

تمرین‌های ترکیبیات

جلسه‌ی هشتم و نهم - توابع مولد

توجه:

- مطابق قوانین درس، با تقلب در تمرین‌ها به شدت برخورد خواهد شد. با توجه به سخت‌گیری کم در تصحیح تمرینات، نوشتن راه حل نادرست حاصل از تلاش، بسیار معقول‌تر از تقلب است.
- تمرینات باید در برگه‌ی A4 نوشته شوند.

• تمرین تحویلی سری ۵: سوال شماره ۱ (مهلت تحویل: ۱۶ مرداد)

۱. (آ) ضرایب تابع مولد $\sqrt{\frac{1}{1-x}}$ را بیابید.

(ب) با استفاده از قسمت (آ) و این که $\frac{1}{1-x} = \sqrt{\frac{1}{1-x}} \times \sqrt{\frac{1}{1-x}}$ اتحاد ترکیبیاتی زیر را اثبات کنید:

$$\sum_{i=0}^n \binom{2i}{i} \binom{2(n-i)}{n-i} = 4^n$$

۲. با استفاده از توابع مولد نشان دهید تعداد روش‌های انتخاب ۴ عضو از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, n\}$ به گونه‌ای که هیچ دو عضو متوالی انتخاب نشوند، برابر با $\binom{n-3}{4}$ است.

۳. با استفاده از توابع مولد نشان دهید:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۴. با استفاده از توابع مولد، مقدار صریح عدد فیبوناچی را به دست آورید.

۵. مقدار صریح a_n و b_n را بیابید:

$$a_n = -2a_{n-1} - 4b_{n-1}$$

$$b_n = 4a_{n-1} + 6b_{n-1}$$

$$a_0 = 1$$

$$b_0 = 0$$

موفق باشید

-اسدی