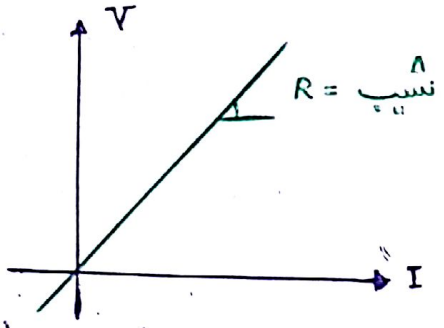
مدارهای مقاومتی و روش تحلیل آن ها

مقدمه :

در این فصل عناصر مداری را شناخته و به روش های تحلیل مدارهای مقاومتی می پردازیم . این فصل مبنای تمام چیزهایی است که در فصول بعدی بیان خواهد شد . پس باید به خوبی به این فصل توجه شود

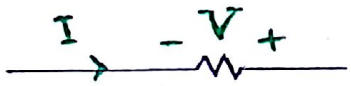
۱-۱ مشخصه ولتاژ - جریان :



شکل (۱-۱) مشخصه ولتاژ-جریان در یک مقاومت خطی

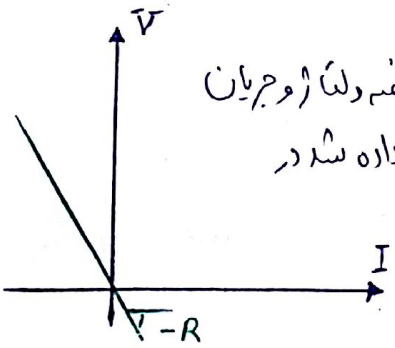
یعنی رابطه ای را که بین ولتاژ و جریان یک مدار وجود دارد در یک شکل مشخص می کنیم . مثلاً در یک مقاومت خطی این مشخصه به صورت روبه رو می باشد :

البته در شکل روبرو جهت های ولتاژ و جریان مشخص نشده است . یکی از مهم ترین چیزهایی که باید در درس مدار به آن توجه داشته باشید ، جهت های ولتاژ و جریان است . مثلاً اگر polarity ی ولتاژ و جریان را به صورت زیر فرض کنیم :



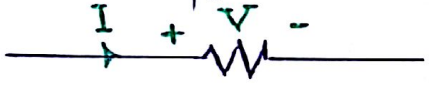
شکل (۱-۲) جهت یک مقاومت خطی با polarity ولتاژ و جریان مشخص شده

آن گاه مشخصه ولتاژ-جریان آن به صورت شکل (۱-۳) می شود :



شکل (۱-۳) مشخصه ولتاژ و جریان در مقاومت نشان داده شده در شکل (۱-۲)

پس برای شکل (۱-۱) داریم :



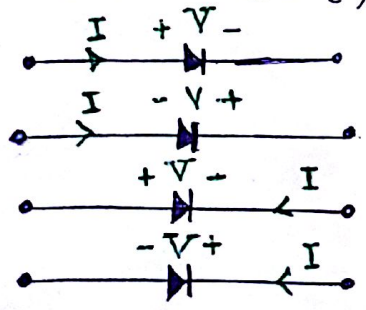
شکل (۱-۴) مقاومت خطی با polarity ولتاژ و جهت جریان استاندارد

۱-۱-۱ عناصر مداری

حال مشخصه جریان و ولتاژ چند عنصر را بررسی می کنیم .

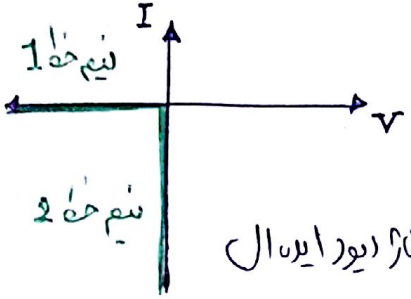
الف) دیود ایده آل : می دانیم در دیود ایده ال هرگاه ولتاژ آند از کاتد بیشتر باشد دیود در حکم اتصال کوتاه یا همان S.C. است ، یعنی $V=0$ و هرگاه ولتاژ کاتد از آند بیشتر باشد ، دیود نقش مدار باز یا همان O.C. را ایفا می کند .

به عبارت دیگر $I=0$ حال با توجه به این عبارات بسیار ساده و توجه به جهت های ولتاژ و جریان برای هر دیود می توان مشخصه ی ولتاژ و جریان رسم نمود

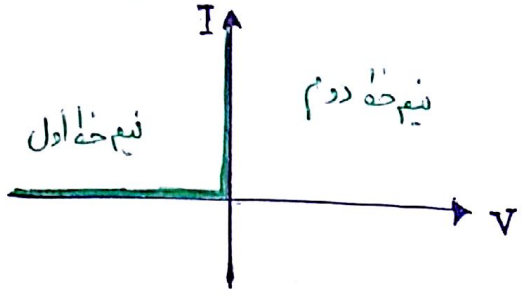


الف)
ب)
ج)
د)

۱- برای دیودهای الف تا د مشخصه ی جریان و ولتاژ را رسم کنید :



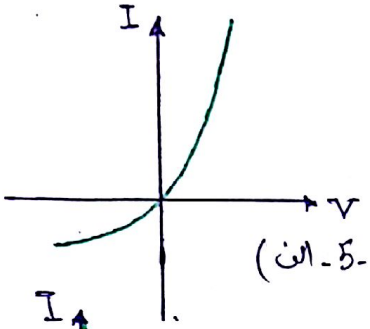
در شکل الف، هنگامی که V مثبت است دیود قطع است یعنی $I = 0$
(نیم خط 1) هنگامی که دیود وصل شود، یعنی $V = 0$ نیم خط 2 را
داریم. البته شکل (1-6) اشکال دارد. شکل (1-6) مشخصه جریان و ولتاژ دیود ایده‌آل



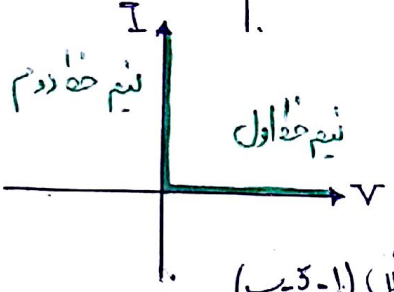
و آن این است که مقدار جریان در نیم خط دوم
منفی است حال که در واقعیت باید مقدار جریان
مثبت باشد از این رو باید این شکل اصلاح شود
شکل (1-7) پاسخ درست خواهد بود.

شکل (1-7) مشخصه صحیح جریان - ولتاژ دیود ایده‌آل شکل (1-5 الف) پاسخ درست

از طرفی با کمی دقت می‌توان تقریب دقیق‌تری
دیود واقعی به صورت شکل (1-8) در نظر گرفت.

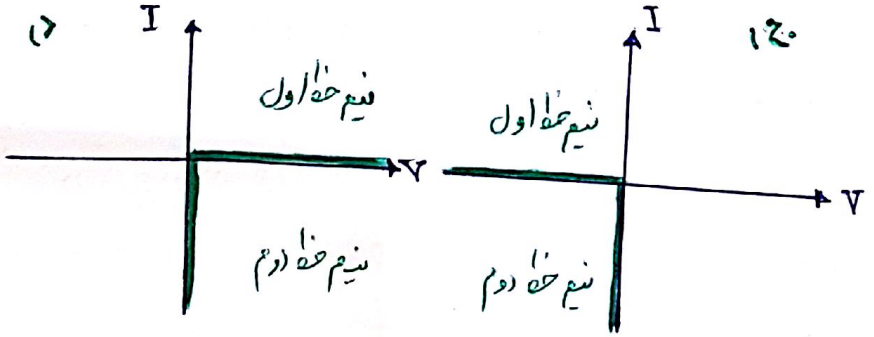


شکل (1-8) مشخصه جریان - ولتاژ دیود واقعی (شکل 1-5-الف)



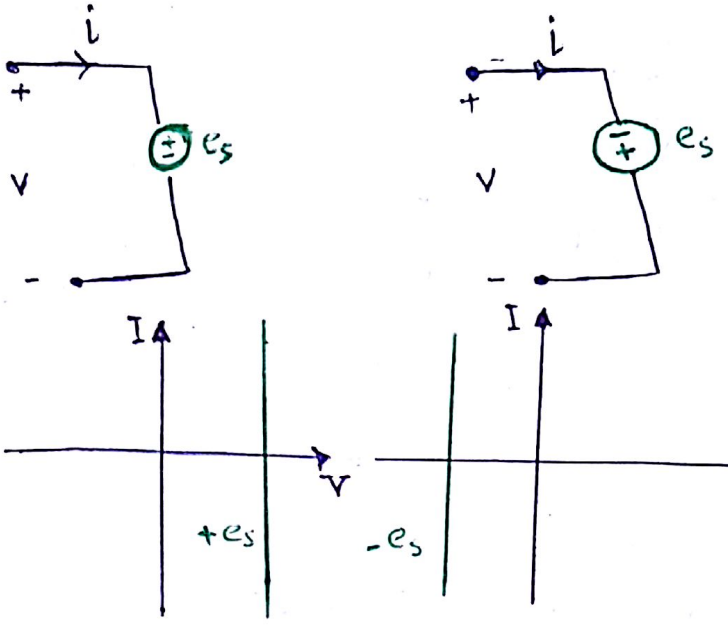
و اما ادامه‌ی پاسخ تمرین 1
در شکل (1-5-ب) وقتی دیود قطع است که $V > 0$ یعنی نیم خط 1
وقتی دیود وصل است که $V = 0$ باشد، یعنی بر نیم خط 2 منطبق
باشد. شکل (1-9) مشخصه جریان - ولتاژ دیود ایده‌آل شکل (1-5-ب)

نتیجه‌گیری: ابتدا حالت قطع را بررسی کرده حالتی که آند V کاتد V در اینجا $I=0$ است و نیم خط مربوط مشخص می‌شود و سپس حالت وصل که $V=0$ است؛ برای این نیم خط توجه به جهت جریان لازم است.
با توجه به توضیحات فوق دیود های ج و د را در شکل (1-10) رسم می‌نمایم.



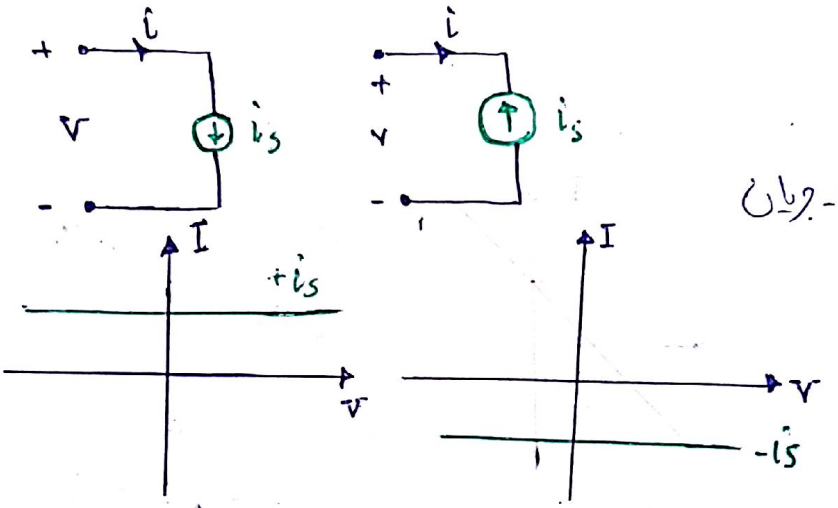
شکل (1-10) مشخصه جریان - ولتاژ دیود ایده‌آل شکل (1-5-ج و د)

ب) منبع ولتاژ ایده‌آل:



شکل (1-11) مشخصه ولتاژ-جریان
ب) منبع ولتاژ ایده‌آل

ج) منبع جریان ایده‌آل:



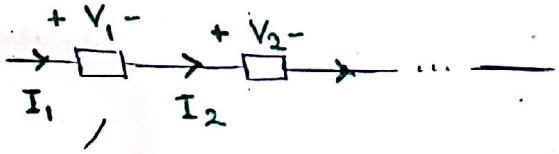
شکل (1-12) مشخصه ولتاژ-جریان
ج) منبع جریان ایده‌آل

جمع‌بندی: هر منبع ولتاژ یا جریان، بسته به جهت خود، مقدار ولتاژ و یا جریان را در مشخصه I-V به اندازه e_s و یا i_s شیفت می‌دهد.

1-1-2 به هم بستن عناصر

حل مسئله اینجاست که عموماً مشخصه ولتاژ جریان را مشکل از تعدادی عناصر به هم پیوسته به ما می‌دهند از این رو نیاز داریم با چگونگی بهم پیوستن و تحلیل این گونه مشخصه‌ها آشنا شویم.

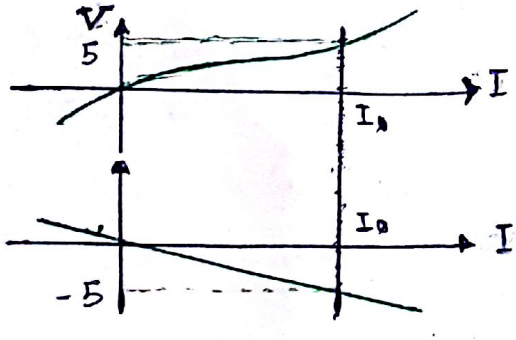
الف) سری:



$$\begin{cases} I_{eq} = I_1 = I_2 = \cdots \\ V_{eq} = V_1 + V_2 + \cdots \\ R_{eq} = \sum_i R_i \end{cases}$$

ب) این حالت داریم:

پس برای رسم مشخصه I-V نهایی، به ازای جریان‌های یکسان، ولتاژهای متناظر را جمع می‌کنیم.



شکل (1-14) مشخصه I-V دو عنصر سری

مثلاً به ازای جریان $I=I_0$، ولتاژهای متناظر را جمع کنیم:

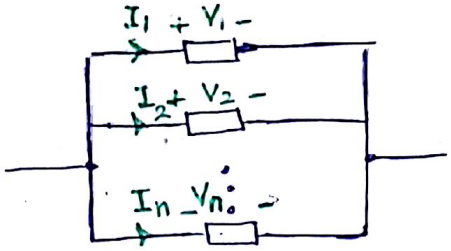
$$I_1 = I_2 = I_0$$

$$V_{eq} = V_1 + V_2 = 5 + (-5) = 0$$

ب) موازی

در این حالت داریم:

$$\begin{cases} V_0 = V_1 = V_2 = \cdots \\ I_0 = I_1 + I_2 + \cdots \\ R_{eq} = \dfrac{1}{\sum_i \frac{1}{R_i}} \end{cases}$$

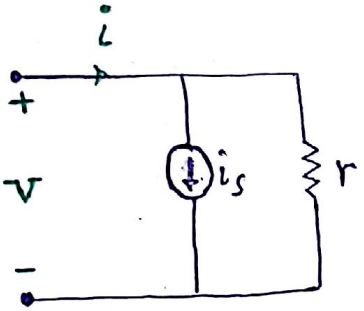


شکل (1-15) المان های موازی (هم ولتاژ)

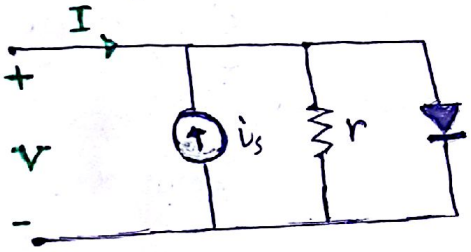
پس برای رسم مشخصه I-V نهایی، برازای ولتاژهای یکسان جریان های متناظر را باهم جمع کنیم. بطورکلی برای جمع کردن دو خط شیب ها و عرض از مبدأهای آن ها را باهم جمع می کنیم.

نکته: هر خط با شیب m اگر با یک خط افقی با شیب صفر جمع شود شیب آن تغییر نمی کند. بلکه به قول الکترونیکی ها تنها مقدار dc آن تغییر می کند (شیفت dc دارد) و اگر خطی با شیب m با یک خط قائم با شیب بی نهایت جمع شود، حاصل همان خط قائم خواهد بود؛ به قول الکترونیکی ها بریده می شود.

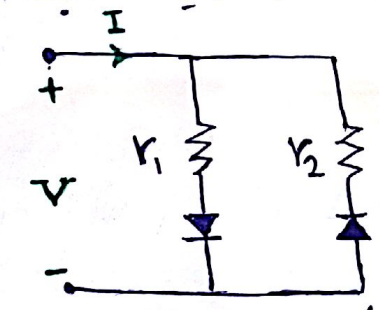
2) مشخصه I-V مدارهای زیر را رسم کنید.



شکل (1-16) تمرین 2-الف

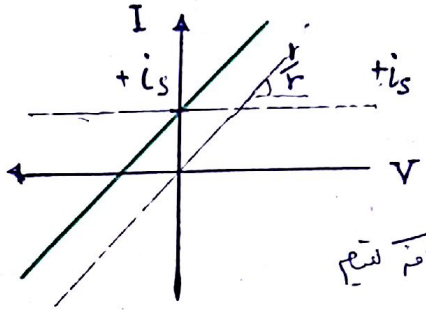


شکل (1-18) تمرین 2-ب



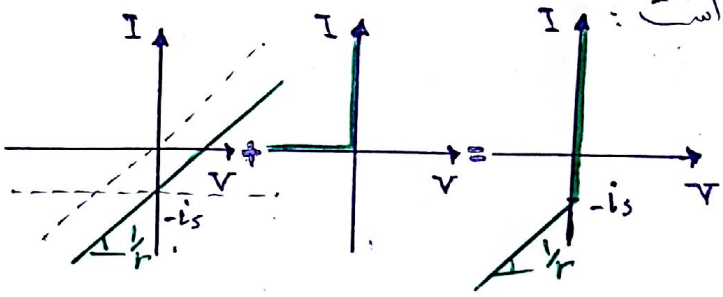
شکل (1-20) تمرین 2-ج

الف)



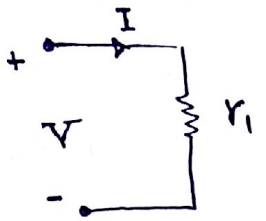
شکل (1-17) پاسخ تمرین

حال اگر یک دیود به مدار اضافه کنیم خواهیم داشت:



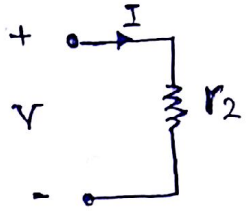
شکل (1-19) پاسخ تمرین 2-ب

برای حل تمرین 2-ج یک راه حل این است که هر شاخه را به طور مجزا رسم کرده یعنی مشخصه یک مقاومت با دیود سری شده آن باتوجه به جهت آند و کاتد دیود رسم شده و سپس دو شاخه را باهم موازی در نظر بگیریم. ولی همواره محدودیان سعی در سرعت بخشیدن در محاسبات دارند از این رو با توجه به قاعده های که تا این جا خوانده ایم از این تکنیک استفاده می کنیم که شاخه چپ را شاخه $\frac{1}{2}$ و شاخه راست را شاخه 2 در نظر گرفته حال معلوم است که وقتی $V>0$ باشد، آن گاه شاخه $\frac{1}{2}$ و صل



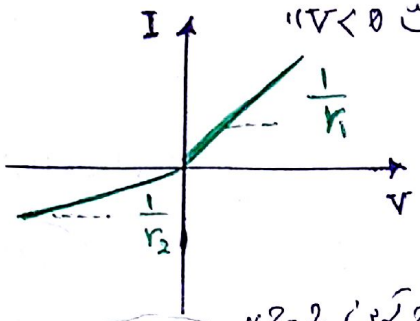
« شکل (1-21) مدار معادل در حالت $V>0$ »

و شاخه‌ی 2 قطع است و مدار به شکل (1-21) خواهد بود:
و هنگامی که $V<0$، بایاس است، یعنی مدار به فرم (1-22) خواهد بود.



« شکل (1-22) مدار معادل در حالت $V<0$ »

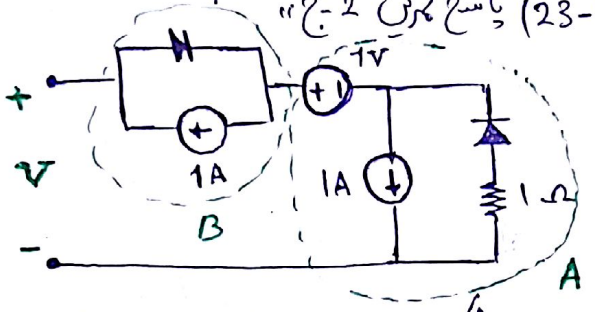
پس با تقسیم به دو ناحیه $V>0$ و $V<0$، مشخصه‌ی ولتاژ-جریان به صورت زیر خواهد بود.



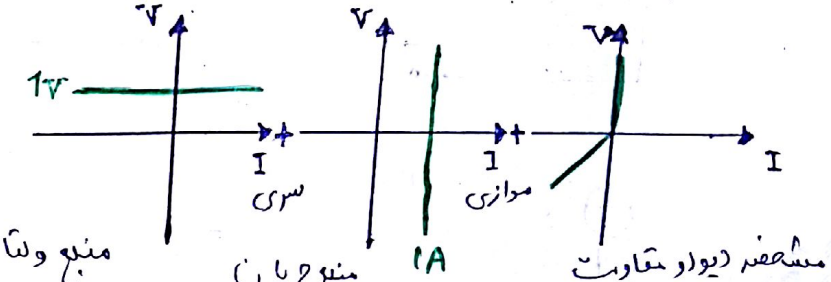
برای تمرین می‌توانید با روش قبل به این مشخصه برسید.

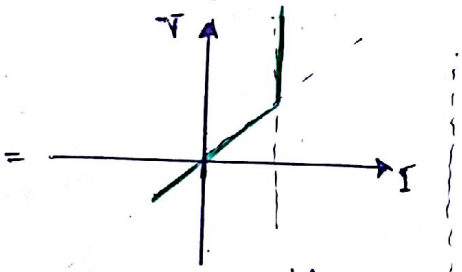
« شکل (1-23) پاسخ تمرین 2-ج »

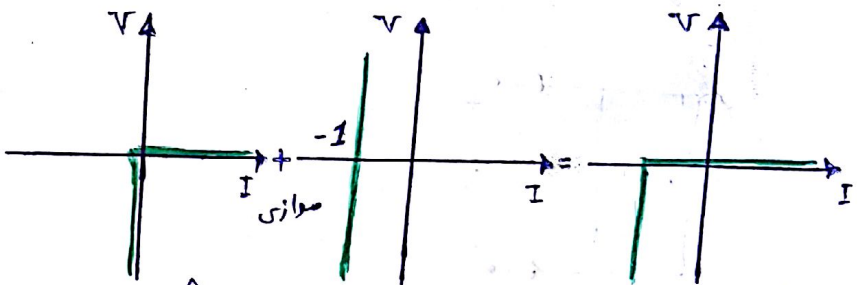
برای تمرین 2-د، دو بخش A و B را در نظر می‌گیریم. ابتدا به رسم بخش A می‌پردازیم.



« شکل (1-24) تمرین 2-د »

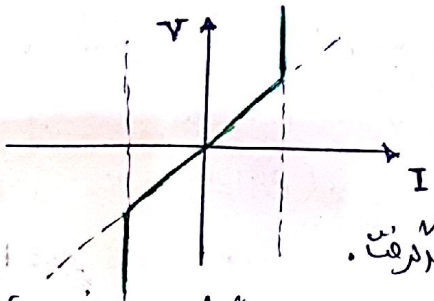






« شکل (1-25) مراحل تمرین 2-د »

« شکل (1-26) ادامه مراحل تمرین 2-د »



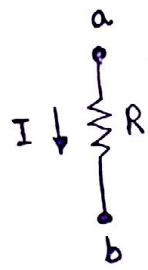
« شکل (1-27) پاسخ تمرین 2-د »

* توجه کنید سعی کنید در حل چنین مسائلی همه‌ی مشخصه‌ها را به یک شکل I-V یا V-I در نظر بگیرید چرا که تبدیل فرم‌ها وقت زیادی از شما خواهد گرفت.

تذکر: مشخصه‌ی ولتاژ-بار (در مورد خازن) و مشخصه‌ی شار-جریان (در سلف) عیناً شبیه مشخصه ولتاژ-جریان (در مقاومت) است و از تکرار آن پرهیز می‌کنیم؛ خلاصه در مدارهای شامل خازن، نقش ناراها بازی می‌کند و V سرجای خودش است و در مدارهای شامل سلف، نقش V را Φ ایفا می‌کند و I سرجای خودش است.

1-2 عناصر مداری (معرفی و روابط)

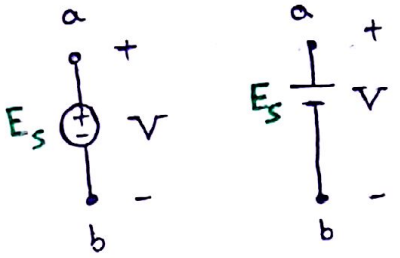
1-2-1 مقاومت



شکل (1-32)
مقاومت R و جریان I

$$I = \frac{V_a - V_b}{R}$$ جریان روننده از a به b

1-2-2 منابع مستقل (ناوابسته)

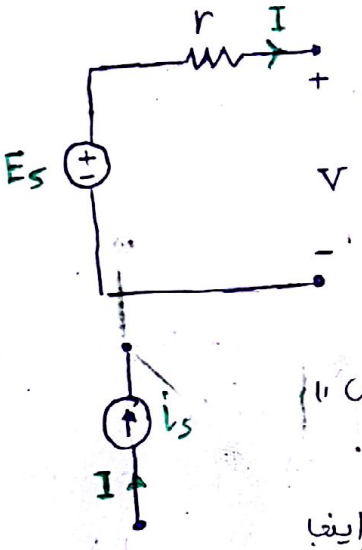


شکل (1-33) منبع ولتاژ مستقل

الف) منبع ولتاژ:

در حالت ایده آل داریم: (ناوابسته) ایده ال $V = E_s$

و در حالت واقعی یک مقاومت r با آن سری می شود که آن را مقاومت داخلی می نامیم:



« شکل (1-34) منبع ولتاژ مستقل ایده آل »

که در رابطه روبرو rI بیانگر افت ولتاژ مقاومت داخلی منبع می باشد.

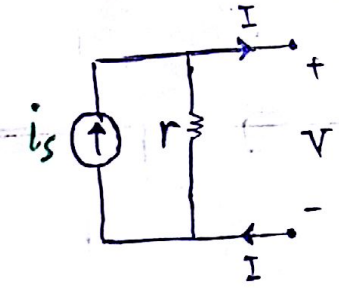
$$V = E_s - rI$$

« شکل (1-35) منبع جریان مستقل ایده آل »

ب) منبع جریان:

در حالت ایده آل $I = i_s$

و در حالت واقعی یک مقاومت r همی با آن موازی می شود، که در اینجا هم مقاومت داخلی خوانده می شود.



« شکل (1-36) منبع جریان مستقل واقعی »

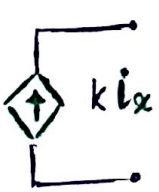
می توان مشابه قبل V/r را افت جریان منبع نامید. $I = V/r$

* به طور کلی هر چیزی موازی منبع ولتاژ یا سری با منبع جریان قرار گیرد قابل حذف است * البته این نکته استثنا هم دارد اگر آن چیز که موازی با منبع ولتاژ است اتفاقا کوتاه شود خود منبع حذف می شود و در صورتی که آن المان سری با منبع جریان، مدار باز شود خود منبع جریان حذف می شود.

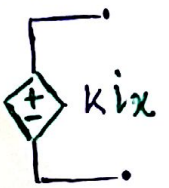
1-2-3 منابع وابسته

که به یکی از چهار شکل زیر است.

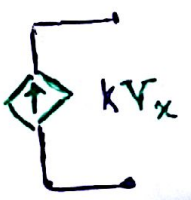
ب) منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ



الف) منبع جریان وابسته به جریان



ج) منبع ولتاژ وابسته به جریان



د) منبع جریان وابسته به ولتاژ

« شکل (1-37) چهار نوع منبع وابسته »

که در آن I_x و V_x به ترتیب جریان یا ولتاژ هر شاخه از مدار می‌تواند باشد.

۱-۳ توان الکتریکی

توان الکتریکی برابر است با ولتاژ ضربدر جریان و واحد آن وات است.

$$P = V \times I$$

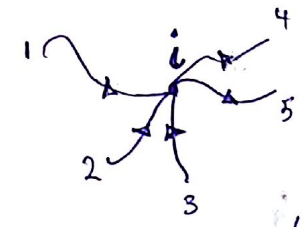
$$P = V^2/R = RI^2$$

که در مقاومت به صورت‌های دیگری نیز بیان می‌شود.

نکته: اگر جریان از سر مثبت المان وارد شود توان مصرفی و اگر از سر منفی یا لایه المان وارد شود توان تولیدی است. همه‌ی مقاومت‌ها مصرف کننده اند ولی منابع بستگی به شرایط می‌تواند تولید کننده یا مصرف کننده باشند.

۱-۴ قوانین کیرشهف

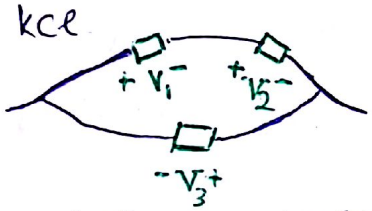
۱) قانون جریان یا KCL: جمع جبری جریان‌های خروجی از هر گره برابر صفر است. $\sum_{out} i = 0$ این قاعده برای ابر گره و بسته نیز برقرار است. البته مجموع جریان‌های وارد شونده به گره برابر مجموع جریان‌های خارج شونده از گره است.



شکل (۱-۴۱) قانون جریان KCL

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_4 + i_5$$

۲) قانون ولتاژ یا KVL: جمع جبری ولتاژهای عناصر در هر مسیر بسته صفر است و در هر مش یا سوپرمش یا حلقه داریم: $\sum_i V_i = 0$



شکل (۱-۴۲) قانون ولتاژ KVL

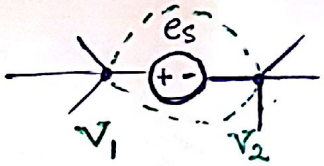
مدارهای مقاومتی و روش‌های تحلیل آن:

۱-۴-۱ روش تحلیل گره

هدف: پیدا کردن ولتاژ گره‌ها (به جز گره مبنا یا زمین که در آن $V=0$)

روش: KCL را در همه گره‌ها (به جز گره زمین و گره با ولتاژ معلوم) می‌نویسیم.

نکته: اگر بین دو گره با ولتاژ مجهول، منبع ولتاژ بود، برای راحتی از نوشتن KCL در گره مرکب یا سوپرگره استفاده می‌کنیم. با یک معادله از معادلات ما کاسته می‌شود.

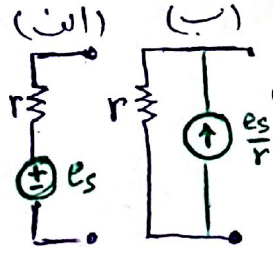


شکل (۱-۴۴) یک منبع ولتاژ با دو گره مجهول

رابطه گره‌های مجهول: $V_1 - V_2 = e_s$

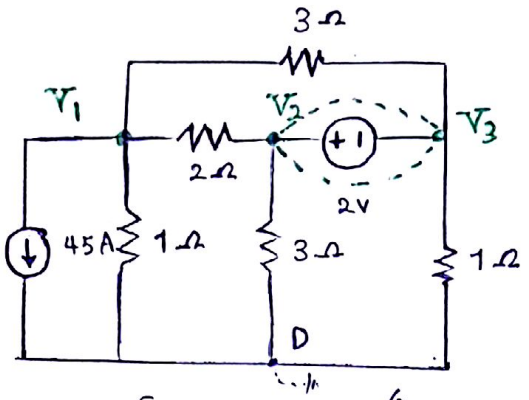
ابتدا به کمک رابطه گره مجهول و ولتاژی از گره‌ها را برحسب دیگری نوشته سپس که نقطه چین نشان داده شده در شکل (۱-۴۴) را در حکم یک گره در نظر می‌گیریم و برای آن KCL می‌زنیم.

در روش گره که مبنای آن KCL است به منبع جریان علاقه‌مند هستیم، برای همین ترکیب‌هایی به شکل (۱-۴۵-الف) را به (۱-۴۵-ب) تبدیل می‌کنیم.



شکل (۱-۴۵) مدارهای معادل الف) تونن و ب) نورتن

ت 6) در مدار زیر پس از تحلیل مقادیر V_1 ، V_2 و V_3 را پیدا کنید:



شکل (1-46) مدار تمرین 6

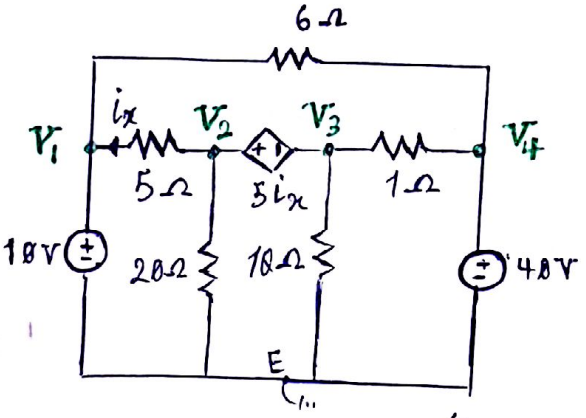
حل: برای حل در یک گام اولیه با دو مجهول روبرو هستیم ولی اگر دقت کنیم گره $V_2 - V_3$ مرکب است پس داریم $V_2 - V_3 = 2$ آن گاه $V_2 = V_3 + 2$ پس داریم:

در گره 1 KCL: $\frac{V_1}{1} + \frac{V_1 - (V_3+2)}{2} + \frac{V_1 - V_3}{3} + 45 = 0$

در گره مرکب KCL: $\frac{V_3 + 2 - V_1}{2} + \frac{V_3}{1} + \frac{V_3 + 2}{3} + \frac{V_3 - V_1}{3} = 0$

حال پس به یک دستگاه دو معادله دو مجهول می رسیم و از حل آن ولتاژهای مجهول را می یابیم.
اگر دقت کنیم می بینیم گره مرجع را نقطه D در نظر گرفته و جهت جریان ها را خارج شونده نسبت به گره در نظر می گیریم.

ت 7) ولتاژهای V_1، V_2، V_3، V_4 را پیدا کنید.



شکل (1-48) مدار تمرین 7

حل: ابتدا تکلیف i_x مجهول را مشخص می کنیم: $i_x = \frac{V_2 - V_1}{5}$ آن گاه $V_1 = 10V$ ، $V_4 = 40V$

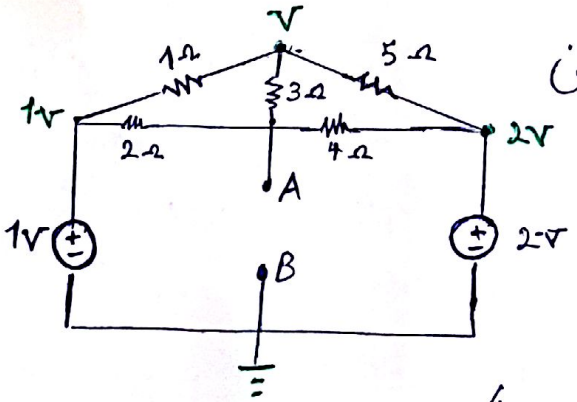
$V_2 - V_3 = 5i_x \Rightarrow V_2 = V_3 + 5i_x = V_3 + V_2 - V_1$

$\Rightarrow V_3 - V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = V_3 = 10$

در گره مرکب KCL: $i_x + \frac{V_2}{20} + \frac{V_3}{10} + \frac{V_3 - V_4}{1} = 0$

$\Rightarrow \frac{V_2 - 10}{5} + \frac{V_2}{20} + \frac{10}{10} + \frac{10 - 40}{1} = 0 \Rightarrow V_2 = 124$

ت 8) در صورتی که شاخه AB را اتصال کوتاه کنیم چه جریانی از آن می گذرد.



شکل (1-49) مدار تمرین 8

حل: اگر شاخه AB را اتصال کوتاه کنیم نقطه A و B یکی می شود و فقط یک گره با دو ولتاژ مجهول باقی می ماند پس KCL را در گره بالایی مدار می زنیم.

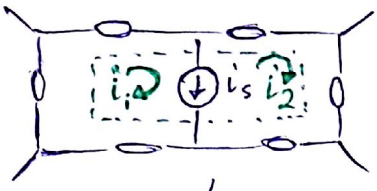
$\frac{V-1}{1} + \frac{V-0}{3} + \frac{V-2}{5} = 0 \Rightarrow V = \frac{21}{23} V$

$i_{AB} = \frac{1-0}{2} + \frac{2-0}{4} + \frac{\frac{21}{23}-0}{3} = \frac{30}{23} A$

1-4-2 روش تحلیل مش

هدف: پیدا کردن جریان مش ها

روش: kvl را در همه مش ها (به جز مش بیرونی و مش های با جریان معلوم) می نویسیم.
این روش دوگان روش گره است. پس وقتی بین دو مش با جریان مجهول یک منبع جریان باشد. ابتدا به کمک رابطه گره مجهول جریان یکی از مش ها را برحسب مش همسایه بدست می آوریم، و سپس کل دو مش همسایه را یک مش در نظر می گیریم.



« شکل (1-51) مش مرکب »

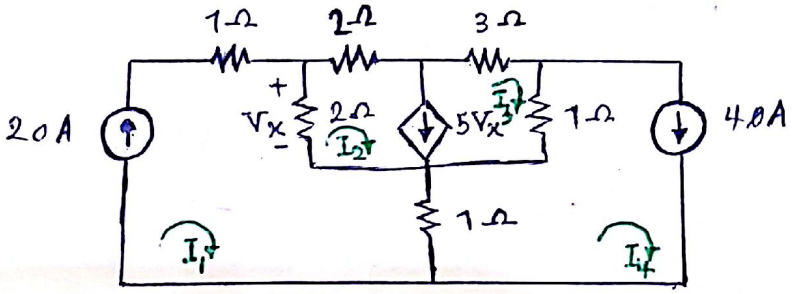
و برای kvl می زنیم در این حا رابطه گره مجهول به صورت $v_s = v_2 - v_1$ که به آن رابطه مش مجهول گوییم.

* مش ساده ترین حلقه ای که شاخه ای در درونش نباشد.

جریان مش: یک جریان فرضی با جهت دلخواه - مثلاً در جهت عقربه های ساعت است که از همه شاخه های درون مش می گذرد. حال اگر شاخه ای که بین دو مش مشترک باشد، جریان واقعی برابر تفاضل جریان مش هاست. مبنا در این روش kvl است. در این روش دو جهت داریم، یکی جهت حرکت در حلقه و اگر هنگام حرکت در مش از سر منفی منبع ولتاژ عبور کنیم مقدار E_s - منظور می کنیم و اگر از سر مثبت عبور کنیم آن را $+E_s$ در نظر می گیریم و اما در باره ی مقاومت ها (و به عبارتی امپدانس ها)

اگر هنگام حرکت هم جریان باشد $+RI$ و اگر خلاف جهت جریان در حال حرکت باشد $-RI$ قرار می دهیم.

نکته: در این روش به منبع ولتاژ علاقه داریم پس مدارهای به شکل (1-45-ب) را به صورت ترکیب (1-45-الف) تبدیل می کنیم.



« شکل (1-52) مدار تمرین 9 »

ت 9) جریان های I_1 تا I_4 را محاسبه کنید.

حل: ظاهراً 4 مش داریم یعنی 4 معادله و 4 مجهول ولی به راحتی داریم $I_1 = 20A$, $I_4 = 40A$.

$$V_x = 2(20 - I_2)$$

و برای دو مش مجهول داریم:

$$\Rightarrow I_2 - I_3 = 5V_x \Rightarrow I_2 - I_3 = 10(20 - I_2)$$

$$\Rightarrow 11I_2 = 200 + I_3 \quad \text{یا} \quad 11I_2 - I_3 = 200 \Rightarrow I_3 = 11I_2 - 200$$

حال در مش مرکب ② و ③ kvl می زنیم.

$$\text{KVL}: 2I_2 + 3(11I_2 - 200) + 1(11I_2 - 400 - 40) + 2(I_2 - 20) = 0$$

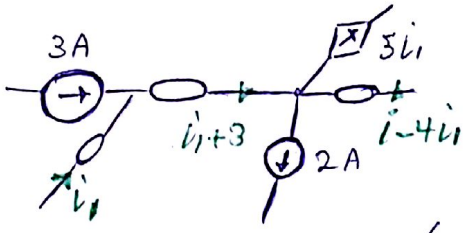
$$\Rightarrow 2I_2 + 33I_2 - 600 + 11I_2 - 440 + 2I_2 - 40 = 0$$

$$48I_2 = 1080 = 22.5 \quad , \quad I_3 = 47.5$$

۳-۴-۱ روش ترکیبی

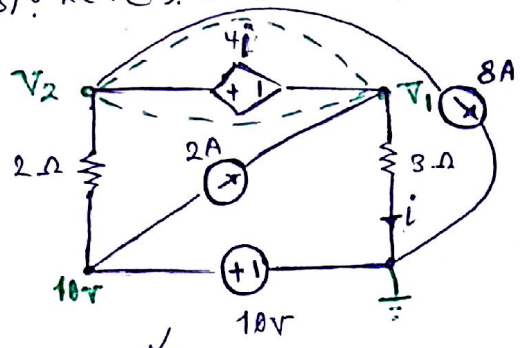
« kvl - kcl »

همان طور که از نام روش مشخص است ابتدا kcl را زده و سپس در حلقه یا حلقه های مناسب kvl می زنیم. یعنی جریان‌های داخل شاخه ها را روی شکل مدار مشخص کنیم. حال واضح است که حلقه خوب حلقه ای است که با زدن kvl در آن، جریان مجهول معلوم می‌شود؛ یعنی دارای کمترین جریان های مجهول باشد.



« شکل (۱-۵۳) نمونه ای برای kcl بازی »

مثال ۱۰) جریان i چند آمپر است؟



« شکل (۱-۵۴) مدار تمرین ۱۰ - روش کره »

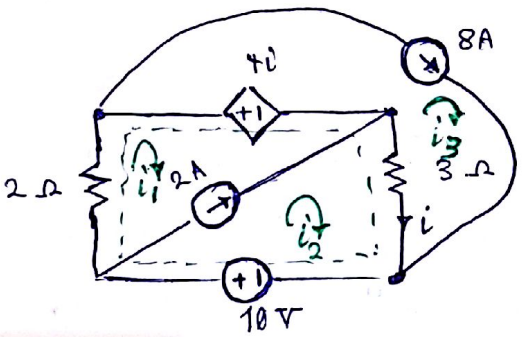
حل: ابتدا به روش کره، گره زمین را سمت راست منبع ولتاژ می‌گیریم، و تا از سمت چپ پایین 10V می باشد. حال 2 گره با ولتاژ مجهول داریم (V_2, V_1) که بین آن‌ها منبع ولتاژ است. پس داریم:

$$i = \frac{V_1}{3}$$

$$\Rightarrow V_2 - V_1 = 4i \Rightarrow V_2 = 4i + V_1 = \left(\frac{4}{3} + 1\right) V_1 = \frac{7}{3} V_1$$

$$\text{KCL: } \frac{\frac{7}{3}V_1 - 10}{2} + 8 + \frac{V_1}{3} - 2 = 0 \Rightarrow V_1 = -\frac{2}{3} V \Rightarrow i = -\frac{2}{9} A$$

حل با روش مش:



« شکل (۱-۵۵) مدار تمرین ۱۰ - روش مش »

$$i_3 = 8A \quad , \quad i = i_2 - 8$$

$$i_2 - i_1 = 2A \Rightarrow i_1 = i_2 - 2$$

حال kvl در مش مرکب:

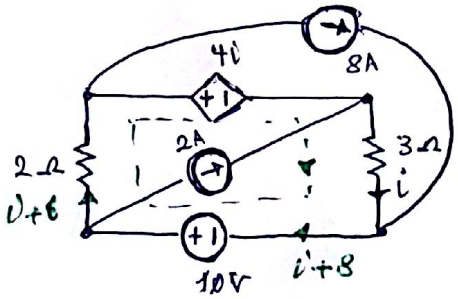
$$\text{KVL: } 4(i_2 - 8) + 3(i_2 - 8) - 10 + 2(i_2 - 2) = 0$$

$$4I_2 - 32 + 3I_2 - 24 - 10 + 2I_2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 9I_2 = 70 \Rightarrow I_2 = 70/9 \Rightarrow i = i_2 - 8 = -\frac{2}{9} A$$

حل با روش ترکیبی kvl - kcl:

اول روی شکل مدار، جریان های داخلی را از روش kcl استخراج می‌کنیم و سپس در حلقه تعیین شده kvl می زنیم.



$$\text{KVL: } 2(i+6) + 4i + 3i - 10 = 0 \Rightarrow i = -\frac{2}{9} A$$

به راحتی دیده می شود روش ترکیبی بسیار ساده و بهینه است.