معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم زیر را دسته بندی کنید:

1.1- $3\frac{\partial^2\emptyset}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\emptyset}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2\emptyset}{\partial y^2}=0$

$B^2-4AC=1-24=-23<0\rightarrow$ بیضوی

1.4- $4\frac{\partial^2\emptyset}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial\emptyset}{\partial x}+x\frac{\partial\emptyset}{\partial x}+\frac{\partial^2\emptyset}{\partial y^2}+4\frac{\partial^2\emptyset}{\partial x\partial y}-4xy=0$

$B^2-4AC=16-16=0\rightarrow$ سهموی

نوع معادلات زیر را بر اساس مقادیر مختلف x و y تعیین کنید:

1.7- $x^2y\frac{\partial^2\emptyset}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2\emptyset}{\partial x\partial y}-y^2\frac{\partial^2\emptyset}{\partial y^2}=0$

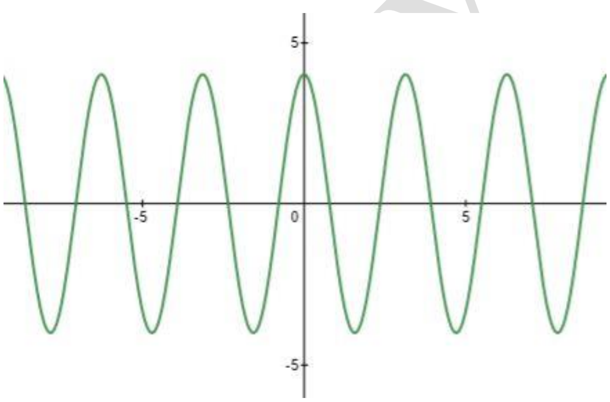
$B^2-4AC=(xy)^2+4x^2y^3=\ x^2y^2(1+4y)$

$$\begin{cases} y>-\frac{1}{4}\rightarrow \text{هذلولوی} \\ y=-\frac{1}{4}\rightarrow \text{سهموی} \\ y<-\frac{1}{4}\rightarrow \text{بیضی} \end{cases}$$

برای قسمت بالای نمودار معادله هذلولوی، برای روی خود نمودار سهموی وبرای قسمت پایین نمودار بیضوی خواهد بود.

1.8- $\sin x\frac{\partial^2\emptyset}{\partial x^2}+2\cos x\frac{\partial^2\emptyset}{\partial x\partial y}+\sin x\frac{\partial^2\emptyset}{\partial y^2}=0$

$B^2-4AC=(2\cos x)^2-4\sin^2 x=\ 4\cos 2x$



مقدار کسینوس در ناحیه چهارم و اول مثبت (هذلولوی) و در دوم و سوم منفی (بیضوی) و در مرز نواحی اول و دوم و همچنین مرز نواحی سوم و چهارم مقدار کسینوس صفر (سهموی) است، یعنی اگر k عددی صحیح باشد خواهیم داشت:

$$\begin{cases} k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4}\rightarrow \text{هذلولوی} \\ x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}\ \rightarrow \text{سهموی} \\ k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{3\pi}{4}\rightarrow \text{بیضی} \end{cases}$$

۱-۹- سیستم معادلات زیر را طبقه بندی کنید:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

طبق آنچه در درسنامه داشتیم، خواهیم داشت:

$$[A]\frac{\partial \emptyset}{\partial x}+[B]\frac{\partial \emptyset}{\partial y}+\varphi=0$$

$$\emptyset=\begin{vmatrix}u\\v\end{vmatrix}\quad ,\qquad [A]=\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}\ ,\quad [B]=0\ \ ,\ \ \varphi=0$$

$$\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ b & a-\lambda\end{vmatrix}=(a-\lambda)^2-b^2=0\rightarrow b=\pm(a-\lambda)\rightarrow \lambda=a\pm b$$

معادله دارای دو مقدار حقیقی است لذا هذلولوی است.

۱-۱۲- سیستم معادلات با مشتقات جزئی زیر را با مقادیر داده شده طبقه بندی کنید.

$$a_1\frac{\partial u}{\partial x}+a_2\frac{\partial v}{\partial y}=g_1$$

$$b_1\frac{\partial v}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}=g_2$$

$a)\ a_1=b_1=a_2=b_2=1$

$b)\ a_1=b_2=1\,,b_1=0\,,\ \ a_2=-1$

$c)\ a_1=b_1=b_2=1\,,a_2=-1$

حل:

روش اول: طبق آنچه در درسنامه هافمن داشتیم، خواهیم داشت:

$$[A]\frac{\partial \emptyset}{\partial x}+[B]\frac{\partial \emptyset}{\partial y}+\varphi=0$$

$$\emptyset=\begin{vmatrix}u\\v\end{vmatrix}\quad ,\qquad [A]=\begin{bmatrix}a_1 & 0\\ 0 & b_1\end{bmatrix}\ ,\quad [B]=\begin{bmatrix}0 & a_2\\ b_2 & 0\end{bmatrix}\ \ ,\ \ \varphi=\begin{bmatrix}-g_1\\-g_2\end{bmatrix}$$

$$P=|A|=a_1b_1\ ,\qquad Q=|B|=-a_2b_2\,,\qquad R=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ b_2 & b_1\end{vmatrix}=0$$

$$H=R^2-4PQ=4a_1b_1a_2b_2$$

روش دوم: طبق آنچه در جزوه (راه تحلیلی) داشتیم، خواهیم داشت:

$$a_1\frac{\partial u}{\partial x}+a_2\frac{\partial v}{\partial y}=g_1\,,\qquad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$b_1\frac{\partial v}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}=g_2\,,\qquad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_2\\ 0 & b_2 & b_1 & 0\\ dx & dy & 0 & 0\\ 0 & 0 & dx & dy\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_1\\ g_2\\ du\\ dv\end{bmatrix}$$

اگر در این دستگاه معادلات بخواهیم مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}$ را تعیین کنیم. لذا با استفاده از قاعده کرامر خواهیم داشت:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_2\\ 0 & b_2 & b_1 & 0\\ dx & dy & 0 & 0\\ 0 & 0 & dx & dy\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & a_2\\ g_2 & b_2 & b_1 & 0\\ du & dy & 0 & 0\\ dv & 0 & dx & dy\end{bmatrix},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{|B|}{|A|}$$

$$|A|=0\ \rightarrow (a_1b_1-0)(dy)^2-(0-0+0-0)dxdy+(0-b_2a_2)(dx)^2$$

$$a=a_1b_1\,,\ \ b=0\,,\ \ c=-b_2a_2\quad \rightarrow H=b^2-4ac=4a_1b_1a_2b_2$$

حالت a

در این حالت مقدار H برابر مثبت چهار بوده و معادلات هذلولوی هستند.

حالت b

در این حالت مقدار H برابر صفر بوده و معادلات سهموی هستند.

حالت c

در این حالت مقدار H برابر منفی چهار بوده و معادلات بیضوی هستند.

۱-۱۵- سیستم معادلات زیر را طبقه بندی کنید:

$$(a)\begin{Bmatrix}(x+y)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\\ (x-y)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{Bmatrix}$$

حل:

همانند مثال قبل خواهیم داشت:

$$(x+y)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=g_1\,,\qquad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$(x-y)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=g_2\,,\qquad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$$

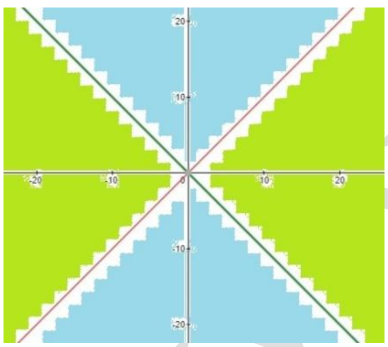
$$\begin{bmatrix} x+y & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & x-y & 0\\ dx & dy & 0 & 0\\ 0 & 0 & dx & dy\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\du\\dv\end{bmatrix}$$

اگر در این دستگاه معادلات بخواهیم مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}$ را تعیین کنیم. لذا با استفاده از قاعده کرامر خواهیم داشت:

$$A=\begin{bmatrix} x+y & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & x-y & 0\\ dx & dy & 0 & 0\\ 0 & 0 & dx & dy\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_2\\ 0 & b_2 & b_1 & 0\\ du & dy & 0 & 0\\ dv & 0 & dx & dy\end{bmatrix},\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{|B|}{|A|}$$

$$|A|=0\ \to (\,x^2-y^2-0)(dy)^2-(0-0+0-0)dxdy+(0-1)(dx)^2$$

$$a=x^2-y^2\,,\ \ b=0\,,\ \ c=-1\quad \to H=b^2-4ac=4(x^2-y^2)$$



$$\begin{Bmatrix} |x|>|y| \to \text{هذلولوی}\\ y=\pm x \to \text{سهموی}\\ |x|<|y| \to \text{بیضوی}\end{Bmatrix}$$

قسمت‌های سبز رنگ هذلولوی و قسمت‌های آبی رنگ بیضوی و روی نمودارها هم سهموی می‌باشند.

$$(b)\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial \omega}{\partial x}=0\\ \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial \omega}{\partial y}=0\\ \frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial \omega}{\partial x}=0\end{Bmatrix}$$

حل:

مطابق آنچه در درسنامه آموختیم داریم:

$$Q = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \omega \end{bmatrix}, \qquad A\frac{\partial Q}{\partial x} + B\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, T = [A]n_x + [B]n_y = \begin{bmatrix} n_y & -n_x & -n_x \\ n_x & -n_y & -n_y \\ 0 & n_y & -n_x \end{bmatrix}$$

$$|T| = n_y\left(n_y n_x + n_y^2\right) - n_x\left(n_x^2 + n_x n_y\right) = n_y^3 - n_x^3 + n_y n_x\left(n_y - n_x\right) = \left(n_y - n_x\right)\left(n_y^2 + n_x^2 + 2n_y n_x\right)$$
$$= \left(n_y - n_x\right)\left(n_y + n_x\right)^2$$

حال از معادله فوق نسبت nx/ny یعنی راستای بردار n محاسبه می شود. اگر همه مقادیر حقیقی باشد دستگاه معادلات هذلولوی و اگر همه مقادیر موهومی باشد، دستگاه معادلات بیضوی است. برخی از مقادیر ویژه حقیقی و برخی دیگر مختلط هستند و در این صورت دستگاه معادلات ممکن است رفتاری مخلوط داشته باشد. اگر مقادیر nx/ny همگی حقیقی اما بعضا تکراری باشند، دستگاه معادلات مورد نظر سهموی است. در اینجا با توجه مضاعف و حقیقی بودن ریشه منفی یک رفتاری سهموی را شاهد خواهیم بود.

$$\left\{ \begin{array}{c} n_y = n_x \rightarrow \dfrac{n_x}{n_y} = 1 \rightarrow \text{حقیقی} \\ n_y = -n_x \rightarrow \dfrac{n_x}{n_y} = -1 \rightarrow \text{سهموی} \end{array} \right\}$$