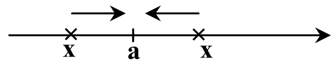
فصل سوم

فصل ۲ ریاضی ۳، قبلاً به ضمیمه‌ی فصل های ۲ و ۳ ریاضی ۲ تقدیم شده است.

حد و پیوستگی:

میل کردن x به سمت a



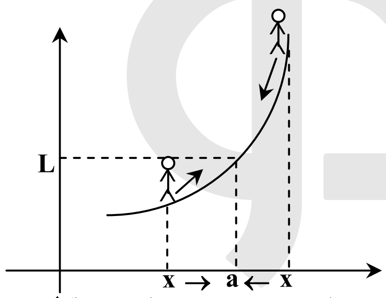
همان‌طور که در شکل می‌بینیم وقتی نقطه‌ای به طول x از راست و چپ بسیار نزدیک به نقطه a گردد، می‌گوییم x به نقطه a میل می‌کند و می‌نویسیم $x \to a$

اگر x از سمت راست نقطه a به a نزدیک شود یعنی با مقادیر بیشتر از a به a نزدیک شود، می‌گوییم x از راست به a میل می‌کند و می‌نویسیم $x \to a^+$ و اگر x از سمت چپ نقطه a به a نزدیک شود یعنی با مقادیر کمتر از a به a نزدیک شود، می‌گوییم x از چپ به a میل می‌کند و می‌نویسیم $x \to a^-$

میل کردن x به سمت $\pm\infty$

هرگاه متغیر x از هر عدد بسیار بزرگ مثبتی بزرگتر شود می‌گویند x به $+\infty$ میل کرده است و می‌نویسیم $x \to +\infty$ و اگر متغیر از هر عدد منفی بسیار کوچکی، کوچکتر شود می‌گویند x به $-\infty$ میل کرده است و می‌نویسیم $x \to -\infty$

نمودار و حد



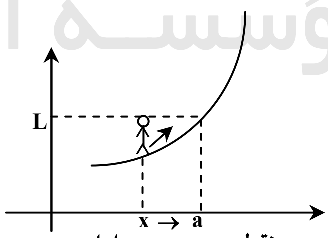
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

وقتی می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی $x \to a$ برابر L است، یعنی هرگاه x از سمت راست و نیز از سمت چپ بسیار به نقطه a نزدیک شود، مقدار تابع یعنی $f(x)$ بسیار به نقطه‌ی L نزدیک خواهد شد.

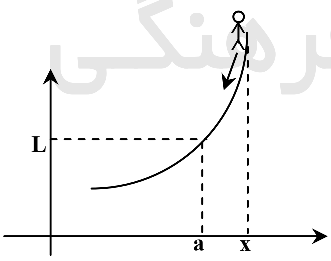
توجه داشته باشید که در مفهوم میل کردن هیچ‌گاه x به نقطه‌ی a نمی‌رسد و نیز هیچگاه $f(x)$ به L نمی‌رسد بلکه بی‌نهایت به آن‌ها نزدیک می‌شوند.

حد راست و چپ:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$



$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$



تذکر: تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ دارای حدی برابر L است، هرگاه:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

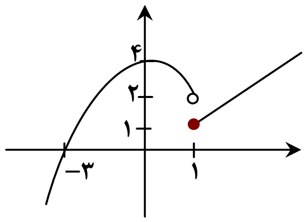
(به‌شرط آن‌که هر دو طرف نقطه‌ی a در دامنه‌ی تابع باشد.)

توجه داشته باشید در کتاب ریاضی ۳ همواره حد را در دامنه‌ی تابع مورد بررسی قرار می‌دهیم. مثلاً اگر صحبت از حد تابع $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ در نقطه‌ی $x = 1$ به میان آوریم، در واقع منظورمان حد چپ تابع است.

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0$$

مثال: با توجه به هر یک از نمودارهای داده شده حاصل عبارات را تعیین کنید:

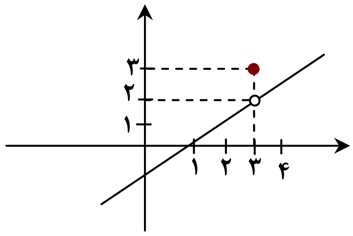
۱) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)\ \text{وجود ندارد}$$

در این شکل مقدار تابع در نقطه‌ی $x=1$ برابر ۱ است؛ یعنی $f(1)=1$

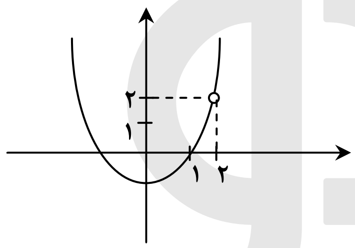
۲) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$$

در این شکل مقدار تابع در نقطه $x=3$ برابر ۳ است؛ یعنی $f(3)=3$

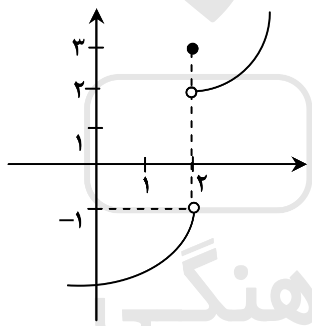
۳) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$$

در این شکل تابع در نقطه $x=2$ مقدار ندارد؛ یعنی $f(2)$ وجود ندارد.

٤) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)+\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)-f(2)$



$$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)+\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)-f(2)=2+(-1)-3=-2$$

قضیه‌های حد:

قضیه ۱: حد تابع ثابت یعنی $f(x)=k$ وقتی x به هر عدد a میل کند برابر همان مقدار ثابت k است.

$$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} k=k$$

مثال:

اگر $f(x)=3\Rightarrow \lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} 3=3$

قضیه ۲: حد تابع $f(x)=x$ (تابع همانی) هنگامی که $x\to a$ برابر با a است.

$$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} x=a$$

مثال:

اگر $f(x)=x\Rightarrow \lim\limits_{x\to 5} x=5$

قضیه ۳: اگر دو تابع f و g وقتی x به a میل کند دارای حد باشند و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_۱$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_۲$ ، آنگاه:

الف) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right) = L_۱ \pm L_۲$

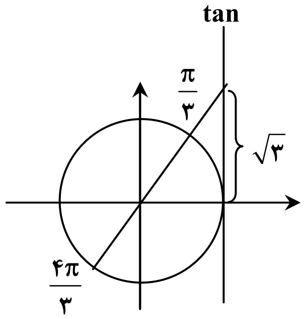
ب) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).g(x)\right) = L_۱.L_۲$

ج) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{L_۱}{L_۲} \;,\; L_۲ \neq ۰$

د) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L_۱} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{اگر n زوج}} L_۱ > ۰ \\ \xrightarrow{\text{اگر n فرد}} L_۱ \in \mathbb{R} \end{cases}$

هـ) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^n = \left(L_۱\right)^n$

مثال: حاصل حدود زیر را بدست آورید:



$$۱)\ \lim_{x\to ۲}\frac{۲x+۳}{x^۲-۴x} = \frac{۴+۳}{۴-۸} = -\frac{۷}{۴}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۵}\left(\frac{x+۲}{۳x^۲+۴}\times\frac{\sqrt{x-۱}}{x+۱}\right) = \frac{۵+۲}{۷۵+۴}\times\frac{\sqrt{۵-۱}}{۵+۱} = \frac{۷}{۷۹}\times\frac{۲}{۶} = \frac{۷}{۲۳۷}$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۴}\tan\left(\frac{\pi x}{۳}\right) = \tan\frac{۴\pi}{۳} = \tan\left(\pi+\frac{\pi}{۳}\right) = \tan\frac{\pi}{۳} = \sqrt{۳}$$

نکته: معمولاً در موارد زیر مجبوریم حد راست و چپ را جداگانه محاسبه کنیم:

۱- در توابع کسری قدرمطلق‌دار که متغیر به ریشه‌ی ساده‌ی داخل قدرمطلق میل کند.

مثال:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\left|x^۲-۱\right|}{x-۱} = ? \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x^۲-۱}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)} = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{-(x^۲-۱)}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{-(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)} = -۲ \end{cases}$$

مثال:

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x+۲}{\left|x^۲+۳x+۲\right|} = ? \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to (-۲)^+}\dfrac{x+۲}{-(x^۲+۳x+۲)} = \dfrac{۰}{۰} = \lim\limits_{x\to (-۲)^+}\dfrac{(x+۲)}{-(x+۲)(x+۱)} = ۱ \\ \lim\limits_{x\to (-۲)^-}\dfrac{x+۲}{x^۲+۳x+۲} = \dfrac{۰}{۰} = \lim\limits_{x\to (-۲)^-}\dfrac{(x+۲)}{(x+۲)(x+۱)} = -۱ \end{cases}$$

$x^۲+۳x+۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱, x = -۲$

x		−۲		−۱	
$x^۲+۳x+۲$	+		−		+
	→		←		

۲- در توابع دو یا چندضابطه‌ای که مقدار حد در نقطه‌ای خواسته شده که در آن نقطه ضابطه‌ی تابع عوض می‌شود.

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x+۱ & ;\ x \geq ۱ \\ -x^۲+۴ & ;\ x < ۱ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x) = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+}(x+۱) = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-}(-x^۲+۴) = ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x)\ \text{وجود ندارد}$$

مثال:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-3|}{x-3} & x\neq 3\\ x+2 & x=3\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x)=?$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{|x-3|}{x-3}=\frac{0}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x-3)}{(x-3)}=1\\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-(x-3)}{(x-3)}=-1\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x)\ \text{وجود ندارد}$$

مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}(x+a)^2 & ;x\geq -1\\ 2x+1 & ;x<-1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-1$ حد دارد؟

۱) $\{0\}$ ۲) $\{2\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

حل: گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+a)^2=(-1+a)^2\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(2x+1)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow (-1+a)^2=-1 \rightarrow \text{غیرممکن} \rightarrow \text{وجود ندارد}$$

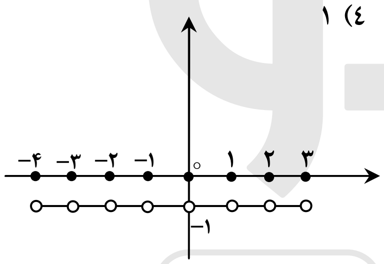
هیچ مقدار برای a وجود ندارد

مثال: در تابع $f(x)=\begin{cases}-1 & ;x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\\ 0 & ;x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)+\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-} f(x)$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) -2 ۴) 1

حل: گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)+\lim_{x\to(\frac{1}{2})^-} f(x)=(-1)+(-1)=-2$$



حالت مبهم $\frac{0}{0}$:

هرگاه در محاسبه حد تابع $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ وقتی $x\to a$ به حالت $\dfrac{\text{حدی }0}{\text{حدی }0}$ رسیدیم حد را مبهم گفته و بایستی آن را رفع ابهام کنیم. به‌عنوان مثال داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-x}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

تذکر:

(۱) $\dfrac{\text{حدی }0}{\text{حدی }0}=\text{مبهم}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}=\dfrac{0}{0}\ \text{مبهم}$

(۲) $\dfrac{\text{مطلق }0}{\text{حدی }0}=0$

(۳) $\dfrac{\text{حدی }0}{\text{مطلق }0}=\text{تعریف نشده}$

(۴) $\dfrac{\text{عدد}}{\text{حدی }0}=\pm\infty\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{5}{\text{حدی }0}=\pm\infty$

(۵) $\dfrac{\text{حدی }0}{\text{عدد}}=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{0}{5}=0$

(۶) $\dfrac{\text{عدد}}{\text{مطلق }0}=\text{تعریف نشده}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{[x]-2}=\dfrac{3}{[2^+]-2}=\dfrac{3}{2-2}=\dfrac{3}{\text{مطلق }0}=\text{تعریف نشده}$

رفع ابهام $\frac{0}{0}$

راه‌های رفع ابهام $\frac{0}{0}$:
- ۱- ساده کردن
- ۲- استفاده از قاعده هوپیتال
- ۳- استفاده از هم‌ارزی‌ها

۱- ساده کردن:

برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ می‌توانیم با ساده کردن، عوامل صفرکننده صورت و مخرج را از بین ببریم.

مثال:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{تجزیه}}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2}{3}$$

مثال: گویا کردن:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+\sqrt{x+6}}{x+2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\times\frac{\text{مزدوج صورت}}{\text{مزدوج صورت}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{x+\sqrt{x+6}}{x+2}\times\frac{x-\sqrt{x+6}}{x-\sqrt{x+6}}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{(x+2)(x-\sqrt{x+6})}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(-4)}=\frac{5}{4}$$

مثال: فاکتورگیری:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}+x-1}{\sqrt{4x-4}+x^2-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}+(x-1)}{\sqrt{4(x-1)}+(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}(2+\sqrt{x-1}(x+1))}=\frac{\sqrt{2}+0}{2+0}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲- قاعده هوپیتال:

اگر f و g حول نقطه $x=a$ مشتق پذیر باشند، داریم:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

توجه داشته باشیم به شرط مشتق‌پذیری مراتب بالاتر f و g از قاعده‌ی هوپیتال بیش از یک مرتبه نیز می‌توان استفاده کرد.

مثال:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{1+2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{1+2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{21}{2}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x-\tan x}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{6\cos x\sin x-(1+\tan^2 x)}{1}=\frac{6(1)(0)-(1+0)}{1}=-1$$

مثال:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\tan\pi x}{|x^2-1|}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 1^+}\frac{\tan\pi x}{x^2-1}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1^+}\frac{\pi(1+\tan^2\pi x)}{2x}=\frac{\pi(1+0)}{2}=\frac{\pi}{2}$$

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{2x+1}}{2-\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ٤) $\frac{3}{2}$

حل: گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{2x+1}}{2-\sqrt{x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 4}\frac{0-\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}}{0-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}}\dfrac{\tan^2 x-1}{\cos 2x}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ٤) 2

حل: گزینه ۱ پاسخ است.

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}}\frac{\tan^2 x-1}{\cos 2x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}}\frac{2(1+\tan^2 x)\tan x}{-2\sin 2x}=\frac{2(1+1)(-1)}{-2(-1)}=-\frac{4}{2}=-2$$

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ٤) 4

حل: گزینه ۲ پاسخ است.

راه حل اول:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=-2$$

راه حل دوم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}\times\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\times\frac{2+\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(2+\sqrt{5-x})}{(4-5+x)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(4)}{(-1+x)(2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(4)}{-(1-x)(2)}=-2$$

۳- هم‌ارزی:

استفاده از هم‌ارزی در محاسبه‌ی حد در واقع جایگزینی تابع چند جمله‌ای معادل (یک چند جمله‌ای که رفتارش در اطراف آن نقطه شبیه رفتار تابع اصلی است) به جای تابع اصلی است. که موجب سهولت در محاسبه‌ی حد می‌شود.

تعریف: توابع $f(x)$ و $g(x)$ را وقتی $x\to a$ هم ارز یکدیگر گوییم هرگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$

به عنوان مثال توابع $\sin x$ و x وقتی $x\to 0$ هم ارز یکدیگرند، زیرا همان‌طور که می‌دانیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad (\text{قضیه فشردگی})$$

پس می‌گوییم $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$

مهم‌ترین هم‌ارزی‌ها حول نقطه‌ی $x=0$:

الف) هم‌ارزی کوچکترین توان: توابع چندجمله‌ای وقتی متغیر به سمت صفر میل می‌کند هم‌ارز جمله‌ای هستند که کوچکترین توان را دارد.

مثال:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\underbrace{-2x}_{\text{منفی}}}}{\sqrt{x}}$$ حد وجود ندارد

ب) هم‌ارزی یک‌جمله‌ای $\sin x$ و $\tan x$:

$$\boxed{\underset{u\to 0}{\sin u\sim u}\ \Rightarrow \underset{u\to 0}{\sin^m u\sim u^m}}$$

$$\boxed{\underset{u\to 0}{\tan u\sim u}\ \Rightarrow \underset{u\to 0}{\tan^m u\sim u^m}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin 2x|}{x}+\frac{|x|}{\cos x}=\lim_{x\to 0^-}\underbrace{\boxed{\frac{-\sin 2x}{x}}}_{\frac{0}{0}}+\underbrace{\boxed{\frac{-x}{\cos x}}}_{\frac{0}{1}=0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2x}{x}+0=-2$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\tan x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}=\frac{2}{1}=2$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0 \text{ غلط}$$

تذکر: هرگاه از هم‌ارزی یک‌جمله‌ای $\sin x$ و $\tan x$ استفاده کردیم و متغیر با جمع و تفریق ساده شد مجاز به استفاده از آن هم‌ارزی نمی‌باشیم و بایستی یا از یک هم‌ارزی دقیق‌تر استفاده کنیم و یا از روش دیگری مانند قاعده هوپیتال حد را رفع ابهام کنیم.

مثال: حاصل $\lim_{x\to 0^-}\frac{1-|\cos x|}{|\sin x|\sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۲-

حل: گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1-|\cos x|}{|\sin x|\sin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{-\sin^2 x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{-x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x^2}{2}}{-x^2}=-\frac{1}{2}$$

ج) هم‌ارزی دوجمله‌ای $\sin x$ و $\tan x$:

$$\boxed{\underset{u\to 0}{\sin u\sim u-\frac{u^3}{6}}}$$

$$\boxed{\underset{u\to 0}{\tan u\sim u+\frac{u^3}{3}}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{Sin}x}{x^3}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم ارزی دوجمله ای}}\lim_{x\to 0}\frac{(x+\frac{x^3}{3})-(x-\frac{x^3}{6})}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x^3}{6}}{x^3}=\frac{1}{2}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\operatorname{Sin}^2x}{x^4}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{Sin}x)(x+\operatorname{Sin}x)}{x^4}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-(x-\frac{x^3}{6})\right)(x+x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}\times 2x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3}}{x^4}=\frac{1}{3}$$

د) هم ارزی $\operatorname{Cos}x$:

$$\boxed{\operatorname{Cos}u\underset{u\to 0}{\sim}1-\frac{u^2}{2}}$$

$$\boxed{\operatorname{Cos}^n u\underset{u\to 0}{\sim}1-\frac{nu^2}{2}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{\operatorname{Cos}u}\underset{u\to 0}{\sim}1-\frac{u^2}{2n}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Cos}2x-\operatorname{Cos}x}{x\operatorname{Sin}x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{4x^2}{2})-(1-\frac{x^2}{2})}{x.x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2+\frac{x^2}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3x^2}{2}}{x^2}=-\frac{3}{2}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 3x\sqrt{1-\operatorname{Cos}4x}}{x^3+x^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to 0^+}\frac{(3x)\sqrt{1-\left(1-\frac{16x^2}{2}\right)}}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x\sqrt{8x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2\sqrt{8}}{x^2}=3\sqrt{8}=6\sqrt{2}$$

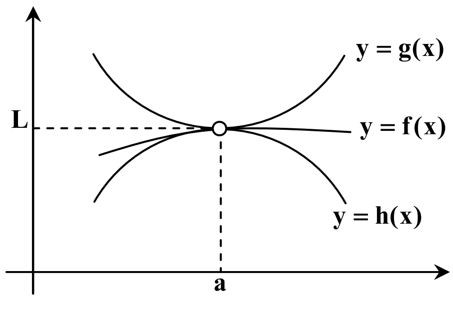
مثال: حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\operatorname{Cos}x}}{\operatorname{Sin}^2x}$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ٤) $\frac{1}{4}$

حل: گزینه ٤ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\operatorname{Cos}x}}{\operatorname{Sin}^2x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{4}}{x^2}=\frac{1}{4}$$

قضیه‌ی فشردگی:



فرض کنید به ازای هر x از بازه‌ی باز I که شامل نقطه‌ی a است داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L \quad \text{و} \quad h(x)\le f(x)\le g(x)$$

در این صورت: $\lim_{x\to a}f(x)=L$

مثال: فرض کنید به ازای هر $x \neq 0$ داشته باشیم $3-x^2 \le f(x) \le 3+x^2$ آنگاه چون $\lim_{x\to 0} 3+x^2 = \lim_{x\to 0} 3-x^2 = 3$، می‌توان از قضیه‌ی فشردگی نتیجه گرفت $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$

تذکر: با توجه به قضیه فشردگی می‌توان اثبات کرد که $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ و نیز $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$

مثال: در بازه‌ی $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ همواره $\frac{\sin\pi x}{1-x} \le f(x) \le g(x)$ و $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin\pi x}{1-x}-g(x)\right)=0$ حاصل $\lim_{x\to 1} f(x)$ برابر کدام است؟(سراسری -۸۶)

۱) $-\pi$ ۲) صفر ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

حل: گزینه ٤ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin\pi x}{1-x}-g(x)\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{1-x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x}{-1} = \frac{-\pi}{-1} = \pi$$

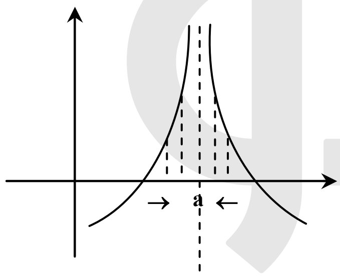
پس طبق قضیه فشردگی چون $\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{1-x} = \lim_{x\to 1} g(x) = \pi$، می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{x\to 1} f(x) = \pi$ است.

حدهای بی‌نهایت:

تعریف: تابع f را که در بازه‌ی باز I شامل a تعریف شده است (مگر احتمالاً در خود a) در نظر می‌گیریم، آنگاه:

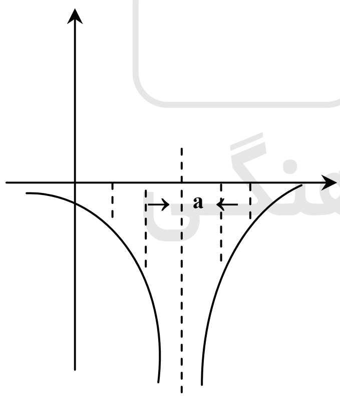
الف) حد تابع f وقتی x به a میل کند، $+\infty$ است هرگاه وقتی x به قدر کافی به a نزدیک شود، $f(x)$ از هر عدد بسیار بزرگ مثبتی، بزرگ‌تر گردد و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

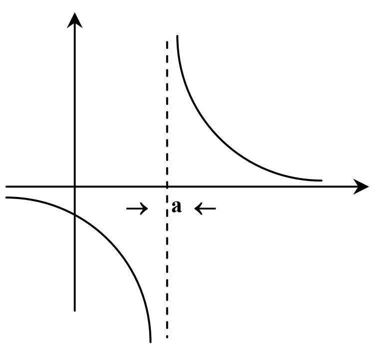


ب) حد تابع f وقتی x به a میل می‌کند، $-\infty$ است هرگاه وقتی x به قدر کافی به a نزدیک شود، $f(x)$ از هر عدد منفی کوچکی، کوچک‌تر گردد و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$



تذکر: تعریف‌های بالا در مورد حد راست و حد چپ تابع در a نیز درست است، به‌عنوان مثال در شکل زیر داریم:

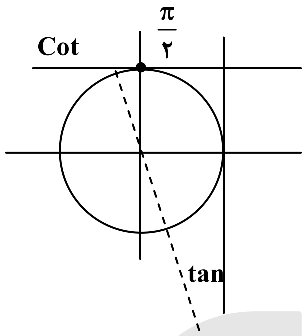


$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

* حدهای بی‌نهایت وقتی رخ می‌دهند که در توابع کسری وقتی $x \to a$، صورت کسر یک عدد غیرصفر و مخرج صفر حدی گردد؛ یعنی:

$$\frac{\text{عدد غیر صفر}}{\text{حدی }0} = \pm\infty$$

مثال:



$$1)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\tan x}{\operatorname{Cot} x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}}{\frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Cos}^2 x}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty & \text{راه حل اول:}\\[2ex] \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\tan x}{\operatorname{Cot} x}=\dfrac{-\infty}{0^-}=+\infty & \text{راه حل دوم:}\end{cases}$$

$$2)\ \lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x-1}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty\end{cases}$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

تذکر: همان طور که در دو مثال آخر می‌بینیم اگر متغیر به ریشه‌ی ساده‌ی مخرج میل کند و صورت کسر عدد شود حد راست و چپ یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$ می‌شود ولی اگر متغیر به ریشه‌ی مضاعف مخرج میل کند هر دو حد راست و چپ یا $+\infty$ و یا $-\infty$ می‌گردد.

مثال: اگر $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+5}{x^2+ax+b}=+\infty$، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

حل: چون هر دو حد راست و چپ در $x=3$ برابر $+\infty$ شده و صورت به ازای عدد ۳ برابر ۸ می‌گردد پس $x=3$ ریشه‌ی مضاعف مخرج است، یعنی:

$$\text{مخرج}=(x-3)^2=x^2-6x+9=x^2+ax+b\Rightarrow\begin{Bmatrix}a=-6\\ b=9\end{Bmatrix}\Rightarrow a+b=3$$

حد در بی‌نهایت:

حد در بی‌نهایت یعنی $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=?$

نکات مهم:

۱) توابع چندجمله‌ای وقتی $x\to\infty$ هم‌ارز جمله‌ای هستند که بیشترین توان را دارد، یعنی:

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^n+bx^{n-1}+\ldots=\lim_{x\to\pm\infty} ax^n$$

مثال:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-1}}{2\sqrt{x-1}-\sqrt{9x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{4x}}{2\sqrt{x}-\sqrt{9x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt{x}}{-\sqrt{x}}=-3$$

مثال:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x+1}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{-4x+1}+\sqrt[3]{27x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-4x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}}=\frac{1}{2}$$

۲) در توابع کسری که صورت و مخرج چندجمله‌ای‌اند، داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_0}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m} & \text{اگر}\quad n=m\\ \pm\infty & \text{اگر}\quad n>m\\ 0 & \text{اگر}\quad n<m\end{cases}$$

مثال:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4+3x^2+1}{3x^4+5x^3}=\frac{1}{3} \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{3x^4}=\frac{1}{3}$$

مثال:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4x^2-1}{x^2+5x}=\pm\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

مثال:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x}{x^3+4x^2+1}=0 \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

مثال: حد کسر $\frac{x^{m+3}+nx+m}{mx^{n-2}-mx+n-1}$ با شرط $n>3$، وقتی $x\to\infty$ برابر ۲- است، **m+n** کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

حل: گزینه ۲ پاسخ است.

چون $n>3\Rightarrow n-2>1\Rightarrow$ بزرگترین درجه‌ی مخرج از یک بیشتر است

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+3}+nx+m}{mx^{n-2}-mx+n-1}=-2\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}}=-2\Rightarrow\begin{cases}m+3=n-2\\ \frac{1}{m}=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m-n=-5\\ m=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow -\frac{1}{2}-n=-5\Rightarrow n=\frac{9}{2}\Rightarrow m+n=-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=4$$

مثال: حد کسر $\frac{x^k+x^2+1}{x^5+3x^2+1}$ وقتی $x\to\infty$ برابر است با:

۱) فقط ۱ ۲) $\pm\infty$ یا ۱ یا صفر ۳) فقط ۱ یا $\frac{1}{3}$ ۴) فقط صفر

حل: گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^k+x^2+1}{x^5+3x^2+1}=\begin{cases}\text{اگر}\quad k=5\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^5}=1\\ \text{اگر}\quad k>5\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{x^5}=\pm\infty\\ \text{اگر}\quad k<5\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{x^5}=0\end{cases}$$

مثال: حد کسر $\frac{x^4+(x+1)^4+(x+2)^4}{x(2x-1)^3}$ وقتی $x\to-\infty$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{8}$

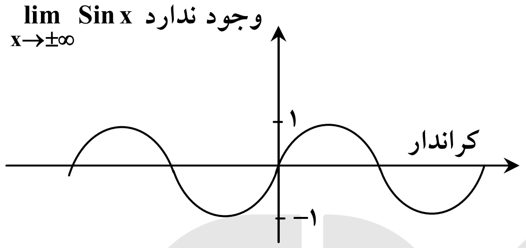
حل: گزینه ۱ پاسخ است.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+(x+1)^4+(x+2)^4}{x(2x-1)^3}\xrightarrow[\text{بزرگترین توان}]{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+x^4+x^4}{x(2x)^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4}{8x^4}=\frac{3}{8}$$

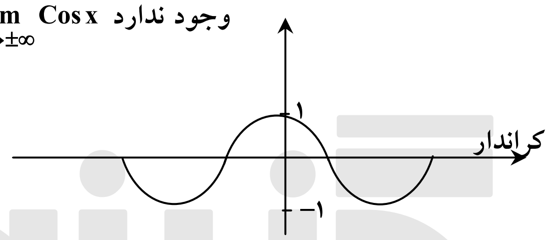
۳) حد توابع نوسانی (متناوب) در ∞:

توابع نوسانی (متناوب) که نوسانشان را تا بی‌نهایت حفظ کنند در بی‌نهایت حد ندارند.

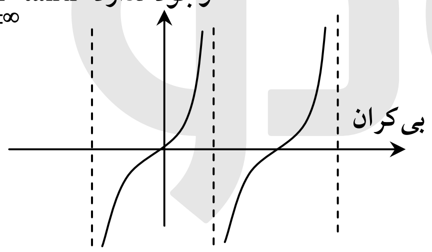
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin x$ وجود ندارد



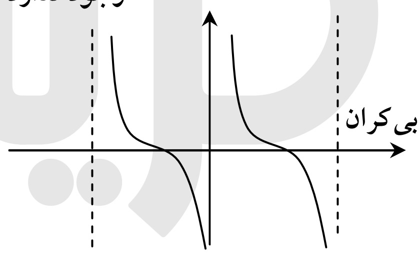
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\cos x$ وجود ندارد



$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\tan x$ وجود ندارد



$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\cot x$ وجود ندارد



$\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to2}\cos\frac{1}{x-2}$ وجود ندارد

نکته ۱: اگر یک تابع نوسانی کراندار بر یک عامل ∞شونده تقسیم و یا در یک عامل صفرشونده ضرب شود حدش در ∞ برابر صفر می‌گردد.

مثال:

(۱) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\text{کراندار}}{\infty}=0$

(۲) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0\times\text{کراندار}=0$

(۳) $\lim\limits_{x\to0^+}x\sin\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sin x}{x^2+3x}=(0\times\text{کراندار})+\frac{x}{3x}=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(۴) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\tan x}{x}=\frac{\text{بی‌کران}}{\infty}\Rightarrow$ حد ندارد

نکته ۲: اگر یک تابع نوسانی کراندار با یک عامل ∞شونده جمع و یا تفریق گردد در ∞ می‌توان از آن تابع نوسانی صرف‌نظر کرد.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{3x^2-\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

۴) حالت مبهم $\circ\times\infty$

اولاً:

حدی $\circ\times\infty =$ مبهم
ولی
مطلق $\circ\times\infty = \circ$

ثانیاً برای رفع ابهام این حالت، معمولاً عامل ∞شونده را به صورت معکوس در مخرج کسر عامل صفرشونده قرار داده تا حد به فرم $\frac{\circ}{\circ}$ تبدیل شود و سپس حد $\frac{\circ}{\circ}$ را رفع ابهام می‌کنیم:

مثال:

$$\lim_{x\to\circ} x\,\text{Cot}x = \circ\times\infty_{\text{مبهم}} \xrightarrow{\text{مبهم}} \lim_{x\to\circ}\frac{x}{\frac{1}{\text{Cot}x}} = \lim_{x\to\circ}\frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to\circ}\frac{x}{x} = 1$$

۵) مبهم $\infty-\infty$

برای رفع ابهام این حالت، اگر دو کسر داشتیم مخرج مشترک می‌گیریم و اگر رادیکالی بود در عامل گویاکننده ضرب و تقسیم می‌کنیم. البته هم‌ارزی بسیار مهمی داریم که بعد از بیان ۲ مثال گفته می‌شود:

مثال:

$$1)\ \lim_{x\to 2}\frac{1}{4x-8}-\frac{1}{x^2-4} = \infty-\infty = \lim_{x\to 2}\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{(x-2)(x+2)}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)-4}{4(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = \frac{1}{16}$$

$$2)\ \lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+3x+1} = \lim_{x\to+\infty} x-|x| = \infty-\infty$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3x+1}\right)\times\frac{\left(x+\sqrt{x^2+3x+1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+3x+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2+3x+1)}{x+|x|} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x-1}{2x} = -\frac{3}{2}$$

مثال: حاصل $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{2x}{x^2-1}-\left|\frac{x}{x+1}\right|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $-\infty$

حل: گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{2x}{x^2-1}-\left|\frac{x}{x+1}\right| = \lim_{x\to(-1)^+}\frac{2x}{x^2-1}+\frac{x}{x+1} = \infty-\infty \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x\to(-1)^+}\frac{2x+x(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to(-1)^+}\frac{2x+x^2-x}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2+x}{x^2-1} = \frac{\circ}{\circ} \Rightarrow \lim_{x\to(-1)^+}\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

هم‌ارزی رادیکالی بسیار مهم:

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots}_{x\to\pm\infty} \sim \begin{cases} \sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right|; & n \text{ زوج} \\ \sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right); & n \text{ فرد} \end{cases}$$

☜مثال:

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+3x+1}=\lim_{x\to+\infty} x-|x|=\infty-\infty \xrightarrow{\text{هم ارزی}} \lim_{x\to+\infty} x-\left|x+\frac{3}{2}\right|=\lim_{x\to+\infty} x-x-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$2)\ \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{8x^3+4x^2+3}-\sqrt[3]{8x^3+5x+1}=\infty-\infty$$

$$\xrightarrow{\text{هم ارزی}} \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{8}\left(x+\frac{4}{24}\right)-\sqrt[3]{8}\left(x+\frac{0}{24}\right)=\lim_{x\to\pm\infty} 2\left(x+\frac{1}{6}\right)-2(x)=\frac{1}{3}$$

☜مثال: حاصل $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{4x^2+9x}}{3x+\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ٤) $\frac{2}{3}$

✍حل: گزینه ۱ پاسخ است.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{4x^2+9x}}{3x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty} \frac{x-|2x|}{3x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2x}{3x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{3x}=-\frac{1}{3}$$

پیوستگی در یک نقطه:

تعریف: تابع $y=f(x)$ را در نقطه $x=a$ پیوسته گوییم، هرگاه:

اولاً تابع در نقطه $x=a$ تعریف شده باشد.

ثانیاً حد تابع در نقطه a موجود و برابر مقدار تابع باشد؛ یعنی:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$$

یا

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$$

اگر تابعی در یک نقطه حداقل یکی از دو شرط بالا را نداشته باشد تابع در آن نقطه ناپیوسته است.

☜مثال:پیوستگی هر یک از توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید:

$$1) f(x)=\begin{cases} 3x^2-x & ; x>-\frac{3}{2} \\ -2x+3 & ; x<-\frac{3}{2} \end{cases}$$ در نقطه $x=-\frac{3}{2}$

چون تابع در نقطه‌ی $x=-\frac{3}{2}$ تعریف نشده است یعنی $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ وجود ندارد پس تابع در $x=-\frac{3}{2}$ ناپیوسته است.

$$2) f(x)=\begin{cases} |x-3| ; & x\neq 3 \\ 2 ; & x=3 \end{cases}$$ در نقطه $x=3$

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=2 \\ \lim_{x\to 3} |x-3|=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x)\neq f(3) \Rightarrow$$ تابع در نقطه $x=3$ پیوسته نیست.

$$3) f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$ در نقطه $x=4$

$f(4)$ وجود ندارد

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 4} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\frac{1}{4}$$

چون تابع در $x=4$ تعریف نشده است پس در این نقطه ناپیوسته است، ولی این تابع در نقطه $x=4$ حد دارد.

$$۴)f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+۱}{x-۱} & ; \quad x>۳\\ ۲ & ; \quad x=۳\\ ۵x-۱۳ & ; \quad x<۳\end{cases}$$ در نقطه $x=۳$

مقدار تابع $f(۳)=۲$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{x+۱}{x-۱}=\dfrac{۳+۱}{۳-۱}=\dfrac{۴}{۲}=۲$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۳^-}۵x-۱۳=۱۵-۱۳=۲$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^+}f(x)=f(۳)$

پس تابع در $x=۳$ پیوسته است.

مثال: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{Sin}x}{\sqrt{۱-\operatorname{Cos}۲x}} & x\le ۰\\ a & x=۰\\ x+b & x>۰\end{cases}$ در نقطه $x_۰=۰$ پیوسته باشد، $a+b$ کدام است؟

حل: برای اینکه تابع در $x_۰=۰$ پیوسته باشد باید $\boxed{\text{مقدار تابع = حد چپ = حد راست}}$

حد چپ : $\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{\operatorname{Sin}x}{\sqrt{۱-\operatorname{Cos}۲x}}=\dfrac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x}{\sqrt{۱-\left(۱-\dfrac{۴x^۲}{۲}\right)}}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x}{\sqrt{۲}|x|}=\dfrac{x}{-\sqrt{۲}x}=-\dfrac{۱}{\sqrt{۲}}$

مقدار تابع: $f(۰)=a$

حد راست: $\lim\limits_{x\to ۰^+}x+b=۰+b=b \Rightarrow a=b=-\dfrac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow a+b=۲\left(-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=-\sqrt{۲}$

قضایای پیوستگی:

قضیه ۱: اگر توابع f و g در نقطه $x=a$ پیوسته باشند، آنگاه:

الف) مجموع این دو تابع یعنی $f+g$ در $x=a$ پیوسته است.

ب) تفاضل این دو تابع یعنی $f-g$ در $x=a$ پیوسته است.

ج) حاصل‌ضرب این دو تابع یعنی $f.g$ در $x=a$ پیوسته است.

د) خارج‌قسمت این دو تابع یعنی $\dfrac{f}{g}$ (با فرض $g(a)\neq ۰$) در $x=a$ پیوسته است.

نکته: توابع f و g را در نقطه $x=a$ درنظر می‌گیریم:

f	g	$f\pm g$	f.g	f/g
پیوسته	پیوسته	پیوسته	پیوسته	پیوسته یا ناپیوسته
پیوسته	ناپیوسته	ناپیوسته	پیوسته یا ناپیوسته	پیوسته یا ناپیوسته
ناپیوسته	پیوسته	ناپیوسته	پیوسته یا ناپیوسته	ناپیوسته
ناپیوسته	ناپیوسته	پیوسته یا ناپیوسته	پیوسته یا ناپیوسته	پیوسته یا ناپیوسته

به عنوان مثال: توابع $f(x)=\begin{cases}۲ & x\le ۱\\ ۳ & x>۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۳ & x\le ۱\\ ۲ & x>۱\end{cases}$ هر دو در $x=۱$ ناپیوسته‌اند ولی جمع و ضرب این دو تابع در نقطه $x=۱$ پیوسته می‌باشد، زیرا:

$$f+g=\begin{cases}۵ & ; \quad x\le ۱\\ ۵ & ; \quad x>۱\end{cases} \quad , \quad f.g=\begin{cases}۶ & ; \quad x\le ۱\\ ۶ & ; \quad x>۱\end{cases}$$

قضیه ۲: اگر تابع $f(x)$ در $x=a$ پیوسته باشد، پس تابع $kf(x)\ (k\in\mathbb{R})$ در $x=a$ پیوسته است.

☜مثال: تابع $f(x)=x^{3}$ در هر نقطه پیوسته است آنگاه طبق قضیه ۲ می‌توان گفت که تابع $f(x)=4x^{3}$ در هر نقطه پیوسته می‌شود.

قضیه ۳: اگر تابع $y=f(x)$ در $x=a$ پیوسته باشد پس تابع $y=|f(x)|$ در $x=a$ پیوسته است.

☜مثال: تابع $f(x)=x^{2}+2x$ در هر نقطه پیوسته است پس تابع $y=|f(x)|=|x^{2}+2x|$ در هر نقطه پیوسته است.

قضیه ٤: اگر تابع $f(x)$ برای همه‌ی مقادیر x متعلق به یک بازه مثبت و در نقطه‌ی a از آن بازه پیوسته باشد تابع $\sqrt{f(x)}$ نیز در نقطه a پیوسته است.

☜مثال: تابع $f(x)=x-3$ در $\mathbb{R}$ پیوسته و برای هر $x>3$، $f(x)>0$ است پس تابع $y=\sqrt{x-3}$ در هر نقطه از بازه‌ی $(3,+\infty)$ پیوسته می‌باشد.

قضیه ۵: اگر تابع $g(x)$ در a و تابع $f(x)$ در $g(a)$ پیوسته باشد، پس تابع $fog(x)$ در $x=a$ پیوسته است.

☜مثال: تابع $g(x)=\dfrac{x-1}{x^{2}+x}$ در $x=1$ پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^{2}+x}=0 \quad , g(1)=0$$

و تابع $f(x)=\mathrm{Sin}x$ در $x=0$ پیوسته است. پس طبق قضیه ۵ می‌توان نتیجه گرفت تابع $y=fog(x)=\mathrm{Sin}\dfrac{x-1}{x^{2}+x}$ در $x=1$ پیوسته می‌باشد.

نقاط ناپیوستگی (انفصال)

۱) توابع چندجمله‌ای یعنی توابعی به فرم $f(x)=ax^{n}+bx^{n-1}+\dots$ در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند و نقطه‌ی ناپیوستگی ندارند.

مثلاً تابع $f(x)=x^{3}+5x^{2}-3x+1$ در هر نقطه پیوسته است.

۲) توابع کسری (گویا) یعنی توابعی به فرم $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ در ریشه‌های مخرج ناپیوسته‌اند. مثلاً تابع $y=\dfrac{x+3}{x^{2}-4}$ در ریشه‌های مخرج یعنی در نقاط $x=\pm 2$ ناپیوسته است.

$\{-2,2\}$= مجموعه نقاط ناپیوستگی

۳) توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج یعنی توابعی به فرم $y=\sqrt[2k]{f(x)}$ در هر نقطه از دامنه تعریفشان که مقدار زیر رادیکال نامنفی باشد پیوسته‌اند. (به شرط پیوسته بودن f)

مثلاً تابع $f(x)=\sqrt{2x-1}$ در هر نقطه از بازه‌ی $[\frac{1}{2},\infty)$ از دامنه تعریفش پیوسته است چون به ازای $x\geq\frac{1}{2}$ عبارت زیر رادیکال مثبت می‌شود، ولی در تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{(x-3)^{2}}}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{(x-3)^{2}}\geq 0 \Rightarrow x-1\geq 0\Rightarrow x\geq 1\\ (x-3)^{2}\neq 0 \Rightarrow x\neq 3\end{array}\right\}$$ تابع در بازه‌ی $[1,3)\cup(3,+\infty)$ پیوسته است

٤) توابع رادیکالی با فرجه‌ی فرد یعنی توابعی به فرم $y=\sqrt[2k+1]{f(x)}$ در هر نقطه از دامنه تعریفشان پیوسته‌اند. (به شرط پیوسته بودن f)

مثلاً تابع $y=\sqrt[3]{2x-1}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۵) در توابع دو و یا چندضابطه‌ای برای تعیین نقاط ناپیوستگی ابتدا بایستی نقاط ناپیوستگی هر ضابطه را با توجه به دامنه‌ی مقابلش تعیین کنیم، سپس پیوستگی را در نقاطی که ضابطه‌ی تابع در آن نقاط عوض می‌شود بررسی نماییم.

☜مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|-2} & ;x>\sqrt{3}\\ \dfrac{1}{|x|-4} & ;x\le\sqrt{3}\end{cases}$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

۱) ۲ ۲) ٤ ۳) ۵ ٤) ۳

✍حل: گزینه ٤ پاسخ است.

$|x|-4=0\Rightarrow |x|=4\begin{cases}x=4 & \text{غ ق ق}\\ x=-4 & \text{ق ق}\end{cases}$ $\qquad$ $|x|-2=0\Rightarrow |x|=2\begin{cases}x=2 & \text{ق ق}\\ x=-2 & \text{غ ق ق}\end{cases}$

$$x=\sqrt{3}\ \begin{cases}\text{حد راست}=\dfrac{1}{|\sqrt{3}|-2}\\ \text{مقدار}=\dfrac{1}{|\sqrt{3}|-4}\\ \text{حد چپ}=\dfrac{1}{|\sqrt{3}|-4}\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}-2}\ne\frac{1}{\sqrt{3}-4}\Rightarrow x=\sqrt{3}\ \text{نقطه‌ی ناپیوستگی}$$

پس تابع در سه نقطه ۲، ٤- و $\sqrt{3}$ ناپیوسته است.

☜مثال: مجموعه نقاط ناپیوستگی نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5x^2-4x} & ;\ |x|>1\\ 2x-1 & ;\ |x|\le 1\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\{-1,1\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{-1\}$ ٤) $\varnothing$

✍حل: گزینه ۳ پاسخ است.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{5x^2-4x} & ;\ x<-1\ \vee\ x>1\\ 2x-1 & ;\ -1\le x\le 1\end{cases}$$

$5x^2-4x<0\Rightarrow x(5x-4)<0\rightarrow$

x		0		$\frac{4}{5}$	
	+		−		+

$\Rightarrow 0<x<\frac{4}{5}$

این ضابطه در $0<x<\frac{4}{5}$ ناپیوسته است که چون در دامنه‌ی مقابلش قرار ندارد قابل قبول نیست.

$2x-1\Rightarrow$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است و ناپیوستگی ندارد

پس فقط بایستی پیوستگی را در نقاط $x=1$ و $x=-1$ بررسی کنیم:

$$x=1\begin{cases}\text{حد راست} & \lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{5x^2-4x}=\sqrt{5-4}=1\\ \text{مقدار} & f(1)=2-1=1\\ \text{حد چپ} & \lim\limits_{x\to 1^-}(2x-1)=1\end{cases}\qquad \text{در } x=1 \text{ پیوسته است}$$

$$x=-1\begin{cases}\text{حد چپ} & \lim\limits_{x\to(-1)^-}\sqrt{5x^2-4x}=\sqrt{5+4}=3\\ \text{مقدار} & f(-1)=-2-1=-3\\ \text{حد راست} & \lim\limits_{x\to(-1)^+}(2x-1)=-2-1=-3\end{cases}\qquad \text{در } x=-1 \text{ ناپیوسته است}$$

☜مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{۲x}}{۲-x} & ; x\neq ۲ \\ a & ; x=۲ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x=۲$ پیوسته است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

✍حل: گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{۲x}}{۲-x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۲}\frac{۱-\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}}{-۱}=\frac{۱-\frac{۱}{۲}}{-۱}=-\frac{۱}{۲}$$: حد تابع

$f(۲)=a\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$: مقدار

☜مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x\mathrm{Sin}\frac{۱}{x} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۰$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

۱) از چپ پیوسته نیست و از راست هم پیوسته نیست. ۲) فقط از راست پیوسته است.

۳) فقط از چپ پیوسته است. ۴) هم از راست و هم از چپ پیوسته است.

✍حل: گزینه ٤ پاسخ است.

$\lim_{x\to ۰} x\mathrm{Sin}\frac{۱}{x}=۰\times$ کرانـــدار $=۰$

مقدار تابع $f(۰)=۰\Rightarrow$ تابع در صفر پیوسته است

پیوستگی در بازه:

الف) پیوستگی در بازه‌ی باز: تابع $y=f(x)$ را در بازه‌ی باز (a,b) پیوسته گوییم، هرگاه در تمام نقاط این بازه پیوسته باشد.

مثلاً تابع $y=\frac{۱}{x}$ در بازه‌ی $(۱,۴)$ پیوسته است و یا تابع $y=\frac{x^۲+۱}{x-۱}$ در بازه $(۰,۲)$ پیوسته نیست زیرا در نقطه $x=۱$ که به ایـن بازه تعلق دارد پیوسته نمی‌باشد.

ب) پیوستگی در بازه‌ی بسته: تابع $y=f(x)$ را در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته گوییم هرگاه:

در تمام نقاط بازه حد تابع با مقدار تابع برابر باشد.

مثلاً تابع $y=\sqrt{۴-x^۲}$ در بازه‌ی $[-۲,۲]$ پیوسته است زیرا:

اولاً تابع در $(-۲,۲)$ پیوسته است:

$۴-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۴\Rightarrow -۲\leq x\leq ۲$

ثانیاً:

در $x=-۲$ $\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۲)^+} y=\sqrt{۴-۴}=۰=\lim\limits_{x\to(-۲)} y \\ f(-۲)=۰ \end{cases}$

در $x=۲$ $\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۲)^-} y=\sqrt{۴-۴}=۰=\lim\limits_{x\to(-۲)} y \\ f(۲)=۰ \end{cases}$

دقت کنید که حد تابع در نقاط $x=۲$ و $x=-۲$ به‌ترتیب با حد چپ و حد راست تابع برابری می‌کند.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}-x^{۲}+۴ & ; x\geq ۱\\ ax+۵x-a & ; x<۱\end{cases}$ به ازای کدام مجموعه مقادیر a در بازه‌ی $[-۲,۲]$ پیوسته است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\{۰,۱\}$ ۴) $\{-۲,۲\}$

حل: گزینه ۱ پاسخ است.

کافی است پیوستگی را در نقطه $x=۱$ که ضابطه عوض می‌شود بررسی کنیم:

حد راست : $\lim\limits_{x\to ۱^+}(-x^{۲}+۴)=-۱+۴=۳$

مقدار: $f(۱)=-۱+۴=۳$

حد چپ : $\lim\limits_{x\to ۱^-}(ax+۵x-a)=a+۵-a=۵$

همان طور که می‌بینیم به ازای هیچ مقدار a حد راست حد چپ و مقدار تابع در نقطه $x=۱$ با هم برابر نمی‌شوند.

مثال: تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۱}{x-\sqrt{x}} & x>۱\\ ax-a+۴ & x\leq ۱\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

۱) هیچ مقدار ۲) هر مقدار حقیقی a ۳) فقط $a=۰$ ۴) فقط $a=۴$

حل: گزینه ۲ پاسخ است.

کافی است پیوستگی تابع را در نقطه $x=۱$ بررسی کنیم

حد راست : $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x^{۲}-۱}{x-\sqrt{x}}=\dfrac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{۲x}{۱-\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}}=\dfrac{۲}{۱-\dfrac{۱}{۲}}=۴$

مقدار تابع: $f(۱)=a-a+۴=۴$

حد چپ : $\lim\limits_{x\to ۱^-}(ax-a+۴)=a-a+۴=۴$

همان طور که می‌بینیم همواره در $x=۱$، مقدار = حد چپ = حد راست است و بستگی به a ندارد پس به ازای هر مقدار حقیقی a تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

مثال: تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}}{x^{۲}-۲ax+۳a-۲}$ به ازای چه مقدار a همواره پیوسته است؟

۱) $۱<a<۲$ ۲) $a>۳$ ۳) $a\geq ۱$ ۴) $a<۱$ یا $a>۲$

حل: گزینه ۱ پاسخ است.

برای آنکه تابع همواره پیوسته باشد باید مخرج کسر فاقد ریشه باشد یعنی معادله‌ی $x^{۲}-۲ax+۳a-۲=۰$ ریشه نداشته باشد پس بایستی:

مخرج $\Delta'<۰\Rightarrow b'-ac<۰\Rightarrow (a)^{۲}-(۱)(۳a-۲)<۰\Rightarrow a^{۲}-۳a+۲<۰\Rightarrow (a-۲)(a-۱)<۰$

x		۱		۲	
	+	۰	−	۰	+
			ق ق		

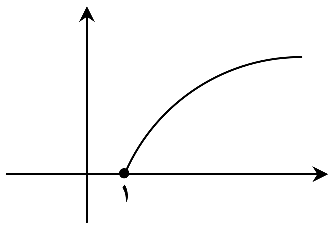
پس باید $۱<a<۲$ باشد.

مثال: تابع $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x^2}$ در کدام فاصله پیوسته است؟

۱) $x \le 0$ ۲) $x \ge 1$ ۳) $x < 2$ ٤) $1 \le x \le 2$

حل: گزینه ٤ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} x-1\ge 0 \Rightarrow x\ge 1 \\ 4-x^2\ge 0 \Rightarrow x^2\le 4 \Rightarrow |x|\le 2 \Rightarrow -2\le x\le 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} 1\le x\le 2$$



تذکر مهم: تابع $y=\sqrt{x-1}$ در بازه‌ی $[1,+\infty)$ پیوسته است زیرا اولاً در بازه‌ی $(1,+\infty)$ پیوسته و ثانیاً در $x=1$ حد راست تـابع همان حد تابع است، پس پیوسته است.