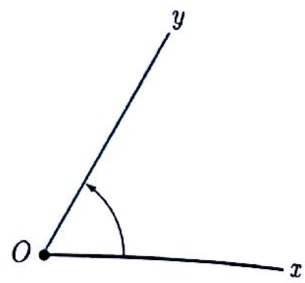
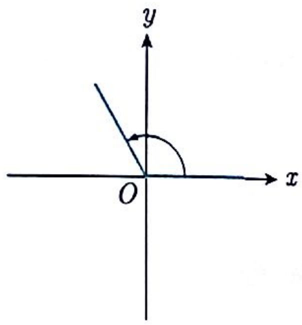
زاویه


شکل ۵-۱

اگر دو نیم‌خط Ox و Oy در نقطه‌ی O مشترک باشند نیم‌خط Ox را حول نقطه‌ی O دوران می‌دهیم تا بر Oy منطبق شود، قسمتی از صفحه که ما بین این دو نیم‌خط قرار می‌گیرد را زاویه گویند و آن را به‌صورت $\angle xOy$ نمایش می‌دهند. (شکل ۵-۱)

در مثلثات زوایا جهت دارند و دو زاویه‌ی $\angle xOy$ و $\angle yOx$ مساویِ یکدیگر نیستند بلکه قرینه‌ی یکدیگرند. بنابراین یکی از دو ضلع زاویه را مبدأ و دیگری را مقصد در نظر می‌گیرند. در زاویه‌ی $\angle xOy$ نیم‌خط Ox را مبدأ و نیم‌خط Oy را مقصد در نظر می‌گیرند. اگر جهت حرکت مبدأ برای انطباق به مقصد در خلافِ جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد آن‌گاه آن زاویه مثبت، و اگر جهت حرکت مبدأ برای انطباق به مقصد موافقِ جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد آن‌گاه آن زاویه منفی خواهد بود. دقت کنید که در مثلثات اندازه‌ی زاویه‌ای می‌تواند از ۳۶۰° نیز بیش‌تر باشد. به عنوان مثال زاویه‌های ۴۵°، -۶۰° و ۴۵۰° در مثلثات به‌ترتیب به شکل زیر می‌باشند.


شکل ۵-۲


شکل ۵-۳

در مختصات دوبعدی، یک زاویه را استاندارد گویند هرگاه رأس آن بر مبدأ مختصات و ضلع مبدأ آن بر جهت مثبت محور xها منطبق باشد.

در این حالت بستگی به این که مقدار آن زاویه چقدر باشد ضلع مقصد آن زاویه در یکی از نواحی چهارگانه و یا بر روی محورهای مختصات قرار خواهد گرفت. به عنوان مثال ضلع مقصد هر یک از زوایای ۴۵°، -۶۰° و ۴۵۰° به‌ترتیب در ناحیه‌ی اول، ناحیه چهارم و جهت مثبت محور yها قرار خواهند گرفت.

مثال ۱ اگر هر یک از زوایای زیر را به‌صورت استاندارد در مختصات دکارتی رسم کنیم ضلعِ مقصد هر یک از آن‌ها در چه ناحیه و یا بر روی چه محوری قرار خواهند گرفت؟

۱) ۱۹۱۰° ۲) -۲۸۲° ۳) ۵۹۱۸° ۴) -۴۵۹۰°

حل: الف) چون $۱۹۱۰^\circ = ۵ \times ۳۶۰^\circ + ۱۱۰^\circ$ بنابراین آن زاویه ۵ دور کامل در جهت مثبت مثلثاتی (خلافِ حرکت عقربه‌های ساعت) چرخیده و به اندازه‌ی ۱۱۰° پیش می‌رود. معلوم است که انتهای زاویه‌ی ۱۱۰° با فرض آن‌که ابتدای آن در جهت مثبت محور xها باشد در ناحیه‌ی دوم خواهد بود.

ب) چون $-۲۸۲^\circ = -۲۷۰^\circ + (-۱۲^\circ)$ بنابراین با شروع از جهت مثبت محور xها به اندازه‌ی ۲۷۰° و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیش می‌رویم (که در این‌صورت به روی جهت مثبت محور Oy خواهیم رسید) و سپس به اندازه‌ی ۱۲° چرخش را ادامه می‌دهیم معلوم است که ضلع مقصد در ناحیه‌ی اول قرار خواهد گرفت.

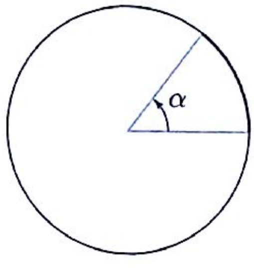
ج) چون $۵۹۱۸^\circ = ۱۶ \times ۳۶۰^\circ + ۱۵۸^\circ$ بنابراین آن زاویه ۱۶ دورکامل در جهت مثبت مثلثاتی چرخیده و به اندازه‌ی ۱۵۸° پیش می‌رود. معلوم است که انتهای زاویه‌ی ۱۵۸° با توجه به نابرابریِ $۱ \times ۹۰^\circ < ۱۵۸^\circ < ۲ \times ۹۰^\circ$ در ناحیه‌ی دوم خواهد بود.

د) چون $-۴۵۹۰^\circ = -۱۲ \times ۳۶۰^\circ + (-۲۷۰^\circ)$ بنابراین آن زاویه ۱۲ دورکامل در خلاف جهت مثبت مثلثاتی چرخیده و در همان جهت ۲۷۰° پیش می‌رود. معلوم است که انتهای چنین زاویه‌ای بر روی جهت مثبت محور Oy واقع خواهد بود.

نکته ۱. اگر مقدار زاویه‌ی α چنان باشد که $\alpha = k.۳۶۰^\circ + \beta$ که در آن k عدد صحیحی بوده و $۰ \le \beta < ۳۶۰^\circ$ آن‌گاه انتهای زاویه‌ی استانداردِ α با انتهای زاویه‌ی استانداردِ β یکسان خواهد بود.

رادیان

یکی از واحدهای اندازه‌گیری زاویه رادیان می‌باشد. در یک دایره یک رادیان برابر مقدار زاویه‌ی مرکزی‌ای است که اندازه‌ی کمان مقابلش برابر شعاع آن دایره باشد. چون محیط هر دایره‌ای $۲\pi R$ می‌باشد (π عدد گنگی است که به عدد گویای ۳/۱۴ نزدیک است) بنابراین در محیط هر دایره‌ای ۲π تا شعاع جا می‌گیرد (بیش‌تر از ۶ تا و کم‌تر از ۷ تا).



شکل ۵-۴

بنابراین زاویه‌ی مرکزی مقابل به کل محیط دایره (که ۳۶۰° است) برابر ۲π رادیان می‌شود. به عبارت دیگر π رادیان برابر ۱۸۰ درجه می‌باشد. بنابراین نکته‌ی زیر برقرار خواهد بود:

نکته ۲. اگر مقدار زاویه‌ای را بر حسب درجه با D و مقدار آن زاویه را بر حسب رادیان با R نمایش دهیم آن‌گاه بین آن دو، رابطه‌ی $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{۱۸۰}$ برقرار است.

مثال ۲ اندازه‌ی هر یک از زاویه‌های زیر را بر حسب رادیان پیدا کنید.

۱) ۴۵° ۲) ۱۲۰° ۳) -۱۵۰° ۴) ۹۳۰°

حل: الف) $\frac{۴۵}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{۴}\text{rad}$

ب) $\frac{۱۲۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۲\pi}{۳}\text{rad}$

ج) $\frac{-۱۵۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{-۵\pi}{۶}\text{rad}$

د) $\frac{۹۳۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۳۱\pi}{۶}\text{rad}$

مثال ۳ مجموع دو زاویه‌ی α و β برابر $\frac{۱۷\pi}{۲}$ رادیان و اختلاف آن‌ها ۹۰۰° است هر یک از آن دو زاویه را بیابید.

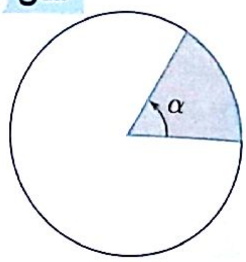
حل:

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{\frac{۱۷\pi}{۲}}{\pi} \Rightarrow D = ۱۵۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = ۱۵۳۰^\circ \\ \alpha - \beta = ۹۰۰^\circ \end{cases} \Rightarrow ۲\alpha = ۲۴۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = ۱۲۱۵^\circ \ , \ \beta = ۳۱۵^\circ$$

مثال ٤ در شکل ۵-۵ اگر شعاع دایره برابر ۴ و اندازه‌ی زاویه‌ی α برابر ۱ رادیان باشد آن‌گاه مساحت ناحیه‌ی رنگی چقدر خواهد بود؟



شکل ۵-۵

حل. چون مساحت دایره $\pi R^۲$ بوده و اندازه‌ی زاویه‌ی α برابر $\frac{۱}{۲\pi}$ کل زاویه‌ی مرکزیِ مقابل به محیط می‌باشد بنابراین:

$$S_{\text{قطاع}} = \frac{۱}{۲\pi}.(\pi R^۲) = \frac{۱}{۲} \times ۴^۲ = ۸$$

مثال ۵ اندازه‌ی زاویه‌ای ۱۹ رادیان می‌باشد. اگر آن را به‌صورت استاندارد در مختصات دوبعدی رسم کنیم آن‌گاه انتهای آن در چه ناحیه‌ای قرار خواهد گرفت؟

حل.

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{۱۸۰} = \frac{۱۹}{\pi} \Rightarrow D = \frac{۳۴۲۰}{\pi} \simeq ۱۰۸۹/۱۷^\circ$$

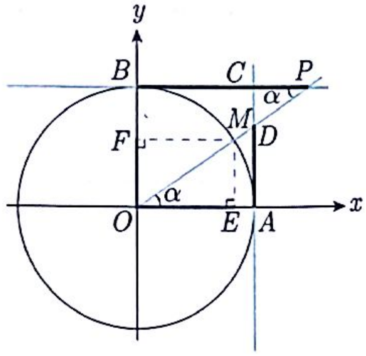
$$۱۰۸۹/۱۷^\circ = ۳ \times ۳۶۰^\circ + ۹/۱۷^\circ$$

معلوم است که انتهای زاویه‌ی $۹/۱۷^\circ$ در ناحیه‌ی اول قرار دارد بنابراین انتهای زاویه‌ی ۱۹ رادیان نیز در ناحیه‌ی اول واقع خواهد بود.

دایره‌ی مثلثاتی

دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز O (مبدأ مختصات) را دایره‌ی مثلثاتی گویند. می‌توان زوایای مختلف و نسبت‌های مثلثاتی آنها را در این دایره تعریف کرد. برای نشان دادن زوایا، همواره یک ضلع زاویه را منطبق بر جهت مثبت محور xها گرفته و ضلع دیگر را شعاعی از دایره در نظر می‌گیرند.

توجه کنید که این دایره جهت‌دار است و حرکت در جهت عقربه‌های ساعت، منفی و حرکت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، مثبت محسوب می‌شود. (شکل ۵-۶)



شکل ۵-۶

در شکل ۵-۶ محور xها را محور کسینوس‌ها گویند و از تصویر ضلع دوم زاویه بر آن محور، کسینوس زاویه به‌دست می‌آید.

$$\cos\alpha = \overline{OE}$$

باید توجه داشت که اگر تصویر مورد اشاره در سمت راست مبدأ مختصات قرار گیرد، مقدار کسینوس مثبت و اگر آن تصویر در سمت چپ مبدأ مختصات قرارگیرد، مقدارکسینوس منفی خواهد بود. بنابراین اگر انتهای زاویه در یکی از ناحیه‌های اول یا چهارم باشد، مقدارکسینوس مثبت و اگر در یکی از ناحیه‌های دوم یا سوم باشد، مقدارکسینوس آن زاویه منفی خواهد بود.

محور yها را محور سینوس‌ها گویند و از تصویر ضلع دوم زاویه بر آن محور، سینوس زاویه به‌دست می‌آید.

$$\sin\alpha = \overline{OF}$$

اگر تصویر مورد اشاره در بالای مبدأ مختصات قرار گیرد، مقدار سینوس مثبت و اگر آن تصویر در پایین مبدأ مختصات قرار گیرد، مقدار سینوس منفی خواهد بود. بنابراین اگر انتهای زاویه در یکی از ناحیه‌های اول یا دوم باشد، مقدار سینوس مثبت و اگر در یکی از ناحیه‌های سوم یا چهارم باشد، مقدار سینوس آن زاویه منفی خواهد بود.

در واقع اگر نقطه‌ی A را نقطه‌ی $(۱, ۰)$ تصور کنیم آن‌گاه نقطه‌ی M دوران یافته‌ی نقطه‌ی A به مرکز O و به اندازه‌ی زاویه‌ی α می‌باشد. معلوم است که مختصات نقطه‌ی M به شکل $M(\overline{OE}, \overline{OF})$ می‌باشد که با توجه به تساوی‌های $\cos\alpha = \overline{OE}$ و $\sin\alpha = \overline{OF}$ مختصات نقطه‌ی M به شکل $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$ به‌دست می‌آید.

خطی که در نقطه‌ی A بر محور Ox عمود می‌شود را محور تانژانت‌ها گویند و از تلاقی امتداد ضلع دوم زاویه با آن محور، مقدار تانژانت به‌دست می‌آید.

$$\tan\alpha = \overline{AD}$$

اگر نقطه‌ی تلاقی بالای محور xها باشد، مقدار تانژانت مثبت و اگر آن نقطه در پایین محور xها باشد، مقدار تانژانت منفی خواهد بود. بنابراین اگر انتهای زاویه در یکی از ناحیه‌های اول یا سوم باشد، مقدار تانژانت مثبت و اگر در یکی از ناحیه‌های دوم یا چهارم باشد، مقدار تانژانت آن زاویه منفی خواهد بود. در حالتی که انتهای زاویه بر روی محور yها باشد، مقدار تانژانت برای آن زاویه تعریف نشده خواهد بود.

خطی که در نقطه‌ی B بر محور Oy عمود می‌شود، محور کتانژانت نامیده می‌شود و از تلاقی امتداد ضلع دوم زاویه با آن محور، مقدار کتانژانت به‌دست می‌آید.

$$\cot\alpha = \overline{BP}$$

اگر نقطه‌ی تلاقی در سمت راست محور yها باشد، مقدار کتانژانت مثبت و اگر آن نقطه در سمت چپ محور yها باشد، مقدار کتانژانت منفی خواهد بود. بنابراین همانند تانژانت یک زاویه مقدار کتانژانت نیز مثبت خواهد بود هرگاه انتهای زاویه در یکی از ناحیه‌های اول یا سوم باشد و منفی خواهد بود هرگاه انتهای زاویه در یکی از ناحیه‌های دوم یا چهارم باشد.

اتحادهای مثلثاتی

بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه روابطی برقرار است که مهم‌ترین آن‌ها به شکل زیر می‌باشد:

۱) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ۲) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

۳) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ۴) $\tan\theta . \cot\theta = 1$

۵) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ ۶) $1 + \cot^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص

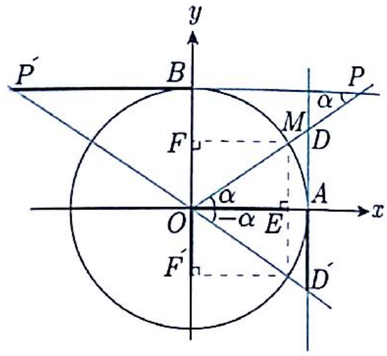
نسبت‌های مثلثاتی بعضی از زوایا که در حل مسائل کاربرد فراوانی دارند در جدول زیر آمده است:

نسبت \ زاویه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°
$\sin\theta$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱
$\cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰
$\tan\theta$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده
$\cot\theta$	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰

نسبت‌های مثلثاتی $(-\alpha)$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α

با توجه به شکل ۵-۷ و تساوی مثلث‌های موردنظر هر یک از تساوی‌های زیر مشخص خواهند شد:

$$OF = OF' \,,\; AD = AD' \,,\; BP = BP'$$



شکل ۵-۷

بنابراین با در نظرگرفتن علامت پاره‌خط‌های جهت‌دار در شکل فوق به تساوی‌های زیر خواهیم رسید:

$$\sin(-\alpha) = \overline{OF'} = -\overline{OF} = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \overline{OE} = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = \overline{AD'} = -\overline{AD} = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = \overline{BP'} = -\overline{BP} = -\cot\alpha$$

مثال ۶ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی (-۶۰°) را بیابید.

حل:

$$\sin(-۶۰^\circ) = -\sin(۶۰^\circ) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(-۶۰^\circ) = \cos(۶۰^\circ) = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan(-۶۰^\circ) = -\tan(۶۰^\circ) = -\sqrt{۳}$$

$$\cot(-۶۰^\circ) = -\cot(۶۰^\circ) = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

نسبت‌های مثلثاتی $(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α

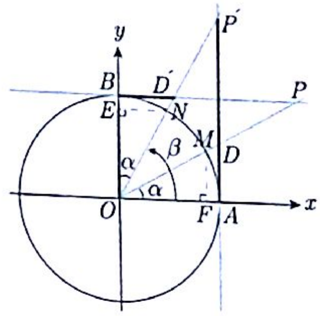
در شکل ۵-۸ اگر α و β متمم هم باشند $(\beta = \frac{\pi}{۲} - \alpha)$، آن‌گاه زاویه‌ی BOD' برابر α شده و در نتیجه مثلث‌های OBD' و OAD با یکدیگر و نیز مثلث‌های OPB و $OP'A$ با یکدیگر و بالاخره مثلث‌های OMF و ONE با هم برابر خواهند بود:

$$\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \overline{OE} = \overline{OF} = \cos(\alpha)$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin(\alpha)$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\overline{AP'}=\overline{BP}=\cot(\alpha)$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\overline{BD'}=\overline{AD}=\tan(\alpha)$$

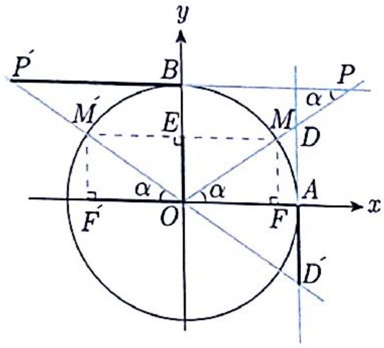


شکل ۵-۸

نسبت‌های مثلثاتی $(\pi-\alpha)$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α

با توجه به شکل ۵-۹ و با توجه به تساوی مثلث‌های مربوطه هر یک از تساوی‌های زیر نتیجه می‌شوند (یادآوری می‌شود که زاویه‌ی $(\pi-\alpha)$ زاویه‌ی $P'OA$ می‌باشد):

$$\sin(\pi-\alpha)=\overline{OE}=\sin(\alpha)$$
$$\cos(\pi-\alpha)=\overline{OF'}=-\overline{OF}=-\cos(\alpha)$$
$$\tan(\pi-\alpha)=\overline{AD'}=-\overline{AD}=-\tan(\alpha)$$
$$\cot(\pi-\alpha)=\overline{BP'}=-\overline{BP}=-\cot(\alpha)$$



شکل ۵-۹

در حالت کلی برای پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $(k.\frac{\pi}{۲}\pm\alpha)$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α به این شیوه عمل می‌کنیم که اگر k عددی زوج باشد، آن‌گاه $|\sin(k.\frac{\pi}{۲}\pm\alpha)|$ با $|\sin\alpha|$، $|\cos(k.\frac{\pi}{۲}\pm\alpha)|$ با $|\cos\alpha|$، $|\tan(k.\frac{\pi}{۲}\pm\alpha)|$ با $|\tan(\alpha)|$ و بالاخره $|\cot(k.\frac{\pi}{۲}\pm\alpha)|$ با $|\cot(\alpha)|$ برابر است و برای پیدا کردن علامت آن نسبت، زاویه‌ی α را حاده فرض کرده و انتهای زاویه‌ی $k.\frac{\pi}{۲}\pm\alpha$ را در دایره‌ی مثلثاتی پیدا می‌کنیم و علامت آن نسبت مثلثاتی را با توجه به مطلب اشاره شده در ابتدای فصل پیدا می‌کنیم و اما اگر k فرد باشد، آن‌گاه $|\sin(k.\frac{\pi}{۲}\pm\alpha)|$ با $|\cos\alpha|$، $|\cos(k.\frac{\pi}{۲}\pm\alpha)|$ با $|\sin\alpha|$، $|\tan(k.\frac{\pi}{۲}\pm\alpha)|$ با $|\cot(\alpha)|$ و بالاخره $|\cot(k.\frac{\pi}{۲}\pm\alpha)|$ با $|\tan(\alpha)|$ برابر خواهد بود و علامت آن نیز به همان سبک قبلی پیدا خواهد شد.

مثال ۷ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $(\frac{\pi}{۲}+\alpha)$ را بر حسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α بیابید.

حل: با فرض حاده بودن α، زاویه‌ی $(\frac{\pi}{۲}+\alpha)$ در ناحیه‌ی دوم خواهد بود که سینوس آن مثبت و سایر نسبت‌های مثلثاتی آن منفی خواهد بود، و در ضمن ضریب $\frac{\pi}{۲}$ فرد می‌باشد، بنابراین:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=+\cos\alpha \qquad \cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha \qquad \cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$$

مثال ۸ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $(\pi+\alpha)$ را بر حسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α بیابید.

حل: با فرض حاده بودن α، زاویه‌ی $(\pi+\alpha)$ در ناحیه سوم خواهد بود که تانژانت و کتانژانت آن مثبت و سینوس و کسینوس آن منفی خواهند بود، و در ضمن ضریب $\frac{\pi}{۲}$ زوج می‌باشد $(\pi=۲\times\frac{\pi}{۲})$،

بنابراین:

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha \qquad \cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$$

مثال ۹ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sin(\frac{۱۱\pi}{۳})$ ب) $\tan(\frac{۲۱\pi}{۴})$ ج) $\cot(۳۰۰^\circ)$ د) $\cos(-۵۷۰^\circ)$

حل: الف)

$$\sin(\frac{۱۱\pi}{۳}) = \sin(\frac{۱۲\pi}{۳} - \frac{\pi}{۳}) = \sin(۴\pi - \frac{\pi}{۳})$$

$$= \sin(۸ \times \frac{\pi}{۲} + (-\frac{\pi}{۳})) = \sin(-\frac{\pi}{۳}) = -\sin\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

ب)

$$\tan(\frac{۲۱\pi}{۴}) = \tan(\frac{۲۰}{۴}\pi + \frac{\pi}{۴}) = \tan(۱۰ \times \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}) = \tan(\frac{\pi}{۴}) = ۱$$

ج)

$$\cot(۳۰۰^\circ) = \cot(۳ \times ۹۰^\circ + ۳۰^\circ) = -\tan ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

د)

$$\cos(-۵۷۰^\circ) = \cos(-۶ \times ۹۰^\circ + (-۳۰^\circ)) = -\cos(-۳۰^\circ)$$

$$= -(\cos ۳۰^\circ) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مثال ۱۰ مقدار عددی عبارت زیر را بیابید.

$$A = \sin(\frac{۷\pi}{۶}).\tan(\frac{۵\pi}{۴}) + \cot(\frac{۷\pi}{۴}).\cos(\frac{۵\pi}{۳})$$

حل:

$$\sin(\frac{۷\pi}{۶}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{۶}) = -\sin(\frac{\pi}{۶}) = -\frac{۱}{۲}$$

$$\tan(\frac{۵\pi}{۴}) = \tan(\pi + \frac{\pi}{۴}) = \tan(\frac{\pi}{۴}) = ۱$$

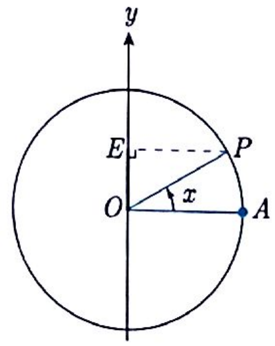
$$\cot(\frac{۷\pi}{۴}) = \cot(۲\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\cot(\frac{\pi}{۴}) = -۱$$

$$\cos(\frac{۵\pi}{۳}) = \cos(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = \cos(\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow A = (-\frac{۱}{۲}).(۱) + (-۱).(\frac{۱}{۲}) = -۱$$

توابع مثلثاتی

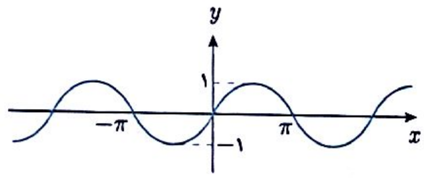
اگر در دایره‌ی مثلثاتی OA را مبدأ زوایا در نظر بگیریم (که بر جهت مثبت محور xها منطبق است) و متحرکی مانند P با شروع از نقطه‌ی A در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت بر روی آن دایره حرکت کند و زاویه‌ی متشکل از OP با جهت مثبت محور xها را x بنامیم آن‌گاه مقدار $\sin x$ که آن را با y نمایش می‌دهیم و در شکل با OE نمایان شده است رفتاری خواهد داشت که در بندهای زیر تشریح شده است:



شکل ۵-۱۰

- در نقطه‌ی $x = ۰$ مقدار y یعنی $\sin x$ برابر ۰ است.
- در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{۶}\text{rad}$ مقدار y برابر $\frac{۱}{۲}$ است.
- در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{۳}\text{rad}$ مقدار y برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است.
- در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{۲}\text{rad}$ مقدار y ماکزیمم مقدار خود را داشته و برابر ۱ است.
- همان‌طور که مشاهده می‌شود اگر x، دو برابر شود مقدار y، دو برابر نمی‌شود و این نشان می‌دهد که تابع مورد بحث تابعی خطی نمی‌باشد.
- باز با توجه به بندهای بالا معلوم می‌شود که تابعِ $y = \sin x$ در بازه‌ی $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ تابعی صعودی بوده و از ۰ تا ۱ افزایش پیدا می‌کند.
- اگر بررسی‌ها را ادامه دهید خواهید دید که آن تابع در بازه‌ی $[\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}]$ تابعی نزولی بوده و از ۱ تا ۱− کاهش پیدا خواهد کرد و نیز در بازه‌ی $[\frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi]$ همانند بازه‌ی $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ تابعی است صعودی.
- عملکرد تابع در بازه‌های $[۰, ۲\pi]$، $[۲\pi, ۴\pi]$، $[۴\pi, ۶\pi]$، ... یکسان است و این به آن معناست که آن تابع دارای دوره‌ی تناوبی به اندازه‌ی ۲π می‌باشد.

حال اگر محور xها را به رادیان نشانه‌گذاری کنیم معلوم خواهد شد که نمودارِ تابع $y = f(x) = \sin x$ به‌صورت شکل ۵-۱۱ خواهد بود.



شکل ۵-۱۱

در مورد تابع فوق اطلاعات زیر کسب می‌شود:

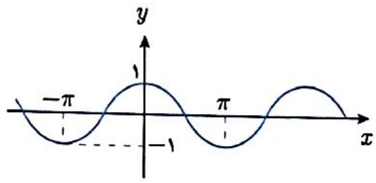
I) دامنه‌ی تعریف آن تابع مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد.

II) برد آن تابع بازه‌ی $[-۱, ۱]$ می‌باشد.

III) دوره‌ی تناوب آن تابع ۲π می‌باشد.

با بررسی مشابه در مورد تابعِ $y = f(x) = \cos x$ به نمودار ۵-۱۲ خواهیم رسید.

اطلاعات سه‌گانه‌ی کسب شده در مورد تابع سینوس، در مورد تابع کسینوس نیز برقرارند.



شکل ۵-۱۲

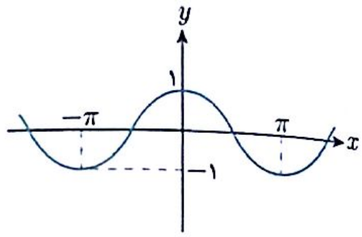
مثال ۱۱ **با توجه به مطالبی که در فصل سوم راجع به انتقال نمودار به سمت راست و چپ و نیز بالا و پایین و همچنین انقباض و انبساط آن خواندید، با الگو قرار دادن نمودار تابعِ $y = \sin x$ نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کرده، دامنه، برد و دوره‌ی تناوب هر یک از آن‌ها را ذکر کنید.**

الف) $y = \sin(x + \frac{\pi}{۲})$ ب) $y = ۲\sin x$

ج) $y = \sin ۲x$ د) $y = \sin(x + \frac{\pi}{۳}) - ۲$

هـ) $y = |\sin x|$ و) $y = \sin |x|$

حل: الف) نمودار تابع فوق همان نمودار $y = \sin x$ می‌باشد که به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ واحد به سمت چپ منتقل شده است. (شکل ۵-۱۳)

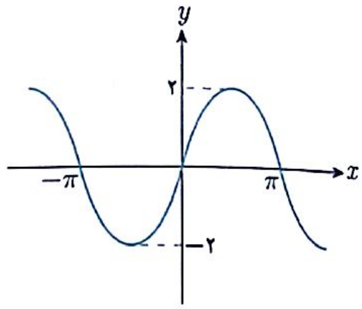


شکل ۵-۱۳

همان‌طور که مشاهده می‌شود نمودار رسم شده همان نمودار $y = \cos x$ می‌باشد که چنین انتظاری نیز می‌رفت چرا که در قسمت‌های قبل تساویِ $\sin(x + \frac{\pi}{۲}) = \cos x$ را مشاهده کردید.

- دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ است.
- برد تابع $[-۱, ۱]$ است.
- دوره‌ی تناوب تابع ۲π است.

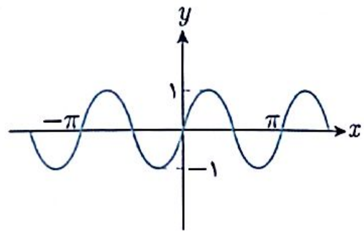
ب) نمودار تابع فوق انبساط یافته‌ی تابع $y = \sin x$ در راستای عمود و به اندازه‌ی ۲ برابر می‌باشد. در حقیقت برد تابع دو برابر شده و ریشه‌ها ثابت می‌مانند. (شکل ۵-۱۴)



شکل ۵-۱۴

- دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ است.
- برد تابع $[-۲, ۲]$ است.
- دوره‌ی تناوب تابع ۲π است.

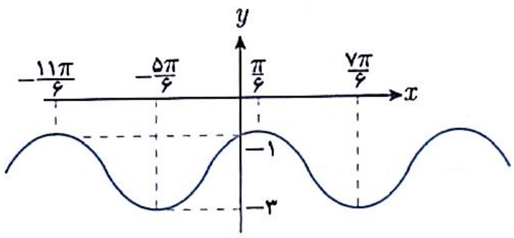
ج) ریشه‌های تابع داده شده نصف ریشه‌های تابعِ $y = \sin x$ می‌باشد (نقش x قدیم را $۲x$ جدید بازی می‌کند؛ یعنی $x_{\text{جدید}} = \frac{x_{\text{قدیم}}}{۲}$). به عبارت دیگر تابع داده شده منقبض شده‌ی تابع $\sin x$ در راستای افقی می‌باشد. (شکل ۵-۱۵)



شکل ۵-۱۵

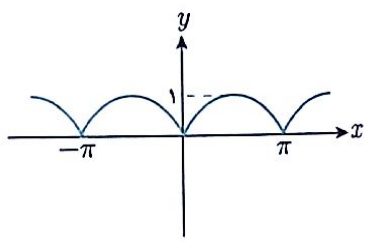
- دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ است.
- برد تابع $[-۱, ۱]$ است.
- دوره‌ی تناوب تابع π است.

د) نمودار تابع داده شده همان نمودار تابع $y = \sin x$ است که $\frac{\pi}{۳}$ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین منتقل شده است. (شکل ۵-۱۶)



شکل ۵-۱۶

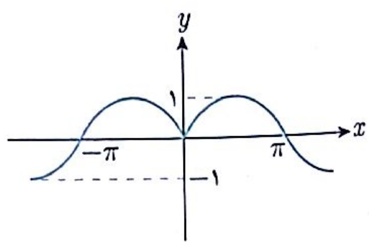
- دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ است.
- برد تابع $[-۳, -۱]$ است.
- دوره‌ی تناوب تابع ۲π است.



شکل ۵-۱۷

ه) نمودار این تابع همان نمودار تابع $y = \sin x$ می‌باشد فقط باید نقاطی که زیر محور xها قرار دارند نسبت به آن محور قرینه شوند. (شکل ۵-۱۷)

- دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ است.
- برد تابع $[۰, ۱]$ است.
- دوره‌ی تناوب تابع π است.



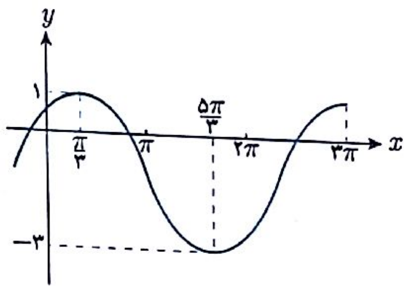
شکل ۵-۱۸

و) نمودار این تابع به ازای xهای مثبت یعنی در سمت راست محور yها همان نمودار تابع $y = \sin x$ است و به ازای xهای منفی نیز نمودار تابع در سمت راست محور y ها نسبت به آن محور قرینه می‌شود. (شکل ۵-۱۸)

- دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ است.
- برد تابع $[-۱, ۱]$ است.
- این تابع در دامنه‌ی خود تابعی متناوب نیست.

نکته ۳. در حالت کلی دامنه‌ی توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ برابر $\mathbb{R}$ و برد هر یک از آن‌ها $[-|a| + c, |a| + c]$ بوده و دوره‌ی تناوبشان نیز $\frac{۲\pi}{|b|}$ می‌باشد.

مثال ۱۲ نمودار تابع $y = a.\sin(bx + \frac{\pi}{۴}) + c$ به شکل ۵-۱۹ است. هر یک از مقادیر a، b و c را بیابید. $(b > ۰)$.



شکل ۵-۱۹

راه‌حل اول. چون برد تابع از ۳− تا ۱ یعنی بازه‌ای به طول ۴ است و این طول دو برابر برد تابعِ $y = \sin x$ می‌باشد، بنابراین $|a| = ۲$.

دوره‌ی تناوب تابع (فاصله‌ی دو ماکزیمم متوالی) $\frac{۸\pi}{۳}$ است. بنابراین:

$$\frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۸\pi}{۳} \Rightarrow |b| = \frac{۳}{۴} \Rightarrow b = \frac{۳}{۴}$$

تابع $y = ۲\sin(\frac{۳}{۴}x + \frac{\pi}{۴})$ که به‌صورت $y = ۲\sin[\frac{۳}{۴}(x + \frac{\pi}{۳})]$ نیز قابل نمایش است تابعی است که شکلش همانند شکلِ داده شده است با این تفاوت که ۱ واحد به سمت بالا رفته باشد بنابراین چون نمودار تابع نسبت به نمودار تابعِ $y = ۲\sin(\frac{۳}{۴}x + \frac{\pi}{۴})$، یک واحد پایین‌تر است معلوم می‌شود که $c = -۱$. با این توضیحات ضابطه‌ی تابع داده شده به شکل $y + ۱ = ۲\sin(\frac{۳}{۴}x + \frac{\pi}{۴})$ یا $y = ۲\sin(\frac{۳}{۴}x + \frac{\pi}{۴}) - ۱$ به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم. مقدار b را همانند راه‌حل قبلی از طریق دوره‌ی تناوب برابر $\frac{۳}{۴}$ پیدا می‌کنیم. برای یافتن مجهولات دیگر کافی است دو نقطه از تابع را در ضابطه قرار داده و آن‌ها را از طریق حل دستگاهی دو معادله و دو مجهول پیدا کنیم:

$$(\frac{\pi}{۳}, ۱) \in f \Rightarrow ۱ = a.\sin\left(\frac{۳}{۴}(\frac{\pi}{۳}) + \frac{\pi}{۴}\right) + c \Rightarrow a + c = ۱$$

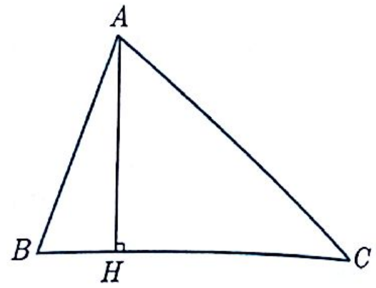
$$(\frac{۵\pi}{۳}, -۳) \in f \Rightarrow -۳ = a.\sin\left(\frac{۳}{۴}(\frac{۵\pi}{۳}) + \frac{\pi}{۴}\right) + c \Rightarrow c - a = -۳$$

$$\Rightarrow c = -۱ \; , \; a = ۲$$

کاربردهایی از مثلثات

در این قسمت قصد بر آن است تا به نمونه‌ای از کاربردهای مثلثات در سایر علوم از جمله هندسه و فیزیک اشاره شود. قبل از ارائه‌ی آن‌ها لازم به یادآوری است که در یک مثلث قائم‌الزاویه، سینوس یک زاویه‌ی حاده برابر با نسبت اندازه‌ی ضلع مقابلش به روی وتر و کسینوس آن زاویه برابر با نسبت اندازه‌ی ضلع مجاورش به روی اندازه‌ی وتر می‌باشد. در مورد زوایای منفرجه نیز از رابطه‌ی نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه با نسبت‌های مثلثاتی مکمل آن زاویه استفاده می‌کنیم.

قضیه کسینوس‌ها



شکل ۵-۲۰

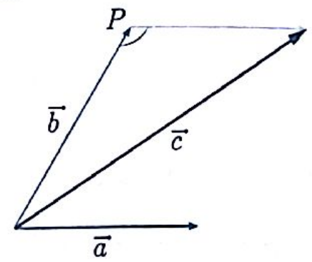
اگر در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم کنیم آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} AC^2 = b^2 &= AH^2 + HC^2 \\ &= c^2 - BH^2 + HC^2 = c^2 - BH^2 + (a - BH)^2 \\ &= c^2 + a^2 - 2a.BH = c^2 + a^2 - 2a.c.\cos\hat{B} \end{aligned}$$

یعنی در هر مثلثی مربع یک ضلع برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل‌ضرب آن دو ضلع در کسینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع که این موضوع به **قضیه‌ی کسینوس‌ها** معروف است. در حالت خاص اگر زاویه‌ی بین دو ضلع، قائمه باشد آن‌گاه کسینوس آن برابر ۰ شده و رابطه‌ی کسینوس‌ها به رابطه‌ی $b^2 = c^2 + a^2$ تبدیل خواهد شد که تأیید قضیه‌ی فیثاغورس می‌باشد.

مثال ۱۳ **اندازه‌ی برآیند دو بردار $|\vec{a}| = 6$ و $|\vec{b}| = 8$ که با یکدیگر زاویه‌ی 60° می‌سازند را بیابید.**

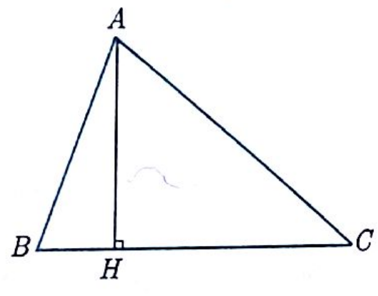
حل: در شکل ۵-۲۱ برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به شیوه‌ی متوازی‌الاضلاعی برابر با $\vec{c}$ ترسیم شده است. معلوم است که در شکل فوق مقدار زاویه‌ی P برابر 120° به‌دست می‌آید، بنابراین:



شکل ۵-۲۱

$$\begin{aligned} |c|^2 &= |a|^2 + |b|^2 - 2|a|.|b|.\cos\angle P \\ &= 6^2 + 8^2 - 2(6)(8)(-\frac{1}{2}) = 148 \Rightarrow |c| = \sqrt{148} = 2\sqrt{37} \end{aligned}$$

قضیه‌ی مساحت



شکل ۵-۲۲

اگر در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم کنیم آن‌گاه خواهیم داشت:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a.AH = \frac{1}{2}.a.c.\sin\hat{B}$$

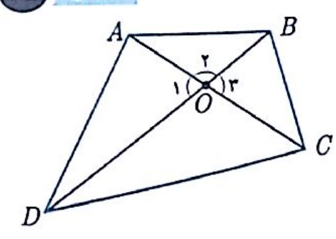
یعنی در هر مثلثی مساحت برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع دلخواه آن در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع که این موضوع به **قضیه‌ی مساحت** در مثلث معروف است.

مثال ۱۴ **مساحت متوازی‌الاضلاعی که دو ضلع مجاور آن به ترتیب ۶ و ۸ بوده و زاویه‌ی بین آن دو ضلع برابر 30° را بیابید.**

حل:
$$S = 2 \times S_{ABC} = a.c.\sin\hat{B} = 6 \times 8 \times \frac{1}{2} = 24$$

مثال ۱۵ **ثابت کنید مساحت هر چهارضلعی نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویه‌ی بین آن دو قطر می‌باشد.**

حل:



شکل ۵-۲۳

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}.OA.OB.\sin\hat{O}_2$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}.OB.OC.\sin\hat{O}_3$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2}.OC.OD.\sin\hat{O}_4$$

$$S_{DOA} = \frac{۱}{۲}.OD.OA.\sin\hat{O}_۱$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}$$
$$= \frac{۱}{۲}.OB.\sin\hat{O}.(OA+OC) + \frac{۱}{۲}.OD.\sin\hat{O}.(OA+OC)$$
$$= \frac{۱}{۲}.AC.\sin\hat{O}.(OB+OD)$$
$$= \frac{۱}{۲}.AC.BD.\sin\hat{O}$$

در اثبات فوق از این مطلب که سینوس دو زاویه‌ی مکمل با هم برابر است استفاده شده است.

قضیه‌ی سینوس‌ها

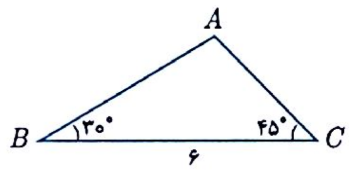
اگر قضیه‌ی مساحت را از سه زاویه‌ی مختلف بنویسید آن‌گاه خواهیم داشت:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}.a.c.\sin\hat{B} = \frac{۱}{۲}.a.b.\sin\hat{C} = \frac{۱}{۲}b.c.\sin\hat{A}$$

که اگر سه تساوی آخر را بر $\frac{۱}{۲}a.b.c$ تقسیم کرده و تساوی‌های حاصل را وارون کنیم به تساویِ $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$ خواهیم رسید که به **قضیه‌ی سینوس‌ها** در مثلث معروف است.

مثال ۱۶ دو زاویه از مثلثی $۳۰°$ و $۴۵°$ و اندازه‌ی ضلع بین آن‌ها ۶ می‌باشد. سایر زوایا و اضلاع مثلث را بیابید. (سینوس زاویه‌ی $۱۵°$ را $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$ در نظر بگیرید.)

حل:



شکل ۵-۲۴

$$\angle A = ۱۸۰° - (\hat{B}+\hat{C}) = ۱۸۰° - (۳۰° + ۴۵°) = ۱۰۵°$$

$$\sin(۱۰۵°) = \sin(۹۰° + ۱۵°) = \cos ۱۵° = \sqrt{۱ - \frac{۸ - ۴\sqrt{۳}}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{۶}{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}} = \frac{b}{\frac{۱}{۲}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$\Rightarrow b = ۳\sqrt{۶} - ۳\sqrt{۲}\ ,\ c = ۶\sqrt{۳} - ۶$$

مسائل نمونه — فصل پنجم

۱ هر یک از زوایای زیر را در محورهای مختصات دکارتی به‌صورت استاندارد رسم کنید:

۱) ۱۲۰° ۲) ۲۷۰° ۳) -۱۲۰° ۴) -۱۸۰°

۲ اگر هر یک از زوایای زیر را در محورهای مختصات دکارتی به‌صورت استاندارد رسم کنیم آن‌گاه انتهای هر یک از آن زوایا در کدام ناحیه و یا بر روی کدام محور قرار خواهد گرفت؟

۱) ۱۷۹۱° ۲) ۴۹۸۰° ۳) -۷۸۴۵° ۴) -۸۱۹۰°

۳ زاویه‌ی -۱۶۸۰° به‌صورت استاندارد در محورهای مختصات دوبعدی رسم شده است. اگر نقطه‌ی $A(\alpha,\beta)$ بر روی ضلعِ مقصد آن زاویه چنان باشد که $\alpha^۲+\beta^۲=۱۶$ آن‌گاه α و β را بیابید.

۴ زاویه‌ی α، ۴۷ برابرِ مکملِ زاویه‌ی β بوده و مجموع آن‌ها ۷۰۸۰° می‌باشد. آن دو زاویه را در مختصات دکارتی به‌صورت استاندارد رسم کنید.

۵ متحرکی با شروع از نقطه‌ی $(۱,۰)$ بر روی محیط دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع ۱ و در جهت مثبت مثلثاتی حرکت می‌کند. او در ثانیه‌ی اول ۱۷° و پس از آن در هر ثانیه دو برابرِ ثانیه‌ی قبلی مسافت طی می‌کند. در انتهای ثانیه‌ی دهم موقعیت او در کدام ناحیه است؟

۶ اندازه‌ی هر یک از زوایای زیر را بر حسب درجه پیدا کنید.

الف) $\frac{\pi}{۳}$ رادیان ب) $\frac{۱۶\pi}{۹}$ رادیان

۷ انتهای هر یک از زوایای زیر در محورهای مختصات دکارتی را بیابید.

الف) ۱۳۹۰π رادیان ب) $\frac{-۴۷۱۱\pi}{۵}$ رادیان ج) ۵۹ رادیان

۸ چرخی در ۵ دقیقه ۷۵۰ دور می‌گردد. آن چرخ در مدت ۱ ثانیه چند رادیان طی می‌کند؟

۹ به ازای مقادیر مختلف صحیح برای k انتهای کمان‌های زیر بر روی دایره‌ی مثلثاتی را بیابید.

۱) $۲k\pi-\frac{\pi}{۳}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$

۳) $k\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۲}$ ۴) $(۲k+۱)\frac{\pi}{۶}-\frac{\pi}{۱۲}$

۱۰ قطر چرخ‌های تراکتوری به‌ترتیب $\frac{۴}{\pi}$ و $\frac{۹}{\pi}$ متر می‌باشند. اگر این تراکتور ۱۸۲۴ متر را طی کند مشخص کنید هر یک از چرخ‌ها چه زاویه‌ای بر حسب رادیان را طی کرده‌اند؟

۱۱ نقاط A، B، C، D و E بر روی محیط دایره‌ای به مرکز O چنانند که:

$\angle COA=-۲۵۹۵^\circ$ $\angle BOA=۳۹۷۵^\circ$

$\angle EOA=\frac{۱۳۳\pi}{۱۲}\text{rad}$ $\angle DOA=\frac{۱۷۵\pi}{۱۲}\text{rad}$

ثابت کنید نقاط B، C، D و E چهار رأس یک مربع می‌باشند.

۱۲ در دایره‌ای به شعاع ۶ سانتی‌متر اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی $\frac{\pi}{۶}$ رادیان است. اندازه‌ی هر یک از پارامترهای زیر را بیابید.

الف) مساحت قطاع متناظر به آن زاویه ب) طول کمان متناظر به آن زاویه

۱۳ مقدار عددی هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

۱) $A=\cos(\frac{۱۳\pi}{۶})$ ۲) $B=\sin(\frac{۲\pi}{۳})$

۳) $C=\tan(\frac{۷\pi}{۶})$ ۴) $D=\cot(\frac{-۵\pi}{۶})$

۱۴ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف)

$$۳\tan ۱۳۰^\circ-۲\cot ۱۴۰^\circ-\tan ۲۳۰^\circ-۵\tan ۳۱۰^\circ+\cot ۴۰^\circ-۴\tan ۵۰^\circ=۰$$

ب)

$$\frac{۱}{\sin(۲۷۰۰^\circ-x)}+\frac{\sin(۹۰۰^\circ-x)}{\sin(۶۳۰^\circ-x)}.\tan(۲۷۰^\circ+x)=۱-\frac{۱}{\cos x}$$

۱۵ اگر $\cos x=\frac{۳}{۵}$ باشد، حاصل $\cos(x-۵\pi)$ را به‌دست آورید.

۱۶ آیا از نابرابریِ $۱۲۰^\circ\le x\le ۴۵^\circ$ می‌توان نابرابریِ $\sin ۴۵^\circ\le \sin x\le \sin ۱۲۰^\circ$ را نتیجه گرفت؟ در صورت منفی بودن جواب نابرابریِ صحیح را نتیجه بگیرید.

۱۷ با توجه به روابط زیر حدود m را بیابید.

$$۷/۵^\circ<x<۵۲/۵^\circ \qquad \sin(۴x-۶۰^\circ)=\frac{۳m+۲}{m-۱}$$

۱۸ اگر α زاویه‌ی شعاع OM با محور Ox باشد آن‌گاه نسبت‌های مثلثاتی α وقتی که M بر روی یکی از نقاط زیر واقع باشد را بیابید.

۱) $(۰,۳)$ ۲) $(\sqrt{۲},-۱)$ ۳) $(-۴,۳)$ ۴) $(\sqrt{۲},\sqrt{۲})$

۱۹ اگر $\cos x = \frac{-\sqrt{۳}}{۲}$ آن‌گاه زاویه‌ی x چه مقادیری می‌تواند باشد؟

۲۰ حدود m را چنان تعیین کنید که تساوی داده شده وقتی $\frac{-\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹}$ برقرار باشد:

$$\cos ۳x = \frac{۲m - ۳}{m - ۲}$$

۲۱ مقادیر $\sin ۷$، $\sin ۱۴$، $\sin ۲۱$ و $\sin ۲۸$ را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید که در هر یک از آن‌ها واحد زاویه‌های نوشته شده رادیان می‌باشد.

۲۲ نسبت‌های مثلثاتی هر یک از زوایای زیر را به‌دست آورید.

۱) ۵۴۳۰° ۲) -۴۲۳۰° ۳) $\frac{۸۵\pi}{۶}$ ۴) $\frac{-۱۱۹\pi}{۳}$

۲۳ اگر بدانیم $\tan ۷۵^\circ = ۲ + \sqrt{۳}$ آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{۵\sin ۳۷۵^\circ + ۲\sin ۱۰۵^\circ}{\cos ۱۶۵^\circ - ۲\cos ۲۵۵^\circ}$ را بیابید.

۲۴ در صورتی که $\cos\alpha = \frac{۳}{۵}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی چهارم مثلثاتی باشد مطلوب است محاسبه‌ی هر یک از عبارات زیر:

۱) $\sin(\frac{۷\pi}{۲} - \alpha)$ ۲) $\cos(۵۱\pi + \alpha)$

۳) $\tan(۳\pi - \alpha)$ ۴) $\cot(۸\pi - \alpha)$

۲۵ مقدار عددی هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید:

الف) $۳\tan ۱۳۰^\circ + \cot ۴۰^\circ - \tan ۲۳۰^\circ - ۵\tan ۳۱۰^\circ - ۲\cot ۱۴۰^\circ - ۴\tan ۵۰^\circ$

ب) $(۱ + \cos\frac{\pi}{۴})(۱ + \cos\frac{۳\pi}{۴})(۱ + \cos\frac{۵\pi}{۴})(۱ + \cos\frac{۷\pi}{۴})$

ج) $\frac{۳\tan^۲ ۲۴۰^\circ - \sqrt{۲}\cos ۲۲۵^\circ}{۷ - ۲\cos ۱۲۰^\circ . \tan^۲ ۶۰^\circ}$

۲۶ اگر $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$، $m > ۱$، $\sin\alpha = \frac{۱}{m - ۱}$ و $\cot\alpha = \sqrt{۳m}$ آن‌گاه:

الف) مقدار m را بیابید.

ب) مقدار عددی عبارت $۷\cos(\alpha - ۱۱\pi) + \sin(\frac{۷\pi}{۲} - \alpha)$ را بیابید.

۲۷ در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC = ۱)$، زاویه‌ی $\hat{A}$ برابر ۳۶° است. نیمساز زاویه‌ی $\hat{B}$ را رسم کرده و مقدار عددی $\sin ۱۸^\circ$ را به‌دست آورید.

۲۸ نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید:

الف) $y = \cos x + ۱$

ب) $y = \frac{۱}{۲}\sin x + ۱$

ج) $y = ۲\cos(x + \frac{\pi}{۴})$

د) $y = ۳\sin(x - \frac{\pi}{۳}) + ۱$

ه) $y = -۲\sin(\frac{۳}{۴}x + \frac{\pi}{۴}) - ۲$

۲۹ تابع مثلثاتیِ $f(x) = ۵\cos ۳x - ۴\tan ۴x + ۳\sin ۲x$ مفروض است. حاصل عبارتِ $۴f(\frac{\pi}{۳}) - ۲f(\frac{\pi}{۴})$ را بیابید.

۳۰ در تابع $f(x) = a\sin ۲x + b\cos x$ مقادیر a و b را چنان بیابید که تساوی‌های $f(۰) = ۲$ و $f(\frac{\pi}{۳}) = \frac{۲ + \sqrt{۳}}{۲}$ برقرار باشند.

۳۱ تابع $f(x) = ۴x^۲ + ۱$ مفروض است حاصل $f(\sin x) + f(\cos x)$ را بیابید.

۳۲ دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را مشخص کنید:

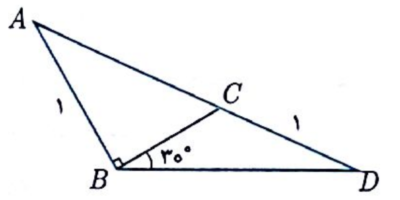
الف) $y = \frac{\sin ۲x}{\cos x - ۲}$

ب) $y = \sqrt{۱ + \sin x}$

ج) $y = \sqrt{۲\cos x - ۱} + \sqrt{x - x^۲}$

۳۳ دامنه‌ی تابع $y = \frac{۱}{x - \sin x}$ چه تعداد از اعداد حقیقی را در بر ندارد؟

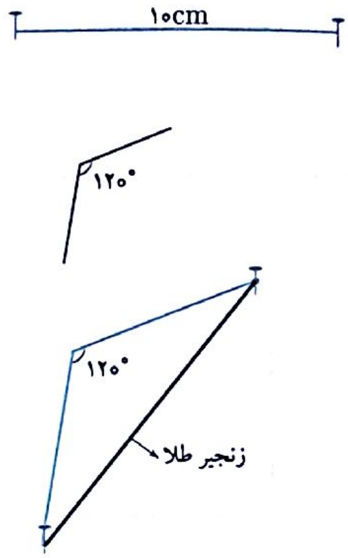
۳۴ قرار است در حاشیه‌ی یک زمین کشاورزی به شکل زیر هر یک متر یک درخت کاشته شود. اگر $AB = CD = ۱\text{km}$ و در نقطه‌ی A درختی کاشته شده باشد آن‌گاه بر روی AC چند تا درخت کاشته می‌شود؟



شکل ۵-۲۵

۳۵ به دانش‌آموزان یک کلاس نفری یک گوشه‌ی ۱۲۰° و یک نخ به طول ۱۰cm که در هر سر آن یک سوزن ته‌گرد بود، داده شد و قرار

شد هر یک از آن‌ها با استفاده از آن نخ و گوشه‌ی داده شده مثلثی بسازند و آن‌گاه به سازنده‌ی آن زنجیر طلایی! به اندازه‌ی فاصله‌ی دو سوزن ته‌گرد بدهند. کوچک‌ترین زنجیر طلای ممکن چه طولی می‌تواند داشته باشد.



شکل ۵-۲۶

۳۶ اگر بین اضلاع یک مثلث رابطه‌ی

$$c^۴ - ۲(a^۲ + b^۲)c^۲ + a^۴ + a^۲b^۲ + b^۴ = ۰$$

برقرار باشد زاویه‌ی $\angle C$ برابر است با:

الف) دقیقاً $۳۰°$ ب) دقیقاً $۶۰°$ ج) دقیقاً $۱۲۰°$

د) $۶۰°$ یا ه) ۳۱۴۰ یا $۱۲۰°$

•المپیاد ریاضی ایران در سال ۱۳۷۴•

۳۷ در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ میانه‌ی BM عمود بر نیمساز CD است در این صورت $\sin \hat{C}$ برابر با کدام‌یک از مقادیر زیر است؟

الف) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$ ج) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$

د) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$ ه) $\frac{۱}{۴}$

•المپیاد ریاضی ایران در سال ۱۳۷۵•

۳۸ دوربینی زیر یک هواپیما نصب شده است. هواپیما روی مسیری خطی در حال اوج‌گیری است. زمین را مسطح فرض کنید. مساحت فیلم‌برداری شده، تابع درجه چندی از جابه‌جاییِ مکانی هواپیما است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) چندجمله‌ای نیست

•المپیاد ریاضی ایران در سال ۱۳۸۴•

۳۹ در مثلث ABC، $\angle B = ۴۵°$ و $\angle C = ۳۰°$. نقاط P، D و E را به‌ترتیب روی اضلاع BC، AB و AC طوری انتخاب می‌کنیم که $PE \perp AC$ ، $PD \perp AB$ و $DE \| BC$. نسبت $\frac{PB}{PC}$ چند است؟

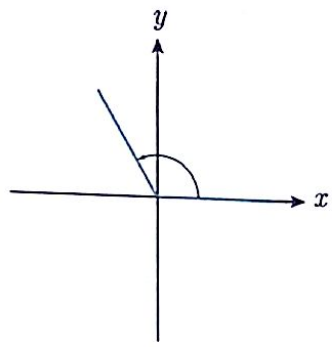
الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۳}{۴}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ د) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ه) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

•المپیاد ریاضی ایران در سال ۱۳۸۹•

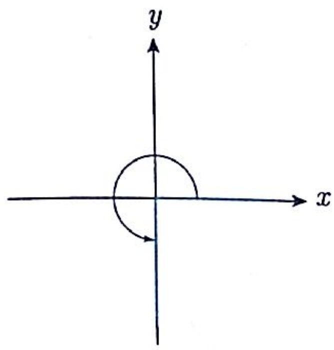
پاسخ مسائل نمونه فصل پنجم

۱

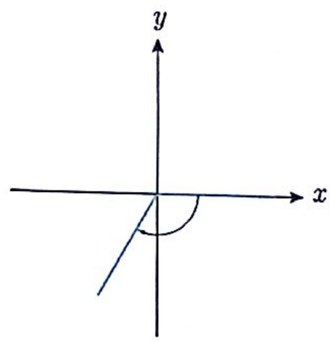
۱)



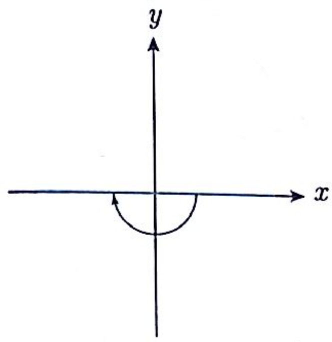
۲)



۳)



۴)



۲

الف) $۱۷۹۱^\circ = ۴ \times ۳۶۰^\circ + ۳۵۱^\circ \ , \ ۲۷۰^\circ < ۳۵۱^\circ < ۳۶۰^\circ$

پس انتهای آن زاویه در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.

ب) $۴۹۸۰^\circ = ۱۳ \times ۳۶۰^\circ + ۳۰۰^\circ \ , \ ۲۷۰^\circ < ۳۰۰^\circ < ۳۶۰^\circ$

پس انتهای آن زاویه در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.

ج) $-۷۸۴۵^\circ = -۲۲ \times ۳۶۰^\circ + ۷۵^\circ \ , \ ۰^\circ < ۷۵^\circ < ۹۰^\circ$

پس انتهای آن زاویه در ناحیه‌ی اول قرار دارد.

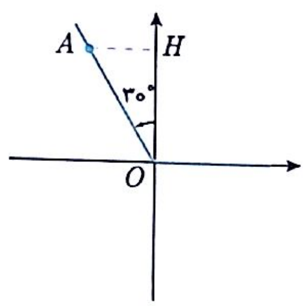
د) $-۸۱۹۰^\circ = -۲۳ \times ۳۶۰^\circ + ۹۰^\circ$

معلوم است که انتهای زاویه ۹۰° بر روی جهت مثبت محور yها قرار دارد.

۳

$$-۱۶۸۰^\circ = -۵ \times ۳۶۰^\circ + ۱۲۰^\circ$$

با توجه به تساوی نوشته شده معلوم می‌شود که مقصد زاویه‌ی -۱۶۸۰° همانند مقصد زاویه‌ی ۱۲۰° می‌باشد:



شکل ۵-۲۷

$$\angle O = ۳۰^\circ \Rightarrow AH = \frac{OA}{۲}$$

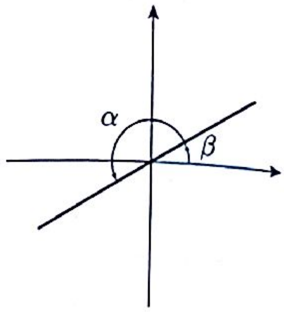
$$\alpha^۲ + \beta^۲ = ۱۶ \Rightarrow AH^۲ + OH^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow \frac{OA^۲}{۴} + \frac{۳}{۴}OA^۲ = ۱۶ \Rightarrow OA = ۴$$

$$\Rightarrow AH = ۲ \ , \ OH = ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow A = (\alpha, \beta) = (-۲, ۲\sqrt{۳})$$

۴



شکل ۵-۲۸

$$\begin{cases}\alpha = ۴۷(۱۸۰^\circ - \beta)\\ \alpha+\beta = ۷۰۸۰^\circ\end{cases} \Rightarrow ۴۷(۱۸۰^\circ - \beta)+\beta = ۷۰۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۴۶\beta = ۱۳۸۰^\circ \Rightarrow \beta = ۳۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۷۰۵۰^\circ$$

$$۷۰۵۰^\circ = ۱۹ \times ۳۶۰^\circ + ۲۱۰^\circ$$

۵

مسافت طی شده در ثانیه‌ی اول $= ۱۷^\circ$

مسافت طی شده در ثانیه‌ی دوم $= ۲ \times ۱۷^\circ$

مسافت طی شده در ثانیه‌ی سوم $= ۲^۲ \times ۱۷^\circ$

$\vdots$

مسافت طی شده در ثانیه‌ی دهم $= ۲^۹ \times ۱۷^\circ$

مسافت طی شده تا انتهای ثانیه‌ی دهم $= ۱۷^\circ + ۲\times ۱۷^\circ + ۲^۲ \times ۱۷^\circ + \cdots + ۲^۹ \times ۱۷^\circ$

$$= (۱+۲+۲^۲+\cdots+۲^۹)\times ۱۷^\circ$$

$$= ۱۰۲۳ \times ۱۷^\circ = ۱۷۳۹۱^\circ = ۴۸ \times ۳۶۰^\circ + ۱۱۱^\circ$$

چون $۹۰^\circ < ۱۱۱^\circ < ۱۸۰^\circ$ بنابراین موقعیت او در ناحیه‌ی دوم خواهد بود.

۶

الف) $\dfrac{D}{۱۸۰^\circ} = \dfrac{\frac{\pi}{۳}}{\pi} \Rightarrow D = \dfrac{۱۸۰^\circ}{۳} = ۶۰^\circ$

ب) $\dfrac{D}{۱۸۰^\circ} = \dfrac{\frac{۱۶\pi}{۹}}{\pi} \Rightarrow D = \dfrac{۱۸۰^\circ \times ۱۶}{۹} = ۳۲۰^\circ$

۷

الف) $۱۳۹۰\pi = ۶۹۵ \times (۲\pi) \Rightarrow$ انتهای زاویه در جهت مثبت محور xها قرار دارد.

ب) $\dfrac{-۴۷۱۱\pi}{۵} = -۹۴۲\pi + (-\dfrac{\pi}{۵}) = -۴۷۱ \times (۲\pi) + (-\dfrac{\pi}{۵})$

انتهای زاویه $(-\dfrac{\pi}{۵})$ رادیان در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.

ج) $۵۹\text{rad} = (\dfrac{۱۸۰ \times ۵۹}{\pi})^\circ \simeq ۳۳۸۰^\circ = ۹ \times ۳۶۰^\circ + ۱۴۰^\circ$

معلوم است که انتهای زاویه‌ی ۱۴۰° در ناحیه‌ی دوم قرار دارد.

۸ چون آن چرخ در مدت ۳۰۰ ثانیه ۷۵۰ دور می‌گردد. بنابراین در مدت ۱ ثانیه ۲/۵ دور خواهد چرخید. چون هر دور ۲π رادیان می‌باشد پس مقدار زاویه‌ی چرخش در مدت ۱ ثانیه ۲/۵ دور معادل ۵π رادیان خواهد شد.

۹

الف) به ازای تمامی kهای صحیح انتهای کمان داده شده بر نقطه‌ی $-\dfrac{\pi}{۳}$ می‌افتد که در ناحیه‌ی چهارم واقع است.

ب) به ازای kهای فرد انتهای کمان بر انتهای $\frac{۵\pi}{۴}$ و به ازای kهای زوج انتهای کمان بر انتهای $\frac{\pi}{۴}$ واقع است به این معنا که به ازای kهای فرد انتهای کمان‌های داده شده در وسط ناحیه‌ی سوم و به ازای kهای زوج انتهای کمان‌های داده شده در وسط کمان ناحیه‌ی اول خواهد بود.

ج) اگر k به شکل $۶L$ باشد آن‌گاه انتهای کمان بر انتهای کمان $\frac{\pi}{۲}$ منطبق می‌شود.

اگر k به شکل $۶L + ۱$ باشد آن‌گاه انتهای کمان بر انتهای کمان $\frac{۵\pi}{۶}$ منطبق می‌شود.

اگر k به شکل $۶L + ۲$ باشد آن‌گاه انتهای کمان بر انتهای کمان $\frac{۷\pi}{۶}$ منطبق می‌شود.

اگر k به شکل $۶L + ۳$ باشد آن‌گاه انتهای کمان بر انتهای کمان $\frac{۳\pi}{۲}$ منطبق می‌شود.

اگر k به شکل $۶L + ۴$ باشد آن‌گاه انتهای کمان بر انتهای کمان $\frac{۱۱\pi}{۶}$ منطبق می‌شود.

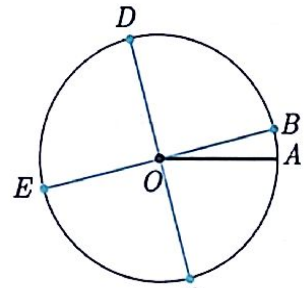
اگر k به شکل $۶L + ۵$ باشد آن‌گاه انتهای کمان بر انتهای کمان $\frac{\pi}{۶}$ منطبق می‌شود.

د) همانند قسمت ج مقدار k را تقسیم‌بندی کرده و مسأله را حل کنید.

۱۰ محیط آن دو چرخ به‌ترتیب ۴ و ۹ متر به‌دست می‌آید. ۱۸۲۴ متر در تقسیم بر هر یک از آن دو محیط به‌ترتیب ۴۵۶ و $۲۰۲\frac{۲}{۳}$ به‌دست می‌آید به این معنا که چرخ کوچک $۲\pi \times ۴۵۶$ یعنی ۹۱۲π رادیان و چرخ بزرگ $(۴۰۴\pi + \frac{۴\pi}{۳})$ رادیان چرخیده‌اند.

۱۱ با توجه به ساده شده‌ی مقدار زوایای داده شده هر یک از آن نقاط بر روی شکل ۵-۲۹ نشان داده شده‌اند. چون هر یک از زوایای $\angle BOC$، $\angle COE$، $\angle EOD$ و $\angle DOB$ برابر ۹۰° به‌دست می‌آیند مربع بودن آن چهارضلعی تأیید می‌شود.

$$\angle BOA = ۳۹۷۵^\circ = ۱۱ \times ۳۶۰^\circ + ۱۵^\circ$$
$$\angle COA = -۲۵۹۵^\circ = -۸ \times ۳۶۰^\circ + ۲۸۵^\circ$$
$$\angle EOA = \frac{۱۳۳\pi}{۱۲}\text{rad} = ۵ \times (۲\pi) + \pi + \frac{\pi}{۱۲}$$
$$\angle DOA = \frac{۱۷۵\pi}{۱۲}\text{rad} = ۷ \times (۲\pi) + \frac{۷\pi}{۱۲}$$

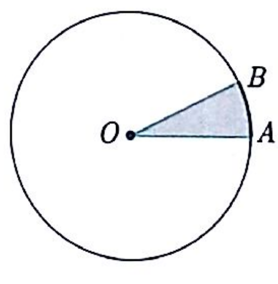


شکل ۵-۲۹

۱۲

الف) $S_{AOB} = \frac{\frac{\pi}{۶}}{۲\pi}.S_{\text{دایره}} = \frac{۱}{۱۲}S_{\text{دایره}} = \frac{۱}{۱۲}(\pi.r^۲) = ۳\pi$

ب) $\widehat{AB} = \frac{\frac{\pi}{۶}}{۲\pi}.(\text{محیط دایره}) = \frac{۱}{۱۲}(\text{محیط دایره}) = \frac{۱}{۱۲} \times (۲\pi \times ۶) = \pi$



شکل ۵-۳۰

۱۳

الف) $A = \cos(\frac{۱۳\pi}{۶}) = \cos(۲\pi + \frac{\pi}{۶}) = \cos(\frac{\pi}{۶}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ب) $B = \sin(\frac{۲\pi}{۳}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin(\frac{\pi}{۳}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ج)
$$C=\tan(\frac{۷\pi}{۶})=\tan(\pi+\frac{\pi}{۶})=\tan(\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

د)
$$D=\cot(\frac{-۵\pi}{۶})=\cot(-\pi+\frac{\pi}{۶})=\cot(\frac{\pi}{۶})=\sqrt{۳}$$

۱۴

الف)

$$\begin{aligned}\text{سمت چپ تساوی} &= ۳\tan ۱۳۰^\circ - ۲\cot ۱۴۰^\circ - \tan ۲۳۰^\circ - ۵\tan ۳۱۰^\circ\\ &\quad + \cot ۴۰^\circ - ۴\tan ۵۰^\circ\\ &= ۳\tan(۱۸۰^\circ - ۵۰^\circ) - ۲\cot(۹۰^\circ + ۵۰^\circ) - \tan(۱۸۰^\circ + ۵۰^\circ)\\ &\quad - ۵\tan(۳۶۰^\circ - ۵۰^\circ) + \cot(۹۰^\circ - ۵۰^\circ) - ۴\tan ۵۰^\circ\\ &= -۳\tan(۵۰^\circ) + ۲\tan ۵۰^\circ - \tan ۵۰^\circ\\ &\quad + ۵\tan ۵۰^\circ + \tan ۵۰^\circ - ۴\tan ۵۰^\circ\\ &= ۰ = \text{سمت راست تساوی}\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}\text{سمت چپ تساوی} &= \frac{۱}{\sin(۲۷۰^\circ - x)} + \frac{\sin(۹۰۰^\circ - x)}{\sin(۶۳۰^\circ - x)}\tan(۲۷۰^\circ + x)\\ &= \frac{۱}{-\cos x} + \frac{\sin x}{-\cos x}(-\cot x)\\ &= \frac{-۱}{\cos x} + \frac{-\sin x}{\cos x}\frac{-\cos x}{\sin x}\\ &= \frac{-۱}{\cos x} + ۱ = \text{سمت راست تساوی}\end{aligned}$$

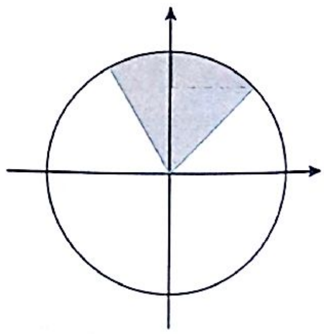
۱۵

$$\begin{aligned}\cos(x-۵\pi) &= \cos[-(۵\pi - x)] = \cos(۵\pi - x)\\ &= \cos(\pi - x) = -\cos x = \frac{-۳}{۵}\end{aligned}$$

۱۶ نابرابری نتیجه گرفته شده نادرست است چرا که در بازه‌ی $[۴۵^\circ, ۱۲۰^\circ]$ زاویه‌ی ۹۰° نیز وجود دارد که سینوسش ۱ است در حالی که در بازه‌ی $\sin ۴۵^\circ$ تا $\sin ۱۲۰^\circ$ یعنی $[\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲}]$ عدد ۱ وجود ندارد.

با توجه به ناحیه‌ی هاشور خورده در شکل ۵-۳۱ مشخص است که اگر x زاویه‌ای متغیر در بازه‌ی $[۴۵^\circ, ۱۲۰^\circ]$ باشد آن‌گاه سینوسش متغیری در بازه‌ی $[\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۱]$ خواهد شد پس:

$$۴۵^\circ \le x \le ۱۲۰^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} \le \sin x \le ۱$$



شکل ۵-۳۱

۱۷

$$۷/۵^\circ < x < ۵۲/۵^\circ \Rightarrow ۳۰^\circ < ۴x < ۲۱۰^\circ$$

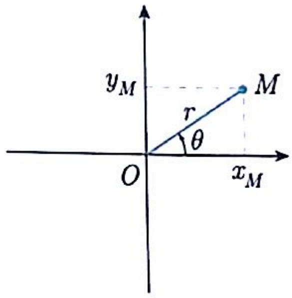
$$\Rightarrow ۳۰^\circ - ۶۰^\circ < ۴x - ۶۰^\circ < ۲۱۰^\circ - ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow -۳۰^\circ < ۴x - ۶۰^\circ < ۱۵۰^\circ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} < \sin(۴x - ۶۰^\circ) \leq ۱$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲} < \frac{۳m + ۲}{m - ۱} \leq ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{۷m + ۳}{۲(m - ۱)} > ۰ \Rightarrow m \in (-\infty, -\frac{۳}{۷}) \cup (۱, +\infty) \\ \dfrac{۲m + ۳}{m - ۱} \leq ۰ \Rightarrow m \in [-\frac{۳}{۲}, ۱) \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \in [-\frac{۳}{۲}, -\frac{۳}{۷})$$



شکل ۵-۳۲

۱۸ اگر نقطه‌ی M در صفحه‌ی مختصات دکارتی با مختصات (x_M, y_M) چنان باشد که $|OM| = r$ آن‌گاه با توجه به شکل ۵-۳۲ معلوم است که:

$$\sin\theta = \frac{y_M}{r} \quad ، \quad \cos\theta = \frac{x_M}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y_M}{x_M} \quad ، \quad \cot\theta = \frac{x_M}{y_M}$$

بنابراین:

الف)

$$r = \sqrt{۰^۲ + ۳^۲} = ۳ \Rightarrow \begin{array}{ll} \sin\alpha = \frac{۳}{۳} = ۱ & , \quad \cos\alpha = \frac{۰}{۳} = ۰ \\ \tan\alpha = \frac{۳}{۰} = \text{تعریف نشده} & , \quad \cot\alpha = \frac{۰}{۳} = ۰ \end{array}$$

ب)

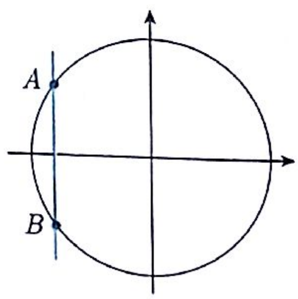
$$r = \sqrt{\sqrt{۲}^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۳} \Rightarrow \begin{array}{ll} \sin\alpha = \frac{-۱}{\sqrt{۳}} = \frac{-\sqrt{۳}}{۳} & , \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۶}}{۳} \\ \tan\alpha = \frac{-۱}{\sqrt{۲}} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} & , \quad \cot\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{-۱} = -\sqrt{۲} \end{array}$$

ج)

$$r = \sqrt{(-۴)^۲ + ۳^۲} = ۵ \Rightarrow \begin{array}{ll} \sin\alpha = \frac{۳}{۵} & , \quad \cos\alpha = \frac{-۴}{۵} \\ \tan\alpha = \frac{۳}{-۴} = \frac{-۳}{۴} & , \quad \cot\alpha = \frac{-۴}{۳} \end{array}$$

د)

$$r = \sqrt{(\sqrt{۲})^۲ + (\sqrt{۲})^۲} = ۲ \Rightarrow \begin{array}{ll} \sin\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۲} & , \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \tan\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۱ & , \quad \cot\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۱ \end{array}$$



شکل ۵-۳۳

۱۹ مقدار $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را بر روی محور کسینوس‌ها جدا کرده و از آن نقطه خطی به موازات محور yها رسم می‌کنیم تا دایره را در دو نقطه قطع کند. نقاط به‌دست آمده انتهای کمان‌ها $\frac{۵\pi}{۶}$ و $\frac{۷\pi}{۶}$ می‌باشند. معلوم است که هر زاویه‌ای به‌صورت $۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$ و یا $۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶}$ جواب مسأله است.

۲۰

$$-\frac{\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹} \Rightarrow \frac{-\pi}{۳} < ۳x < \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \cos ۳x \leq ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{۲m-۳}{m-۲} \leq ۱ \Rightarrow \frac{m-۱}{m-۲} \leq ۰ \ , \ \frac{۳m-۴}{۲(m-۲)} > ۰$$

$$\Rightarrow m \in [۱, \frac{۴}{۳})$$

۲۱

$$۷\text{rad} \simeq ۴۰۱^\circ \ \Rightarrow \ \sin(۷\text{rad}) \simeq \sin(۴۰۱^\circ) = \sin ۴۱^\circ$$

$$۱۴\text{rad} \simeq ۸۰۲^\circ \ \Rightarrow \ \sin(۱۴\text{rad}) \simeq \sin(۸۰۲^\circ) = \sin ۸۲^\circ$$

$$۲۱\text{rad} \simeq ۱۲۰۳^\circ \ \Rightarrow \ \sin(۲۱\text{rad}) \simeq \sin(۱۲۰۳^\circ) = \sin(۱۲۳)^\circ = \sin ۵۷^\circ$$

$$۲۸\text{rad} \simeq ۱۶۰۴^\circ \ \Rightarrow \ \sin(۲۸\text{rad}) \simeq \sin(۱۶۰۴^\circ) = \sin(۱۶۴^\circ) = \sin ۱۶^\circ$$

معلوم است که در ناحیه‌ی اول هر چه زاویه بزرگ‌تر شود سینوسش نیز بزرگ‌تر می‌شود یعنی نابرابری $\sin ۱۶^\circ < \sin ۴۱^\circ < \sin ۵۷^\circ < \sin ۸۲^\circ$ و در نتیجه نابرابریِ $\sin ۲۸ < \sin ۷ < \sin ۲۱ < \sin ۱۴$ برقرار است.

۲۲

الف)

$$\sin ۵۴۳۰^\circ = \sin(۱۵ \times ۳۶۰^\circ + ۳۰^\circ) = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۵۴۳۰^\circ = \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۵۴۳۰^\circ = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot ۵۴۳۰^\circ = \cot ۳۰^\circ = \sqrt{۳}$$

ب)

$$-۴۲۳۰^\circ = -۱۲ \times ۳۶۰^\circ + ۹۰^\circ$$

$$\sin(-۴۲۳۰^\circ) = \sin ۹۰^\circ = ۱$$

$$\cos(-۴۲۳۰^\circ) = \cos(۹۰^\circ) = ۰$$

$$\tan(-۴۲۳۰^\circ) = \tan(۹۰^\circ)$$

= تعریف نشده

$$\cot(-۴۲۳۰^\circ) = \cot(۹۰^\circ) = ۰$$

ج)

$$\frac{۸۵\pi}{۶} = ۷ \times ۲\pi + \frac{\pi}{۶}$$

$$\sin \frac{۸۵\pi}{۶} = \sin \frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos \frac{۸۵\pi}{۶} = \cos \frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan \frac{۸۵\pi}{۶} = \tan \frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot \frac{۸۵\pi}{۶} = \cot \frac{\pi}{۶} = \sqrt{۳}$$

د)

$$-\frac{۱۱۹\pi}{۳} = -۲۰ \times ۲\pi + \frac{\pi}{۳}$$

$$\sin(\frac{-۱۱۹\pi}{۳}) = \sin(\frac{\pi}{۳}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(\frac{-۱۱۹\pi}{۳}) = \cos(\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan(\frac{-۱۱۹\pi}{۳}) = \tan(\frac{\pi}{۳}) = \sqrt{۳}$$

$$\cot(\frac{-۱۱۹\pi}{۳}) = \cot(\frac{\pi}{۳}) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۲۳

$$A = \frac{۵ \sin ۳۷۵^\circ + ۲ \sin ۱۰۵^\circ}{\cos ۱۶۵^\circ - ۲ \cos ۲۵۵^\circ}$$

$$= \frac{۵ \sin(۳۶۰^\circ + ۱۵^\circ) + ۲ \sin(۹۰^\circ + ۱۵^\circ)}{\cos(۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ) - ۲\cos(۱۸۰^\circ + ۷۵^\circ)} = \frac{۵ \sin ۱۵^\circ + ۲ \cos ۱۵^\circ}{-\cos ۱۵^\circ + ۲ \cos ۷۵^\circ}$$

$$= \frac{۵ \cos ۷۵^\circ + ۲ \sin ۷۵^\circ}{-\sin ۷۵^\circ + ۲ \cos ۷۵^\circ} = \frac{۵ + ۲ \tan ۷۵^\circ}{۲ - \tan ۷۵^\circ}$$

$$= \frac{۵ + ۲(۲ + \sqrt{۳})}{۲ - (۲ + \sqrt{۳})} = \frac{۹ + ۲\sqrt{۳}}{-\sqrt{۳}} = -۲ - ۳\sqrt{۳}$$

۲۴ ابتدا مقادیر سینوس، تانژانت و کتانژانت α را به‌دست می‌آوریم:

الف) $\sin\alpha = -\sqrt{۱-\cos^۲\alpha} = -\frac{۴}{۵} \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{۴}{۳}\ ,\ \cot\alpha = -\frac{۳}{۴}$

$\sin(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha) = \sin(۷\times\frac{\pi}{۲}-\alpha) = -\cos\alpha = -\frac{۳}{۵}$

ب) $\cos(۵۱\pi+\alpha) = \cos(۱۰۲\times\frac{\pi}{۲}+\alpha) = -\cos\alpha = -\frac{۳}{۵}$

ج) $\tan(۳\pi-\alpha) = -\tan\alpha = \frac{۴}{۳}$

د) $\cot(۸\pi-\alpha) = -\cot\alpha = \frac{۳}{۴}$

۲۵

الف)

$$\begin{aligned}
&۳\tan ۱۳۰^\circ + \cot ۴۰^\circ - \tan ۲۳۰^\circ - ۵\tan ۳۱۰^\circ - ۲\cot ۱۴۰^\circ - ۴\tan ۵۰^\circ\\
&= ۳\tan(۱۸۰^\circ - ۵۰^\circ) + \cot(۹۰^\circ - ۵۰^\circ) - \tan(۱۸۰^\circ + ۵۰^\circ)\\
&\quad - ۵\tan(۳۶۰^\circ - ۵۰^\circ) - ۲\cot(۹۰^\circ + ۵۰^\circ) - ۴\tan ۵۰^\circ)\\
&= -۳\tan ۵۰^\circ + \tan ۵۰^\circ - \tan ۵۰^\circ + ۵\tan ۵۰^\circ + ۲\tan ۵۰^\circ - ۴\tan ۵۰^\circ\\
&= ۸\tan ۵۰^\circ - ۸\tan ۵۰^\circ = ۰
\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}
&(۱+\cos\frac{\pi}{۴})(۱+\cos\frac{۳\pi}{۴})(۱+\cos\frac{۵\pi}{۴})(۱+\cos\frac{۷\pi}{۴})\\
&= (۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲})(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = (۱-\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴}
\end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned}
\frac{۳\tan^۲ ۲۴۰^\circ - \sqrt{۲}\cos ۲۲۵^\circ}{۷ - ۲\cos ۱۲۰^\circ . \tan^۲ ۶۰^\circ} &= \frac{۳\tan^۲ ۶۰^\circ + \sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ}{۷ + ۲\cos ۶۰^\circ . \tan^۲ ۶۰^\circ}\\
&= \frac{۳(\sqrt{۳})^۲ + \sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{۷ + ۲(\frac{۱}{۲}).(\sqrt{۳})^۲} = \frac{۹+۱}{۷+۳} = ۱
\end{aligned}$$

۲۶

الف)

$$۱+\cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha} \Rightarrow ۱+۳m = (m-۱)^۲$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۵m = ۰ \Rightarrow m = ۰ \text{ یا } m = ۵$$

چون $m > ۱$ بنابراین جواب $m = ۵$ قابل‌قبول است.

ب)

$$\begin{aligned}
۷\cos(\alpha - ۱۱\pi) + \sin(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha) &= ۷\cos(۱۱\pi-\alpha) + \sin(۷\times\frac{\pi}{۲}-\alpha)\\
&= -۷\cos\alpha - \cos\alpha\\
&= -۸\cos\alpha = -۸\sqrt{۱-\frac{۱}{۱۶}} = -۲\sqrt{۱۵}
\end{aligned}$$

۲۷

$$x+y=۱ \qquad (۱)$$

$$BD = \text{نیمساز} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{BC}{AB} \Rightarrow x=y.BC$$

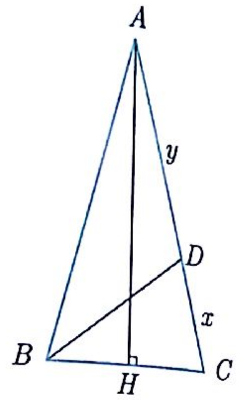
$$\angle A=\angle B_۱=\angle B_۲=۳۶^\circ \Rightarrow AD=BD=BC$$

$$\Rightarrow x=y^۲ \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow y^۲+y-۱=۰$$

$$\Rightarrow y=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} \Rightarrow HC=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$$

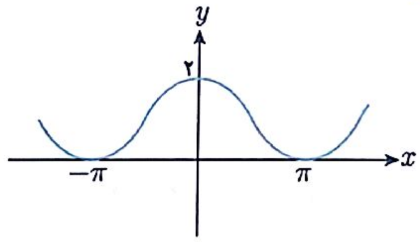
$$\sin ۱۸^\circ=\frac{HC}{AC} \Rightarrow \sin ۱۸^\circ=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$$



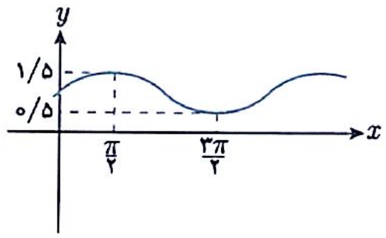
شکل ۵-۳۴

۲۸

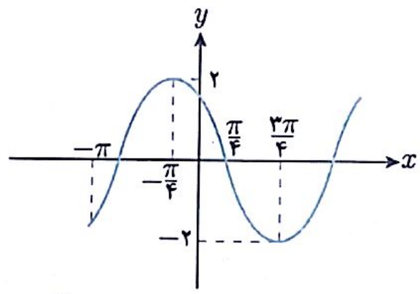
الف)



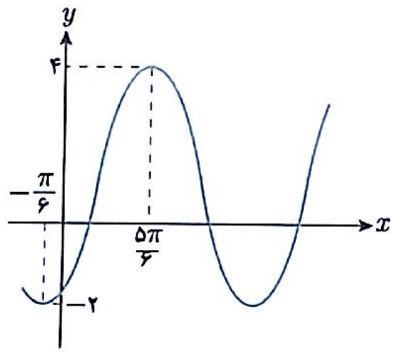
ب)



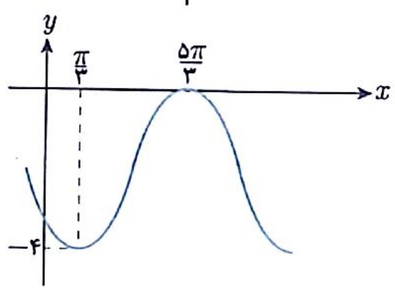
ج)



د)



ه)



۲۹

$$f(\frac{\pi}{۳})=۵\cos ۳(\frac{\pi}{۳})-۴\tan ۴(\frac{\pi}{۳})+۳\sin ۲(\frac{\pi}{۳})$$

$$=۵\cos(\pi)-۴\tan(\frac{۴\pi}{۳})+۳\sin(\frac{۲\pi}{۳})$$

$$=۵(-۱)-۴(\sqrt{۳})+۳(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-۵-\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$

$$f(\frac{\pi}{۴})=۵\cos ۳(\frac{\pi}{۴})-۴\tan ۴(\frac{\pi}{۴})+۳\sin ۲(\frac{\pi}{۴})$$

$$=۵\cos(\frac{۳\pi}{۴})-۴\tan(\pi)+۳\sin(\frac{\pi}{۲})$$

$$= -۵ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۴ \times ۰ + ۳ \times ۱ = ۳ - \frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴f(\frac{\pi}{۳}) - ۲f(\frac{\pi}{۴})$$

$$= -۲۰ - ۱۰\sqrt{۳} - ۶ + ۵\sqrt{۲} = -۲۶ - ۱۰\sqrt{۳} + ۵\sqrt{۲}$$

۳۰

$$f(۰) = ۲ \Rightarrow \ a\sin(۰) + b\cos(۰) = ۲$$

$$\Rightarrow \ a.(۰) + b(۱) = ۲ \ \Rightarrow \ b = ۲$$

$$f(\frac{\pi}{۳}) = \frac{۲ + \sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow a.\sin(\frac{۲\pi}{۳}) + b.\cos(\frac{\pi}{۳}) = \frac{۲ + \sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \ a.(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + ۲ \times (\frac{۱}{۲}) = \frac{۲ + \sqrt{۳}}{۲} \ \Rightarrow \ a = ۱$$

۳۱

$$f(\sin x) + f(\cos x) = [۴(\sin x)^۲ + ۱] + [۴(\cos x)^۲ + ۱]$$

$$= ۴(\sin^۲ x + \cos^۲ x) + ۲ = ۴(۱) + ۲ = ۶$$

۳۲

الف) $\cos x - ۲ \neq ۰ \ \Rightarrow \ \cos x \neq ۲$

معلوم است که هرگز کسینوس زاویه‌ای ۲ نمی‌شود به این معنا که دامنه‌ی آن تابع $\mathbb{R}$ می‌باشد.

ب) $۱ + \sin x \geq ۰ \ \Rightarrow \ \sin x \geq -۱$

نابرابری به‌دست آمده همیشه برقرار است زیرا سینوس هر زاویه همیشه متغیری است در بازه‌ی $[-۱, ۱]$، بنابراین دامنه‌ی آن تابع نیز $\mathbb{R}$ می‌باشد.

ج)

$$۲\cos x - ۱ \geq ۰ \ \Rightarrow \ \cos x \geq \frac{۱}{۲} \qquad (۱)$$

$$x - x^۲ \geq ۰ \ \Rightarrow \ x \in [۰, ۱] \qquad (۲)$$

قسمتی از بازه‌ی (۲) را چنان می‌یابیم که شرط (۱) را نیز برآورده کند. می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$ و چون $۱ < \frac{\pi}{۳}$ بنابراین تمام مقادیر موجود در بازه‌ی (۲) هر دو شرط (۱) و (۲) را برآورده ساخته و دامنه‌ی تابع $[۰, ۱]$ می‌شود.

۳۳

$$x - \sin x \neq ۰ \ \Rightarrow \ x \neq \sin x$$

اگر نمودارهای دو تابع $y = x$ و $y = \sin x$ را رسم کنید آن دو منحنی یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند به این معنا که یک نقطه در دامنه‌ی تابع داده شده قرار نداشته و مابقی نقاط اعداد حقیقی می‌توانند در دامنه‌ی آن تابع واقع باشند.

۳۴

$$\overset{\triangle}{BCD}: \frac{1}{\sin 300} = \frac{BC}{\sin \hat{D}} \Rightarrow 2 = \frac{BC}{\sin(60^\circ - A)}$$

$$\Rightarrow 2(\sin 60^\circ . \cos \hat{A} - \cos 60^\circ . \sin \hat{A}) = BC$$

$$\Rightarrow 2(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{AC} - \frac{1}{2} \times \frac{BC}{AC}) = BC$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} - BC = AC.BC$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = BC(1 + AC) \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{AC^2 - 1}(1 + AC)$$

$$\Rightarrow 3 = (AC^2 - 1)(1 + AC)^2 \Rightarrow AC^4 + 2AC^3 - 2AC - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (AC + 2)(AC^3 - 2) = 0 \Rightarrow AC = \sqrt[3]{2}$$

$$\simeq 1{,}259\text{km} = 1259{,}92\text{m}$$

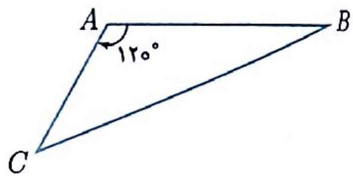
و در نتیجه در روی ضلع AC با احتساب درخت واقع بررأس A به تعداد ۱۲۶۰ درخت کاشته می‌شود.

۳۵ مثلث ساخته شده را مطابق شکل ۵-۳۵، ABC می‌نامیم و با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها خواهیم داشت:

$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos \hat{A}$$

$$= b^2 + c^2 - 2b.c.(-\frac{1}{2}) = b^2 + c^2 + bc = (b+c)^2 - bc$$

$$= 100 - bc$$



شکل ۵-۳۵

با توجه به نابرابریِ $b + c \geq 2\sqrt{bc}$ داریم:

$$10 \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow \sqrt{bc} \leq 5 \Rightarrow bc \leq 25$$

$$\Rightarrow BC^2 = 100 - bc \geq 100 - 25 = 75$$

$$\Rightarrow BC \geq 5\sqrt{3}\text{cm}$$

پس کوچک‌ترین طول زنجیر $5\sqrt{3}$ خواهد بود.

۳۶

$$c^4 - 2(a^2 + b^2).c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$$

$$\Rightarrow c^4 - 2(a^2 + b^2).c^2 + (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Rightarrow (c^2 - (a^2 + b^2))^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Rightarrow (c^2 - a^2 - b^2 - ab)(c^2 - a^2 - b^2 + ab) = 0$$

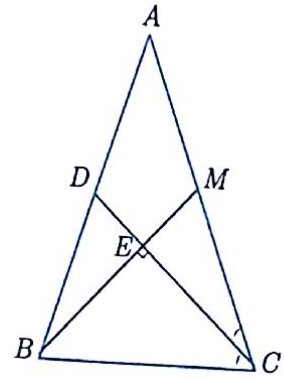
$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + ab \text{ یا } c^2 = a^2 + b^2 - ab$$

با مقایسه‌ی رابطه‌های به‌دست آمده با قضیه‌ی کسینوس‌ها خواهیم داشت:

$$\cos \hat{C} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle C = 60^\circ \text{ یا } \cos \hat{C} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle C = 120^\circ$$

۳۷ در مثلث BMC نیمساز زاویه‌ی $\hat{C}$ بر قاعده‌ی BM نیز عمود شده است پس آن مثلث در رأس C متساوی‌الساقین بوده و خواهیم داشت:

$$AB^{۲} = AC^{۲} + BC^{۲} - ۲AC.BC.\cos\hat{C}$$
$$\Rightarrow ۴a^{۲} = ۴a^{۲} + a^{۲} - ۲(۲a).(a).\cos\hat{C}$$
$$\Rightarrow \cos\hat{C} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin\hat{C} = \sqrt{۱ - \frac{۱}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$$

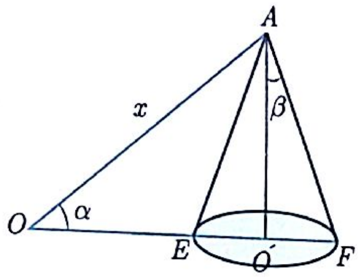


شکل ۵-۳۶

۳۸ هواپیما از نقطه‌ی O در راستای OA در حال حرکت و اوج‌گیری است. معلوم است که x یعنی OA، $O'A$، AF و $O'F$ یعنی r متغیر بوده ولی زوایای α و β همیشه ثابت هستند. داریم:

$$S = \pi r^{۲}\ ,\ \tan\beta = \frac{r}{AO'}\ ,\ \sin\alpha = \frac{AO'}{OA}$$
$$\Rightarrow\ S = \pi.(AO')^{۲}.(\tan\beta)^{۲} = \pi.(OA.\sin\alpha)^{۲}.(\tan\beta)^{۲}$$
$$= (\pi.\sin^{۲}\alpha.\tan^{۲}\beta).x^{۲}$$

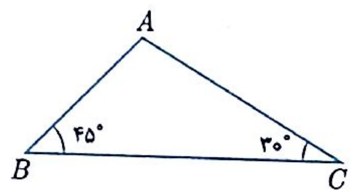
یعنی S تابعی درجه ۲ از x می‌باشد.



شکل ۵-۳۷

۳۹ با توجه به قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

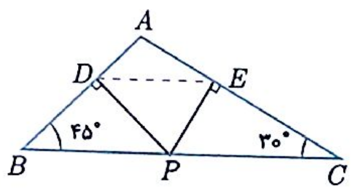
$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{B}} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$



شکل ۵-۳۸

حال در مثلث اصلی داریم:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\sqrt{۲}BD}{۲PE} = \frac{\sqrt{۲}BD}{۲\frac{EC}{\sqrt{۳}}} = \frac{\sqrt{۶}}{۲}.\frac{BD}{CE}$$
$$= \frac{\sqrt{۶}}{۲}.\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{۶}}{۲}.\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$



شکل ۵-۳۹


امام صادق(ع):
از ما نیست کسی
که دنیای خود را
به خاطر آخرتش
و یا آخرت خود را
به خاطر دنیایش،
رها کند.
الفقیه,۳,۱۵۶,۳۵۶۸