \mathbb{N} \forall |n^y - n$

• (برج‌های هانوی با محدودیت اضافی) سه میله به نام‌های A و B و C داریم. n مهره نیز داریم که از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند و ابتدا به صورت مرتب شده در میله‌ی A قرار دارند به شکلی که مهره‌ی شماره‌ی n پایین‌ترین مهره است. در هر حرکت می‌توانیم بالاترین مهره‌ی یک میله را به بالای میله‌ی بعدی منتقل کنیم. (میله‌ی بعدی C، میله‌ی A است). همچنین در حین انتقال مهره‌ها مجاز نیستیم که مهره‌ای با شماره‌ی بزرگ‌تر را روی مهره‌ای با شماره‌ی کوچکتر قرار دهیم.

○ ثابت کنید به ازای هر n، می‌توان در تعدادی متناهی حرکت همه‌ی n مهره را از A به C منتقل کرد.

○ کم‌ترین تعداد حرکات لازم برای انتقال n مهره از A به C چقدر است؟ ادعای خود را ثابت نمایید.

• (حالت کلی مسأله‌ی ژوزفیوس) اعداد ۱ تا n را دور دایره نوشته‌ایم و با شروع از عدد ۱، آن‌ها را k تا در میان خط می‌زنیم. مثلن اگر n به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، اولین عددی که خط می‌خورد k+۱ و دومین عددی که خط می‌خورد k+۲ است. آخرین عددی که خط می‌خورد کدام است؟ ادعای خود را ثابت نمایید.

ب) تمرین‌های الگوریتم

• ثابت کنید $\log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$

• ثابت کنید $\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}$

• برای عبارت $f \in \Theta(g)$ ، دو تعریف زیر ارائه شده است. ثابت کنید این دو تعریف هم‌ارز هستند.

○ $f \in O(g) \wedge f \in \Omega(g)$

○ $\exists n_0 \in \mathbb{N} \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \forall n > n_0. c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

پیروز و سربلند باشید