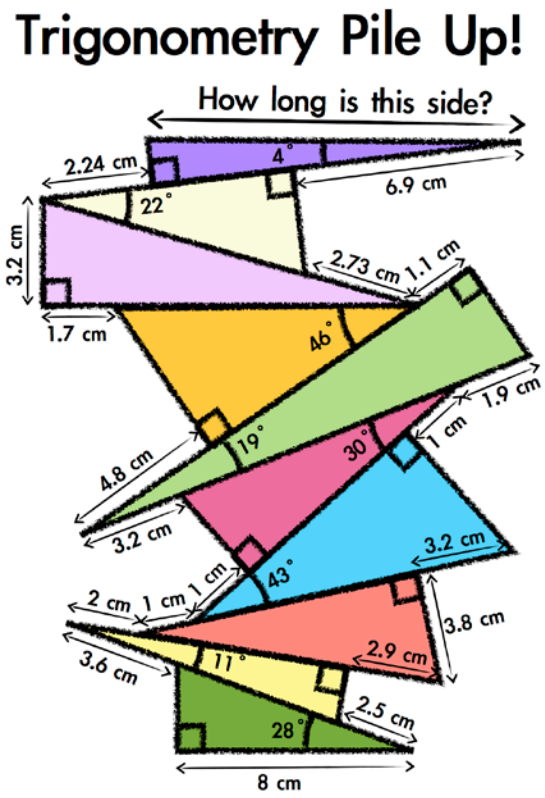
به نام خدا

جزوه مثلثات



IOPM.IR

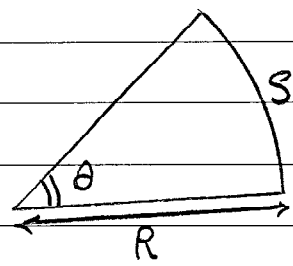
DATE : SUBJECT :

تعاریف اولیه

واحدهای زاویه :

درجه $= \frac{1}{360}$ دایره

رادیان $= \frac{S}{R}$



$\theta_{(rad)} = \frac{S}{R}$

تذکرات :

۱- دقت کنید توی مشتق گیری و انتگرال گیری و ... از توابع مثلثاتی، زاویه‌ها باید برحسب رادیان باشند. برای مثال، در رابطه‌ی زیر x حتما باید برحسب رادیان باشد.

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

۲- تبدیل رادیان و درجه باید برایتون بدیهی باشه. مثلا $\frac{\pi}{6}$ رادیان چند درجه میشه؟ ۳۰ درجه. تمرین کنید تا این طوری بشه!

تبدیل زاویه‌های غیر رایج :

$37^\circ = \frac{37^\circ}{180^\circ}\pi_{(rad)} = 0.65_{rad}$

+ نسبت به رادیان شهود داشته باشید :

$1_{(rad)} \approx 57^\circ$

FABER-CASTELL
since 1761

DATE : SUBJECT :

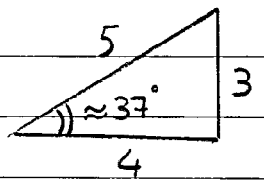
نسبت های مثلثاتی

csc ، sec ، cot ، tan ، cos ، sin

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ، $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

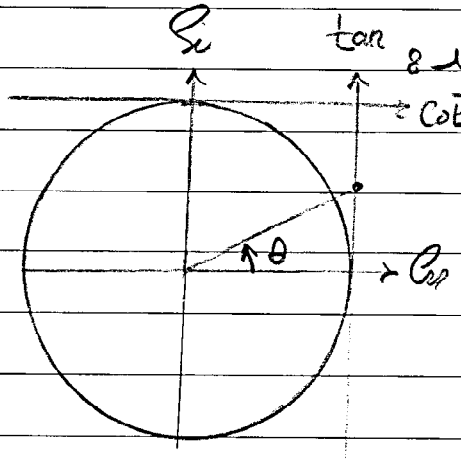
نسبت مثلثاتی زوایای مهم ، باید برایتون بدیهی باشه و بتونید فوراً بگید .

مثلث معروف 5، 4، 3



هم یادتون باشه $\theta \approx 37°$

! باتوجه به دایره‌ی مثلثاتی مقادیر زیر رافوراً بگویید



$\sec(\frac{2\pi}{3})$ / $\cos(\frac{\pi}{6})$ / $\sin(\frac{\pi}{6})$

$\csc(\frac{4\pi}{3})$ / $\cot(\frac{7\pi}{6})$ / $\tan(\frac{5\pi}{6})$

$\sin(\frac{3\pi}{2})$ / $\cot(\frac{2\pi}{3})$ / $\csc(\frac{3\pi}{4})$

* اگر بلافاصله نمی‌تونید بگید ، انقدر تمرین کنید که بتونید "بلافاصله" بگید .

!! باید بتونید "فوراً" مقادیر زیر رو بگید (با استفاده از دایره) مثال ⇒ $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\cot\theta$

$\sin(\pi-\theta)$ / $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)$ / $\sec(\pi+\theta)$ / $\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)$

FABER-CASTELL
since 1761

DATE : SUBJECT :

● روابط مثلثاتی و کاربردهای آن

الف ـ روابط برابری که از دایره مثلثاتی به دست می‌آیند:

(1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (2) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad (\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2})$

(3) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \quad (\theta \neq k\pi)$

(4) $(\sin\theta \pm \cos\theta)^2 = 1 \pm 2\sin\theta\cos\theta = 1 \pm \sin 2\theta$

* این یعنی $1 \pm \sin\theta$ ، مجذور یک عبارت است که زیر رادیکال بود شبیه بالایی بازی کرد.

(5) $\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2\theta)$

(6) $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2\theta)$

(7) $\tan\theta + \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$

! مقدار $\frac{\sqrt{1+\sin 2\theta}}{\sin\theta + \cos\theta}$ به ازای $\theta = 160^\circ$ چقدر است؟ (جواب: 1-)

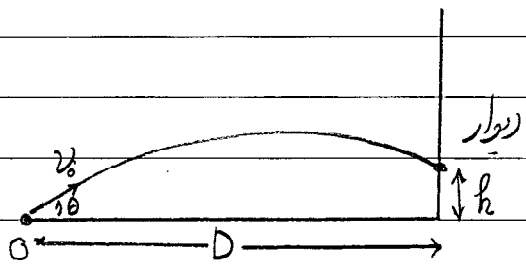
به ازای چه مقدار از A، تساوی زیر یک اتحاد می‌باشد؟ (جواب: 2-)

$$\frac{1}{\cos^4 x} + A\sec^2 x = \tan^4 x - 1$$

FABER-CASTELL since 1761

DATE : SUBJECT :

توپی را از نقطه‌ی O به سمت دیوار پرتاب می‌کنیم. با صرف نظر از مقاومت هوا، حداکثر ارتفاع اصابت توپ به دیوار، به ازای چه زاویه‌ی پرتاب θ خواهد داد؟ (سرعت اولیه‌ی توپ را v_0 بگیرید و فاصله‌ی دیوار از نقطه‌ی پرتاب D است)



حل:

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + x\tan\theta$$

$$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta \rightarrow y = \frac{-gx^2}{2v_0^2}\tan^2\theta + x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

$$\rightarrow h = \frac{-gD^2}{2v_0^2}\tan^2\theta + D\tan\theta - \frac{gD^2}{2v_0^2}$$

پس h بر حسب $\tan\theta$ یک سهمی است، x رأس سهمی است $-\frac{B}{2A}$

بنابراین:

$$\tan\theta = \frac{v_0^2}{gD}$$ پاسخ

FABER-CASTELL

DATE : SUBJECT :

ب ← روابط مثلثاتی جمع و کمان

(8) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

(9) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(10) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

(11) $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$

(12) $\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$

(13) $\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$

! زاویه‌ی بین دو منحنی $4x^2$ و $\sqrt{x}$ را در $x=1$ بیابید.

!! اگر $\tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ ، $\tan\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$ ، آنگاه $\tan y$ چقدر است؟

!!! چرخی با شعاع R با سرعت V در زمین می‌غلتد. سنگ ریزه‌ای را با احتیاط در بالای چرخ طوری رها می‌کنیم که لحظه‌ای در حال سکون است. (الف) نشان دهید که اگر $V > \sqrt{Rg}$ باشد این سنگ ریزه بلافاصله از چرخ جدا می‌شود. (ب) نشان دهید در حالتی که $V < \sqrt{Rg}$ و ضریب اصطکاک $\mu = 1$ است، سنگ ریزه وقتی شروع به لغزش می‌کند که چرخ به اندازه‌ی زاویه‌ی $\theta = \arccos\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{V^2}{Rg}\right] - \dfrac{\pi}{4}$ دوران کرده باشد.

FABER-CASTELL
since 1761

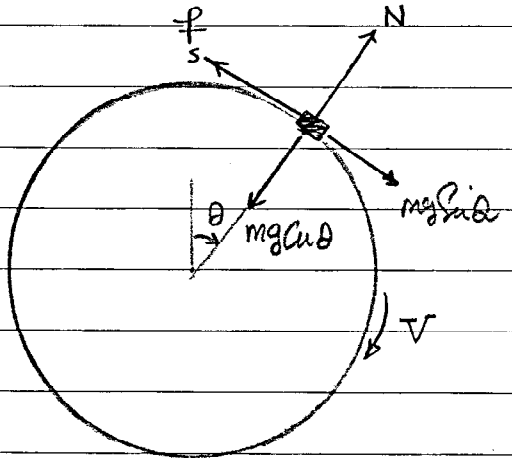
DATE : SUBJECT :

حل : قبل از حل سؤال ذکر نکته ای ضروری می باشد. سؤال بالا، تمرین ۳۲ فصل دوم کتاب "آشنایی با فیزیک" نوشته ی کیتل و نایت است که توسط سرکرشر دانگ هم ترجمه شده است. ترجمه ی سؤال کمی مشکل دارد. در خط دوم که میان سؤال به طور لحظه ای در حالت سکون است منظور "نسبت به سطح چرخ است" که از سؤال نیز می شود فهمید. متن اصلی کتاب :

... A pebble is carefully released on top of the wheel so that it is instantaneously at rest on the wheel.

حل قسمت ب :

از دید ناظر لخت متحرک با سرعت V :



$$f_s = mg\sin\theta$$

$$N = mg\cos\theta - \frac{mV^2}{R}$$

نقطه ی لغزش ($\mu_s = 1$) $f_s = N$:

$$\rightarrow \cos\theta - \sin\theta = \frac{V^2}{Rg} \rightarrow \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{4}\sin\theta\right) = \frac{V^2}{Rg}$$

$$\rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{V^2}{Rg}$$

$$\rightarrow \theta = \cos^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{V^2}{Rg}\right] - \frac{\pi}{4}$$

FABER-CASTELL
since 1761

DATE : SUBJECT :

* تابع هسم:

$$f(\theta) = a\cos\theta + b\sin\theta$$

تو حیلی از سؤالای فیزیک مثل همین سؤال آخر به عبارت بالای رسیم برای همین می خوایم این تابع هسم رو بررسی کنیم:

← روش اول:

$$(14)\quad a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right\}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\varphi)\ ,\quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,\quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi')\ ,\quad \cos\varphi' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,\quad \sin\varphi' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

و هسم خیلی می تونن کمک کنند:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \le a\cos\theta + b\sin\theta \le \sqrt{a^2+b^2}$$

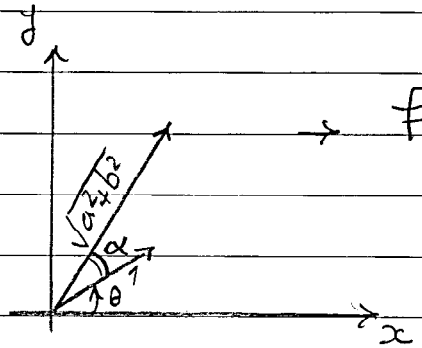
FABER-CASTELL since 1761

DATE : SUBJECT :

روش دوم:

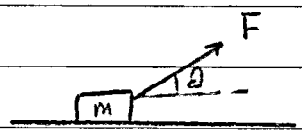
(15) $f_{(\theta)} = a\cos\theta + b\sin\theta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

ضرب داخلی برای بردارها



$\rightarrow f_{(\theta)} = \sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha$

۱۷. جسمی روی سطحی با ضریب اصطکاک μ_s در حال سکون قرار دارد و نیروی F با زاویه‌ی θ به صورت شکل وارد می‌شود. الف) کم‌ترین نیرویی که می‌توان جسم را به حرکت واداشت چقدر است و ب) θ برای این حالت چقدر است؟



آستانه‌ی لغزش: $F\cos\theta = \mu_s(mg - F\sin\theta)$

$$F_{(\theta)} = \frac{\mu_s mg}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta} \rightarrow F_{min} = \frac{\mu_s mg}{\sqrt{1+\mu_s^2}}$$

$\tan\theta = \mu_s$ ضرب داخلی این حالت می‌شود: $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_s \end{pmatrix}$

FABER-CASTELL since 1761

DATE : SUBJECT :

نسبت‌های مثلثاتی 3α ، 2α

(16) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

(17) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$= \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

(18) $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

(19) $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

(20) $\tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

(21) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

(22) $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$

(23) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

(24) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(25) $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$

FABER-CASTELL since 1761

DATE : SUBJECT :

(26) $\cos\theta \cos(\frac{\pi}{3}-\theta)\cos(\frac{\pi}{3}+\theta) = \frac{1}{4}\cos 3\theta$

(27) $\sin\theta \sin(\frac{\pi}{3}-\theta)\sin(\frac{\pi}{3}+\theta) = \frac{1}{4}\sin 3\theta$

(28) $\tan\theta \tan(\frac{\pi}{3}-\theta)\tan(\frac{\pi}{3}+\theta) = \tan 3\theta$

(29) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, $i = \sqrt{-1}$

! $\sin 22.5^\circ \cos 67.5^\circ$ را ساده کنید.

!! عبارت $\cos^3\theta\sin\theta - \sin^3\theta\cos\theta$ را ساده کنید.

!!! حاصل عبارات زیر چقدر است؟

(1) $\cot 1^\circ - \tan 1^\circ - 2\tan 2^\circ - 4\tan 4^\circ - \dots - 2^n \tan(2^n{}^\circ)$

(2) $\tan 15^\circ + \cot 15^\circ$

(3) $\sin 15^\circ$

IV اگر $\tan x = \frac{1}{2}$ باشد، $\tan(\frac{\pi}{4}+2x)$ را بیابید.

V $[8\sin^3(\frac{\pi}{36}) - 6\sin(\frac{\pi}{36})][8\cos^3(\frac{\pi}{36}) - 6\cos(\frac{\pi}{36})]$ چقدر است.

VI حاصل $\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$ را بیابید.

VII با توجه به رابطه‌ی (29)، $\sin(4\theta)$ را بیابید.

FABER-CASTELL
since 1761

DATE : SUBJECT :

* رابطه‌ی مهم :

(30) $\tan\theta + \sec\theta = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$

(31) $\cot\theta + \csc\theta = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$

تبدیل جمع به ضرب و ضرب به جمع ←

(32) $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(33) $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(34) $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(35) $\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$

(36) $\cot p + \cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}$

(37) $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$

FABER-CASTELL
since 1761

DATE : SUBJECT :

(38) $Cu^2A - Cu^2B = Cu(A+B)\,Cu(A-B)$

(39) $SiaSib = \frac{-1}{2}[Cu(a+b) - Cu(a-b)]$

(40) $CuaCub = \frac{1}{2}[Cu(a+b) + Cu(a-b)]$

(41) $SiaCub = \frac{1}{2}[Si(a+b) + Si(a-b)]$

! حاصل $\frac{Si(10x) - Si(6x)}{Cu(10x) + Cu(6x)}$ را بیابید.

!! پرتابه‌ای مطابق شکل تحت زاویه‌ی θ نسبت به افق

از بالای سطح شیبداری با زاویه‌ی α نسبت به افق، پرتاب می‌شود. θ چه مقدار باشد تا برد پرتابه روی سطح شیبدار بیشینه شود؟ R یا برد بیشینه چقدر است؟

$$R = \frac{2v_0^2 Si(\theta-\alpha)Cu\theta}{g\,Cu^2\alpha} \Rightarrow R = \frac{v_0^2}{g}\sec^2\alpha\,(Si(2\theta-\alpha) - Si\alpha)$$

$Si(\theta-\alpha)Cu\theta = \frac{1}{2}[Si(2\theta-\alpha) - Si\alpha]$ (طبق رابطه‌ی 41)

بنابراین:

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$$

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}\sec^2\alpha\,(1 - Si\alpha)$$

FABER-CASTELL
since 1761