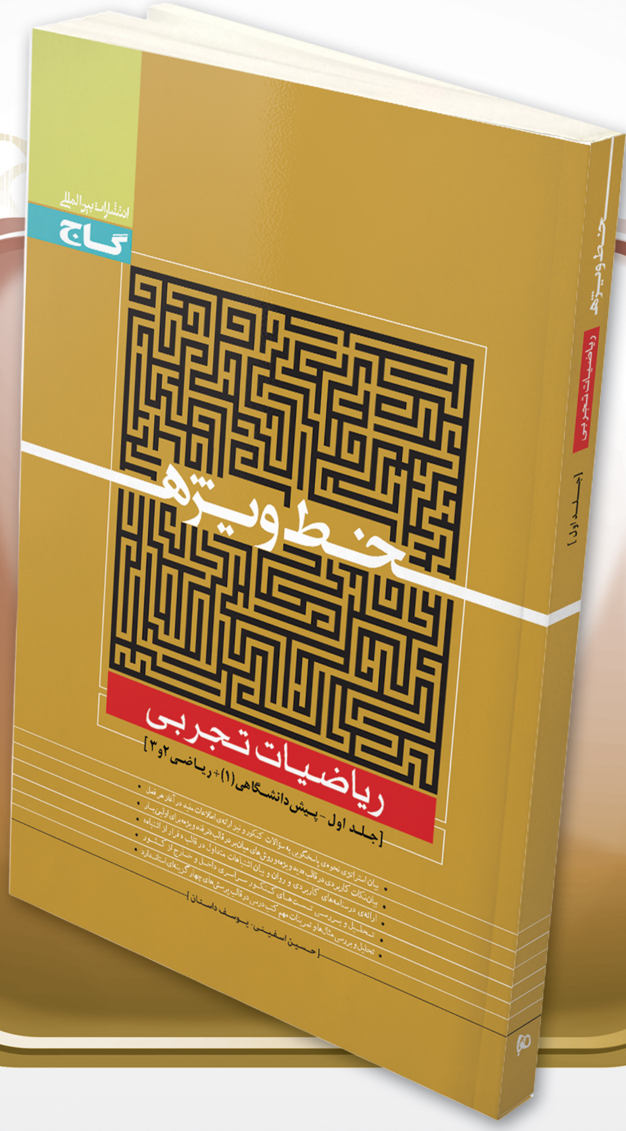
گاج

از سری کتاب‌های خط ویژه



ریاضیات تجربی

- بیان استراتژی نحوه‌ی پاسخگویی به سؤالات کنکور و نیز ارائه‌ی اطلاعات مفید در آغاز هر فصل
- بیان نکات کاربردی در قالب «دید ویژه» و روش‌های میان‌بر در قالب «ترفند ویژه» برای اولین بار
- ارائه‌ی درسنامه‌های کاربردی و روان و بیان اشتباهات متداول در قالب « فرار از اشتباه»
- تحلیل و بررسی تست‌های کنکور سراسری داخل و خارج از کشور
- تحلیل و بررسی مثال‌ها و تمرینات مهم کتب درسی در قالب پرسش‌های چهارگزینه‌ای استاندارد

۱ پدیده‌های تصادفی و فضای نمونه‌ای

پدیده‌های تصادفی: به هر پدیده یا آزمایشی که از همه‌ی حالت‌های وقوع آن مطلع باشیم، اما از این‌که کدام حالت قطعاً رخ می‌دهد مطلع نباشیم، پدیده‌ی تصادفی گفته می‌شود. برای مثال، در پرتاب یک تاس از قبل می‌دانیم یکی از اعداد ۱ تا ۶ رو می‌شود، اما کدام‌یک رو می‌شود را نمی‌دانیم.

فضای نمونه‌ای (S): مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن یک پدیده‌ی تصادفی را فضای نمونه‌ای می‌نامیم. / شهریور ۹۳/

برای مثال، فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه $S=\{\text{ر},\text{پ}\}$ و فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است.

تذکر

۱) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای با $n(S)$ نمایش داده می‌شود.

۲) اگر اعضای فضای نمونه‌ای S، قابل شمارش باشد آن را یک فضای نمونه‌ای گسسته می‌نامیم. / شهریور ۹۴/

◀ مسائل این بخش در دو تیپ دسته‌بندی می‌شوند.

تیپ ۱ نوشتن مجموعه‌ی فضای نمونه‌ای

کلید حل: برای یافتن فضای نمونه‌ای یک پدیده‌ی تصادفی، باید یک مجموعه تشکیل داد و تمامی حالت‌های ممکن در رخداد آن پدیده‌ی تصادفی را در آن نوشت.

مثال‌ها

۱. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان این خانواده را مشخص کنید. / دی ۹۴/

پاسخ

$$S=\left\{\begin{matrix}(\text{د,د,د}),(\text{پ,د,د}),(\text{پ,د,پ}),(\text{پ,پ,د})\\(\text{پ,پ,پ}),(\text{پ,د,د}),(\text{د,پ,د}),(\text{د,د,پ})\end{matrix}\right\}$$

۲. یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی را بنویسید. / شهریور ۹۰ و دی ۹۱ و دی ۹۲/

پاسخ

$$S=\left\{\begin{matrix}(۱,\text{ر}),(۱,\text{پ}),(۲,\text{ر}),(۲,\text{پ}),(۳,\text{ر}),(۳,\text{پ})\\(۴,\text{ر}),(۴,\text{پ}),(۵,\text{ر}),(۵,\text{پ}),(۶,\text{ر}),(۶,\text{پ})\end{matrix}\right\}$$

۳. یک سکه را به هوا پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» آمد یک تاس می‌اندازیم، در غیر این صورت دو سکه‌ی دیگر پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

پاسخ

سکه‌ی اول $\xrightarrow{\text{رو}}$ یک تاس
سکه‌ی اول $\xrightarrow{\text{پشت}}$ دو سکه

$$\Rightarrow S=\left\{\begin{matrix}(\text{ر},۱),(\text{ر},۲),(\text{ر},۳),(\text{ر},۴)\\,(\text{ر},۵),(\text{ر},۶),(\text{پ,پ,پ})\\,(\text{پ,ر,پ}),(\text{پ,پ,ر}),(\text{ر,ر,پ})\end{matrix}\right\}$$

تیپ ۲ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

کلید حل: برای یافتن تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $(n(S))$ داریم:

۱) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب n سکه به صورت همزمان (یا n بار پرتاب یک سکه) یا تولد n فرزند برابر است با: $n(S)=۲^n$

۲) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب n تاس به صورت همزمان، و یا پرتاب یک تاس، n بار متوالی برابر است با: $n(S)=۶^n$

۳) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب همزمان m سکه و n تاس برابر است با: $n(S)=۲^m\times ۶^n$

۴) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای تولد n نفر در:

الف) روزهای هفته، برابر با ۷^n است.

ب) ماه‌های سال، برابر با ۱۲^n است.

ج) فصل‌های سال، برابر با ۴^n است.

د) روزهای سال، برابر با ۳۶۵^n است.

۵) گاهی اوقات برای یافتن تعداد اعضای فضای نمونه‌ای لازم است از مفاهیم اصل ضرب و یا جایگشت استفاده کنیم.

مثال‌ها

۴. سه سکه را با هم می‌اندازیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی چند عضو دارد؟ / دی ۹۲/

پاسخ

$$n=۳\Rightarrow n(S)=۲^n=۲^۳=۸$$

۵. سه تاس متمایز را همزمان پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی چند عضو دارد؟ / تمرین کتاب درسی/

پاسخ

$$n=۳\Rightarrow n(S)=۶^n=۶^۳=۲۱۶$$

۶. یک تاس و دو سکه را همزمان پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی چند عضو دارد؟ / مشابه دی ۹۱/

پاسخ

یک تاس $(n=۱)$ و دو سکه $(m=۲)$ داریم:

$$\begin{cases}n=۱\\m=۲\end{cases}\Rightarrow n(S)=۶^۱\times ۲^۲=۲۴$$

۲ پیشامد تصادفی

هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای را، یک **پیشامد تصادفی** می‌نامیم. / شهریور ۹۱/

به عنوان مثال، پیشامد ظاهر شدن عدد زوج در پرتاب یک تاس $A=\{۲,۴,۶\}$ است.

پیشامد نشدنی $(A=\varnothing)$: با توجه به فضای نمونه‌ای اگر وقوع یک پیشامد امکان‌پذیر نباشد، به آن پیشامد نشدنی می‌گویند. به عنوان مثال در فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس، پیشامد رو شدن عددی بزرگ‌تر از ۶ یک پیشامد نشدنی است. / شهریور ۹۲/

پیشامد حتمی $(A=S)$: در صورتی که یک پیشامد شامل تمام اعضای فضای نمونه‌ای باشد به آن پیشامد حتمی می‌گوییم. به عنوان مثال پیشامد رو شدن عددی کوچک‌تر از ۷ در پرتاب یک تاس یک پیشامد حتمی است.

مثـــال‌هـــا

۷. هریک از اعداد زوج طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت نوشته و یکی از کارت‌ها را به تصادف بر می‌داریم. مطلوب است: / دی ۹۰

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش.

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت، اول باشد.

پاسـخ

الف $S=\{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸\}$

ب پیشامد A باید زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای S باشد، بنابراین داریم:

$A=\{۲\}$

۸. تاسی را دوبار می‌اندازیم، مطلوبست:

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی.

ب) پیشامد A که در آن عدد رو شده‌ی تاس اول ۳ باشد.

ج) پیشامد B که در آن مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۷ باشد. / شهریور ۹۴

پاسـخ

الف $n(S)=۶^۲=۳۶$

ب $A=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}$

ج $B=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$

نکتـه زمانی می‌توان گفت پیشامد A رخ داده است که نتیجه‌ی آزمایش تصادفی عضوی از این پیشامد باشد. برای مثال اگر عدد رو شده‌ی یک تاس ۲ باشد، آن‌گاه پیشامد اول بودن عدد رو شده رخ داده است.

۹. خانواده‌ای دارای سه فرزند است. اگر A پیشامد هم‌جنس بودن دو فرزند اول و B پیشامد وجود یک فرزند پسر و C پیشامد برابر بودن تعداد دختر و پسر در این خانواده باشد،

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامدهای A، B و C را مشخص کنید. / شهریور ۹۲

پاسـخ

الف $S=\left\{\begin{matrix}(پ,پ,پ),(پ,پ,د),(پ,د,پ),(د,پ,پ),\\(د,د,پ),(د,پ,د),(پ,د,د),(د,د,د)\end{matrix}\right\}$

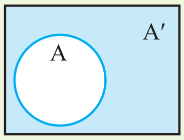
ب $A=\{(پ,پ,پ),(پ,پ,د),(د,د,پ),(د,د,د)\}$

$B=\{(پ,د,د),(د,پ,د),(د,د,پ)\}$

$C=\varnothing$

از آنجایی که این خانواده سه فرزند دارد، بنابراین تعداد دختران و پسران نمی‌تواند برابر باشد و C یک پیشامد نشدنی است.

۳ اعمال روی پیشامدها



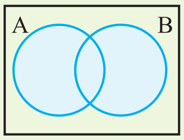
۱- پیشامد متمم (A'): پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

تذکر با توجه به تعریف متمم، نتایج زیر همواره برقرار است:

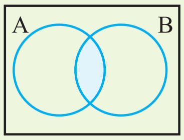
۱ $A\cup A'=S$

۲ $A\cap A'=\varnothing$

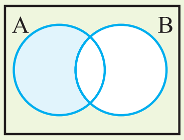
۳ $n(A)+n(A')=n(S)$



۲- پیشامد اجتماع $(A\cup B)$: پیشامد $A\cup B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهند.



۳- پیشامد اشتراک $(A\cap B)$: پیشامد $A\cap B$ زمانی رخ می‌دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهند.



۴- پیشـامد تفاضل $(A-B)$: پیشـامد $A-B$ زمانـی رخ می‌دهـد کـه پیشـامد A رخ دهـد ولـی پیشـامد B رخ ندهـد.

تذکـر به طور مشابه می‌توان مجموعه‌ی $B-A$ را تعریف کرد.

نکتـه روابط زیر همواره بین دو پیشامد A و B برقرار است:

۱ $A-B=A\cap B'$

۲ $A'\cap B'=(A\cup B)'$

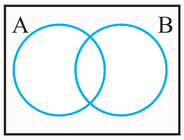
۳ $A'\cup B'=(A\cap B)'$

سوالات این بخش در دو تیپ دسته‌بندی می‌شوند.

تیپ ۱ مشخص کردن پیشامد در نمودار وِن

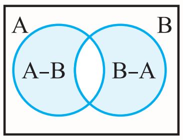
کلیـد حـل: با اسـتفاده از مفاهیمی نظیر اجتماع، اشـتراک، تفاضل و متمم، مجموعه‌ی خواسـته شـده را یافته و در یک نمودار وِن، پیشـامد مورد نظـر را هاشـور می‌زنیم.

مثـــال‌هـــا



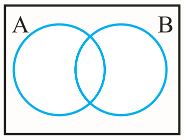
۱۰. با توجه به شکل مقابل، پیشامد $(A-B)\cup(B-A)$ را هاشور بزنید. / خرداد ۹۳

پاسـخ



هر یک از دو پیشامد $A-B$ و $B-A$ را هاشور می‌زنیم.

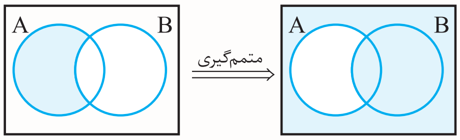
$\Leftrightarrow (A-B)\cup(B-A)$



۱۱. با توجه به شکل مقابل، پیشامد $(A-B)'$ را هاشور بزنید. / دی ۹۴

پاسـخ

ابتدا مجموعه‌ی $A-B$ را تشکیل می‌دهیم و سپس متمم آن را مشخص می‌کنیم.



A–B   (A–B)'

تیپ ۲ تشکیل مجموعه‌ی پیشامد با استفاده از مفاهیم

کلید حل: با استفاده از مفاهیم جبر مجموعه‌ها، پیشامد مورد نظر را تشکیل می‌دهیم. لازم به ذکر است هرگاه در سؤالی از واژه‌ی «یا» بین دو پیشامد استفاده شود، منظور اجتماع آن دو پیشامد و هرگاه واژه‌ی «و» استفاده شود، منظور اشتراک آن دو پیشامد است.

۱ پیشامد وقوع A یا B $\Leftrightarrow A\cup B$

۲ پیشامد وقوع A و B $\Leftrightarrow A\cap B$

مثال‌ها

۱۲. اگر A' متمم پیشامد A باشد، آن‌گاه A' زمانی رخ می‌دهد که .... / شهریور ۹۲/

پاسخ

A رخ ندهد.

۱۳. اگر $A\subseteq S$ و A' متمم A باشد، آن‌گاه $A\cap A' = \dots$ و $A\cup A' = \dots$. / شهریور ۹۰/

پاسخ

$A\cup A' = S$ و $A\cap A' = \varnothing$

۱۴. یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوبست: / دی ۹۲/

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی.

ب) پیشامد A که در آن تاس عدد فرد بیاید.

ج) پیشامد B که در آن سکه «رو» و تاس عدد کوچک‌تر از ۵ بیاید.

پاسخ

الف) S = {(۱,ر),(۲,ر),(۳,ر),(۴,ر),(۵,ر),(۶,ر),(۱,پ),(۲,پ),(۳,پ),(۴,پ),(۵,پ),(۶,پ)}

ب) A = {(۱,ر),(۱,پ),(۳,ر),(۳,پ),(۵,ر),(۵,پ)}

ج) B = {(۱,ر),(۲,ر),(۳,ر),(۴,ر)}

۱۵. هر یک از اعداد زوج و طبیعی کوچک‌تر از ۱۹ را روی یک کارت نوشته و یکی از کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم. مطلوب است: / شهریور ۹۳/

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی.

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

ج) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول یا فرد باشد.

د) پیشامد $A\cap B$

پاسخ

الف) $S = \{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸\}$

ب) $A = \{۱۰\}$

ج) $B = \{۲\}$

د) $A\cap B = \{۱۰\}\cap\{۲\} = \varnothing$

۴ احتمال رخداد یک پیشامد ($P(A)$):

اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، احتمال رخداد پیشامد A را با $P(A)$ نشان می‌دهیم و برای محاسبه‌ی آن از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}$$

تذکر

۱ پیشامد A همواره زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای S است. بنابراین داریم:

$$A\subseteq S \Rightarrow ۰\le n(A)\le n(S) \Rightarrow ۰\le P(A)\le ۱$$

۲ احتمال پیشامد نشدنی برابر صفر ($P(\varnothing) = ۰$) و احتمال پیشامد حتمی برابر یک ($P(S) = ۱$) است.

◀ **مسائل این بخش در پنج تیپ دسته‌بندی می‌شوند.**

تیپ ۱ پرتاب سکه یا فرزندان خانواده

کلید حل: مسائل پرتاب سکه همانند مسائل جنسیت فرزندان خانواده ۲ حالت دارد. در این مسائل ابتدا باید فضای نمونه‌ای تشکیل شود و سپس پیشامد مورد نظر و احتمال آن را یافت.

مثال‌ها

۱۶. خانواده‌ای سه فرزند دارد: / شهریور ۹۱/

الف) فضای نمونه‌ای آن را بنویسید.

ب) احتمال آن‌که خانواده فقط یک دختر داشته باشد را محاسبه کنید.

ج) احتمال آن‌که خانواده حداقل ۲ پسر داشته باشد را محاسبه کنید.

پاسخ

الف) S = {(د,د,د),(د,د,پ),(د,پ,د),(پ,د,د),(پ,پ,پ),(پ,پ,د),(پ,د,پ),(د,پ,پ)} $\Rightarrow n(S) = ۸$

ب) A پیشامد فقط یک دختر است.

A = {(د,پ,پ),(پ,د,پ),(پ,پ,د)}

$$\Rightarrow n(A) = ۳ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۸}$$

ج) B پیشامد حداقل ۲ پسر است، حداقل ۲ پسر یعنی یا ۲ پسر یا ۳ پسر.

B = {(د,پ,پ),(پ,د,پ),(پ,پ,د),(پ,پ,پ)}

$$\Rightarrow n(B) = ۴ \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

۱۷. یک سکه را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که به صورت یک در میان «رو» و «پشت» بیاید را به دست آورید. / خرداد ۸۸ و مشابه دی ۹۴/

پاسخ

ابتدا فضای نمونه‌ای را مشخص می‌کنیم و سپس پیشامد مورد نظر و احتمال آن را می‌یابیم.

S = {(پ,پ,پ),(پ,پ,ر),(پ,ر,پ),(ر,پ,پ),(ر,ر,پ),(ر,پ,ر),(پ,ر,ر),(ر,ر,ر)}

A = {(پ,ر,پ),(ر,پ,ر)}

$$\Rightarrow n(S) = ۸ \text{ و } n(A) = ۲ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۴}$$

تیپ ۲ پرتاب تاس

کلید حل: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در پرتاب n تاس (یا n بار پرتاب یک تاس)، ۶^n است. برای حل مسائل احتمال پرتاب چند تاس ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه‌ای و سپس پیشامد مورد نظر را می‌یابیم و در نهایت با محاسبه‌ی تعداد اعضای پیشامد، احتمال آن را محاسبه می‌کنیم.

مثال‌ها

۱۸. دو تاس را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که مجموع اعداد روشده‌ی دو تاس ۷ یا ۸ باشد را بیابید.

پاسخ

A را پیشامد مجموع۷ و B را پیشامد مجموع۸ در نظر می‌گیریم.

$$n(S)=۶^۲=۳۶$$

$$A=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$$

$$B=\{(۲,۶),(۶,۲),(۳,۵),(۵,۳),(۴,۴)\}$$

واژه‌ی «یا» در صورت سؤال به معنای $A\cup B$ است.

$$A\cup B=\left\{\begin{matrix}(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\\ ,(۲,۶),(۶,۲),(۳,۵),(۵,۳),(۴,۴)\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow n(A\cup B)=۱۱\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{۱۱}{۳۶}$$

۱۹. تاسی را سه بار می‌اندازیم. مطلوب است احتمال آن‌که مجموع اعداد رو شده‌ی سه تاس کوچک‌تر از ۵ باشد. / دی ۹۰/

پاسخ

حداقل مجموع اعداد رو شده‌ی سه تاس برابر ۳ و حداکثر این مجموع با توجه به صورت مسئله ۴ می‌شود.

$$n(S)=۶^۳=۲۱۶$$

$$A=\{(۱,۱,۱),(۱,۱,۲),(۱,۲,۱),(۲,۱,۱)\}$$

$$\Rightarrow n(A)=۴\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۲۱۶}=\frac{۱}{۵۴}$$

تیپ ۳ پرتاب n تاس و m سکه

کلید حل: در پرتاب n تاس و m سکه، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با: $n(S)=۶^n\times ۲^m$

مثال‌ها

۲۰. یک تاس و دو سکه را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که سکه‌ی اول «رو» و تاس عدد ۴ بیاید.

پاسخ

$$\begin{cases}n(S)=۶^۱\times ۲^۲=۲۴\\ A=\{(ر,ر,۴),(ر,پ,۴)\}\Rightarrow n(A)=۲\end{cases}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۲۴}=\frac{۱}{۱۲}$$

سکه‌ی دوم
سکه‌ی اول

تیپ ۴ تولد

کلید حل: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای تولد n نفر در:

۱ روزهای هفته، برابر با ۷^n است.

۲ روزهای سال، برابر با ۳۶۵^n است.

۳ ماه‌های سال، برابر با ۱۲^n است.

۴ فصل‌های سال، برابر با ۴^n است.

مثال‌ها

۲۱. ۴ نفر را در نظر می‌گیریم. چقدر احتمال دارد:

الف) هر چهار نفر در یک روز از هفته متولد شده باشند؟

ب) هیچ دو نفری در یک روز از هفته متولد نشده باشند؟ / دی ۹۴/

پاسخ

الف

$$n(S)=۷^۴\ ,\ n(A)=۷\times ۱\times ۱\times ۱=۷$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷}{۷^۴}=\frac{۱}{۷^۳}$$

ب

$$n(S)=۷^۴\ ,\ n(B)=۷\times ۶\times ۵\times ۴$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱۲۰}{۷^۳}$$

۲۲. چقدر احتمال دارد در یک تیم کوهنوردی ۳ نفره:

الف) همه در ماه تیر متولد شده باشند؟ / خرداد ۹۳/

ب) هیچ دو نفری در یک ماه از سال متولد نشده باشند؟

پاسخ

الف

$$n(S)=۱۲^۳\ ,\ n(A)=۱$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۱۲^۳}$$

ب

$$n(S)=۱۲^۳\ ,\ n(B)=۱۲\times ۱۱\times ۱۰$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰}{۱۲^۳}=\frac{۱۱۰}{۱۴۴}$$

تیپ ۵ انتخاب یا جایگشت

کلید حل: با استفاده از مفاهیم انتخاب r شیء از n شیء و یا جایگشت چند شیء متمایز در کنار هم سؤالاتی در مبحث احتمال مطرح می‌شود که لازم است با استفاده از این مفاهیم تعداد اعضای فضای نمونه‌ای و تعداد اعضای پیشامد محاسبه شود. نکات کاربردی زیر را به خاطر بسپارید.

۱ (انتخاب r شیء از n شیء)۱۴ $\binom{n}{r}=C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

۲ (جایگشت‌های r تایی n شیء متمایز) $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$

اکثر سؤالات مطرح شده در امتحانات نهایی مربوط به همین تیپ است.

مثال‌ها

۲۳. از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی است، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوبست محاسبه‌ی احتمال آن‌که: / شهریور ۹۲

الف) هر سه مهره هم‌رنگ باشند.

ب) دو مهره آبی و یک مهره قرمز باشد.

پاسخ

الف

$$P(A)=\frac{\overset{\text{هر سه مهره قرمز}}{\binom{۵}{۳}}\overset{\text{یا}}{+}\overset{\text{هر سه مهره آبی}}{\binom{۴}{۳}}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۱۴}{۸۴}=\frac{۱}{۶}$$

ب

$$P(B)=\frac{\overset{\text{دو مهره آبی}}{\binom{۴}{۲}}\overset{\text{و}}{\times}\overset{\text{یک مهره قرمز}}{\binom{۵}{۱}}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۳۰}{۸۴}=\frac{۵}{۱۴}$$

۲۴. از بین ۴ دانش‌آموز سال سوم و ۶ دانش‌آموز سال دوم، سه نفر را انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که حداکثر یک دانش‌آموز از سال سوم باشد، چقدر است؟ / دی ۹۲

پاسخ

حداکثر یک دانش‌آموز از سال سوم یعنی یا صفر دانش‌آموز سال سومی یا یک دانش‌آموز سال سومی.

$$P(A)=\frac{\overset{\text{یک سال سومی و دو سال دومی}}{\binom{۴}{۱}\times\binom{۶}{۲}}\overset{\text{یا}}{+}\overset{\text{هر سه سال دومی}}{\binom{۴}{۰}\times\binom{۶}{۳}}}{\binom{۱۰}{۳}}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۶۰+۲۰}{۱۲۰}=\frac{۸۰}{۱۲۰}=\frac{۲}{۳}$$

۲۵. ۵ نفر که دو نفر آن‌ها خواهر یک‌دیگرند به تصادف در یک ردیف می‌ایستند، چقدر احتمال دارد: / خرداد ۹۴

الف) دو خواهر کنار هم قرار گرفته باشند؟

ب) دو خواهر در اول و آخر صف واقع شده باشند؟

پاسخ

الف دو خواهر را یکی در نظر می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$\begin{cases}n(A)=۴!\times\overset{\text{جایگشت دو خواهر}}{۲!}\\ n(S)=۵!\end{cases}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴!\times ۲!}{۵!}=\frac{۲}{۵}$$

ب دو خواهر در اول و آخر صف و سه نفر در میان آن‌ها قرار می‌گیرند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}n(B)=۳!\times\overset{\text{جایگشت دو خواهر}}{۲!}\\ n(S)=۵!\end{cases}\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳!\times ۲!}{۵!}=\frac{۱}{۱۰}$$

۲۶. در جعبه‌ای ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب موجود است. سه لامپ به تصادف و هم‌زمان خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که لامپ‌ها از یک نوع باشند را بیابید. / شهریور ۹۰

پاسخ

احتمال آن‌که لامپ‌ها از یک نوع باشند، یعنی سه لامپ انتخابی یا هر سه سالم باشند یا هر سه معیوب.

$$P(A)=\frac{\overset{\text{هر سه سالم}}{\binom{۶}{۳}}\overset{\text{یا}}{+}\overset{\text{هر سه معیوب}}{\binom{۴}{۳}}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۲۴}{۱۲۰}=\frac{۱}{۵}$$

۲۷. می‌خواهیم از بین ۴ دانش‌آموز کلاس اول و ۶ دانش‌آموز کلاس دوم، یک تیم ۳ نفره به تصادف انتخاب کنیم. چقدر احتمال دارد. / شهریور ۹۴

الف) هیچ دانش‌آموز کلاس اولی در تیم نباشد؟

ب) تعداد دانش‌آموزان کلاس دوم در تیم انتخابی از تعداد دانش‌آموزان کلاس اول بیشتر باشد؟

پاسخ

الف

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\overset{\text{هر سه از کلاس دوم}}{\binom{۶}{۳}}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۲۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۶}$$

ب در این حالت از سه نفر انتخابی یا هر سه باید از سال دوم باشند یا دو نفر از سال دوم و یک نفر از سال اول.

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\binom{۶}{۳}\overset{\text{و}}{\times}\binom{۴}{۰}\overset{\text{یا}}{+}\binom{۶}{۲}\overset{\text{و}}{\times}\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}}$$

$$P(B)=\frac{۲۰+۶۰}{۱۲۰}=\frac{۸۰}{۱۲۰}=\frac{۲}{۳}$$

۵ قانون جمع احتمالات

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آن‌گاه داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

تذکر در رابطه‌ی فوق $P(A\cup B)$ احتمال آن است که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد و $P(A\cap B)$ احتمال آن است که پیشامدهای A و B هر دو هم‌زمان رخ دهند.

مثال‌ها

۲۸. از مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۳۰، عددی انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، عدد انتخاب شده مضرب ۳ یا مضرب ۴ است؟

پاسخ

واژه‌ی «یا» در صورت سؤال نشان‌دهنده‌ی این است که باید از اجتماع دو پیشامد مضرب ۳ بودن (A) و مضرب ۴ بودن (B) استفاده کنیم.

$$S=\{۱,۲,۳,\ldots,۲۹,۳۰\}\Rightarrow n(S)=۳۰$$

$$A=\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸,۲۱,۲۴,۲۷,۳۰\}\Rightarrow n(A)=۱۰$$

$$B=\{۴,۸,۱۲,۱۶,۲۰,۲۴,۲۸\}\Rightarrow n(B)=۷$$

$$A\cap B=\{۱۲,۲۴\}\Rightarrow n(A\cap B)=۲$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=\frac{۱۰}{۳۰}+\frac{۷}{۳۰}-\frac{۲}{۳۰}=\frac{۱۵}{۳۰}=\frac{۱}{۲}$$

۲۹. یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است: / شهریور ۹۰/

الف) پیشامد آن‌که عدد روی تاس بزرگ‌تر از ۵ باشد.

ب) احتمال آن‌که سکه "پشت" یا تاس ۴ بیاید.

پاسخ

الف $A=\{(۶,\text{ر}),(۶,\text{پ})\}$

ب $n(S)=\overset{\text{تعداد حالت تاس}}{۶}\times\overset{\text{تعداد حالت سکه}}{۲}=۱۲$

واژه‌ی «یا» به معنی اجتماع بین دو پیشامد است.

$$\text{سکه "پشت"}: B=\left\{\begin{matrix}(۱,\text{پ}),(۲,\text{پ}),(۳,\text{پ})\\(۴,\text{پ}),(۵,\text{پ}),(۶,\text{پ})\end{matrix}\right\}\Rightarrow n(B)=۶$$

$$\text{تاس ۴}: C=\{(۴,\text{ر}),(۴,\text{پ})\}\Rightarrow n(C)=۲$$

$$\text{تاس ۴ و سکه "پشت"}: B\cap C=\{(۴,\text{پ})\}\Rightarrow n(B\cap C)=۱$$

$$\Rightarrow P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)$$

$$P(B\cup C)=\frac{۶}{۱۲}+\frac{۲}{۱۲}-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۷}{۱۲}$$

نکته اگر A' متمم پیشامد A در فضای نمونه‌ای S باشد، آن‌گاه داریم:

$$P(A\cup A')=P(A)+P(A')-P(A\cap A')$$

$$\Rightarrow P(S)=P(A)+P(A')-P(\varnothing)$$

$$\Rightarrow P(A)+P(A')=۱$$

در حل برخی سؤالات می‌توان به جای محاسبه‌ی مستقیم احتمال $P(A)$، احتمال متمم آن $(P(A'))$ را یافت و از رابطه‌ی فوق استفاده کرد.

۳۰. **احتمال آن‌که دانش‌آموزی در درس ریاضی قبول نشود ۰/۴ و احتمال این‌که در درس فیزیک قبول شود ۰/۷ و احتمال آن‌که در هر دو درس قبول شود ۰/۵ است. احتمال آن‌که حداقل در یکی از دروس ریاضی و فیزیک قبول شود چه‌قدر است؟** / دی ۸۹/

پاسخ

A: پیشامد قبول شدن در درس ریاضی

B: پیشامد قبول شدن در درس فیزیک

$$P(A)=۱-P(A')=۱-۰/۴=۰/۶$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=۰/۶+۰/۷-۰/۵=۰/۸$$

۳۱. **اگر $P(A')=۰/۳$ ، $P(B)=۰/۷$ و $P(A\cup B)=۰/۹$ باشد، آن‌گاه $P(A\cap B)$ را بیابید.** / دی ۹۲/

پاسخ

$$P(A)=۱-P(A')=۱-۰/۳=۰/۷$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

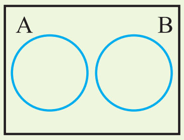
$$\Rightarrow ۰/۹=۰/۷+۰/۷-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۵$$

۶ پیشامدهای ناسازگار

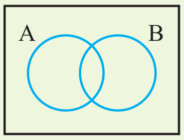
اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A\cap B=\varnothing$ باشد، در این صورت A و B را دو پیشامد **ناسازگار** می‌نامیم. / شهریور ۹۱ و دی ۹۲/

در صورتی که دو پیشامد A و B اشتراک داشته باشند، یعنی $A\cap B\neq\varnothing$، می‌توانیم بگوییم A و B سازگارند.

نمودار وِن دو پیشامد سازگار و ناسازگار مطابق شکل است:



A و B ناسازگار



A و B سازگار

مثال‌ها

۳۲. **اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و رابطه‌ی $A\cap B\neq\varnothing$ برقرار باشد، آن‌گاه دو پیشامد A و B .... می‌باشند.** / شهریور ۹۴/

پاسخ

$A\cap B\neq\varnothing\Rightarrow$ دو پیشامد A و B سازگارند.

۳۳. **خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. اگر A پیشامد دختر بودن دو فرزند سوم و چهارم و B پیشامد بیشتر بودن تعداد فرزندان پسر از تعداد فرزندان دختر باشد، آن‌گاه پیشامد $A-B$ دارای چند عضو است؟**

پاسخ

هر یک از دو پیشامد A و B را با اعضایشان نشان می‌دهیم:

فرزند چهارم　فرزند اول

$$A=\{(\text{پ,پ,د,د}),(\text{د,پ,د,د}),(\text{پ,د,د,د}),(\text{د,د,د,د})\}$$

$$B=\{(\text{پ,پ,پ,پ}),(\text{د,پ,پ,پ}),(\text{پ,د,پ,پ}),(\text{پ,پ,د,پ}),(\text{پ,پ,پ,د})\}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود دو پیشامد A و B هیچ اشتراکی ندارند و نسبت به هم ناسازگارند. پس داریم:

$$A-B=A-\underbrace{(A\cap B)}_{\varnothing\ \text{ناسازگار}}=A$$

بنابراین پیشامد $A-B$ همان پیشامد A می‌باشد که تعداد اعضای آن برابر ۴ عضو است.

نکته با توجه به قانون جمع احتمالات، اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، چون $A\cap B=\varnothing$ و $P(\varnothing)=۰$، بنابراین خواهیم داشت:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

در حالت کلی‌تر، برای n پیشامد دوبه‌دو ناسازگار، $A_۱$ و $A_۲$ و ... و A_n خواهیم داشت: $P(A_۱\cup A_۲\cup\ldots\cup A_n)=P(A_۱)+P(A_۲)+\ldots+P(A_n)$

۳۴. **اگر $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ باشد، آن‌گاه دو پیشامد A و B نسبت به هم ....** / دی ۹۰/

پاسخ

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Rightarrow P(A\cap B)=۰\Rightarrow$ A و B ناسازگار می‌باشند.

۳۵. از مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۳۰ عددی انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد انتخاب شده مضرب ۴ یا اول است؟

پاسخ

پیشامد اول بودن را با A و پیشامد مضرب ۴ بودن را با B نشان می‌دهیم. واضح است که این دو پیشامد نسبت به هم ناسازگارند.

$$S=\{۱,۲,\dots,۳۰\}\Rightarrow n(S)=۳۰$$

$$A=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹\}\Rightarrow n(A)=۱۰$$

$$B=\{۴,۸,۱۲,۱۶,۲۰,۲۴,۲۸\}\Rightarrow n(B)=۷$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{۱۰}{۳۰}+\frac{۷}{۳۰}=\frac{۱۷}{۳۰}$$

۷ پیشامدهای مستقل

پیشامدهای مستقل: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و وقوع یا عدم وقوع هریک در وقوع یا عدم وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد، آن‌گاه این دو پیشامد را مستقل از هم می‌نامیم. برای مثال در پرتاب یک سکه و یک تاس، پشت آمدن در سکه و ۶ آمدن در تاس، دو پیشامد مستقل‌اند.

قانون ضرب احتمالات برای دو پیشامد مستقل: اگر A و B دو پیشامد **مستقل** از هم باشند، آن‌گاه داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

تذکر برای بررسی مستقل بودن دو پیشامد A و B می‌توان گفت اگر $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ برقرار بود، آن‌گاه دو پیشامد A و B مستقل‌اند.

مثال‌ها

۳۶. اگر A و B دو پیشامد .... از هم باشند، آن‌گاه $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ خواهد بود. / دی ۹۰/

پاسخ

مستقل

۳۷. سکه‌ی سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامدی باشد که در آن دومین پرتاب «رو» است و B پیشامد برآمدهایی باشد که در آن فقط دو «رو» به صورت متوالی ظاهر شده است، آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند؟ چرا؟ (فضای نمونه و هر یک از پیشامدها را مشخص کنید.) / خرداد ۹۰/

پاسخ

$$S=\left\{\begin{matrix}(\text{پ,پ,پ}),(\text{پ,پ,ر}),(\text{پ,ر,پ}),(\text{ر,پ,پ}),\\(\text{پ,ر,ر}),(\text{ر,پ,ر}),(\text{ر,ر,پ}),(\text{ر,ر,ر})\end{matrix}\right\}\Rightarrow n(S)=۸$$

$$A=\{(\text{پ,ر,پ}),(\text{ر,ر,پ}),(\text{پ,ر,ر}),(\text{ر,ر,ر})\}$$

$$\Rightarrow n(A)=۴\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۲}$$

$$B=\{(\text{ر,ر,پ}),(\text{پ,ر,ر})\}\Rightarrow n(B)=۲\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۴}$$

$$A\cap B=\{(\text{ر,ر,پ}),(\text{پ,ر,ر})\}$$

$$\Rightarrow n(A\cap B)=۲\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

حال اگر رابطه‌ی $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ برقرار بود، دو پیشامد A و B مستقل می‌شدند

$$\left.\begin{cases}P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}\\ P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۸}\end{cases}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$$

بنابراین دو پیشامد A و B مستقل نمی‌باشند.

۳۸. در جعبه‌ی A، ۵ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و در جعبه‌ی B، ۴ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه وجود دارد. یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده و یک مهره به تصادف از آن خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد این مهره سیاه باشد؟ / شهریور ۹۰/

پاسخ

انتخاب جعبه و انتخاب مهره‌های درون آن، دو پیشامد مستقل از هم هستند. بنابراین داریم:

انتخاب جعبه‌ی A   انتخاب جعبه‌ی B

$$P(A)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۱۷}{۴۸}$$

احتمال مهره‌ی سیاه از جعبه‌ی A   احتمال مهره‌ی سیاه از جعبه‌ی B

نکته اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، قانون جمع احتمالات به صورت زیر می‌باشد:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

۳۹. احتمال قبولی علی در کنکور ۰/۳ و احتمال قبولی حسن در کنکور ۰/۴ است. احتمال آن‌که حداقل یکی از این دو نفر در کنکور قبول شوند، چقدر است؟ / دی ۹۱/

پاسخ

پیشامد قبولی علی و پیشامد قبولی حسن دو پیشامد مستقل از هم هستند. پس داریم:

$$\begin{cases}A:\text{پیشامد قبولی علی}\Rightarrow P(A)=۰/۳\\ B:\text{پیشامد قبولی حسن}\Rightarrow P(B)=۰/۴\end{cases}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

$$P(A\cup B)=۰/۳+۰/۴-۰/۱۲=۰/۵۸$$

۴۰. احتمال این‌که شخصی گروه خونی B^+ داشته باشد ۳۰٪ و احتمال این‌که او ناراحتی کلیه داشته باشد ۱۵٪ است، چقدر احتمال دارد: / خرداد ۹۴/

الف) این شخص گروه خونی B^+ و ناراحتی کلیه داشته باشد؟

ب) این شخص گروه خونی B^+ یا ناراحتی کلیه داشته باشد؟

پاسخ

داشتن گروه خونی B^+ و داشتن بیماری کلیه دو پیشامد مستقل از هم هستند، بنابراین اگر A پیشامد داشتن گروه خونی B^+ و B پیشامد داشتن ناراحتی کلیه باشد، آن‌گاه داریم:

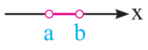
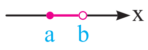
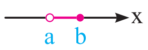
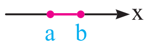
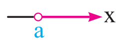
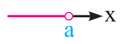
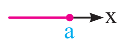
الف
$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۳۰}{۱۰۰}\times\frac{۱۵}{۱۰۰}=\frac{۴۵}{۱۰۰۰}$$

ب
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{۳۰}{۱۰۰}+\frac{۱۵}{۱۰۰}-\frac{۴۵}{۱۰۰۰}=\frac{۴۰۵}{۱۰۰۰}$$

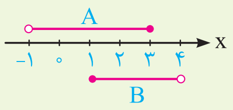
۱ بــــازه

بازه: اگر a و b دو عدد حقیقی و $a < b$ باشد، آن‌گاه:

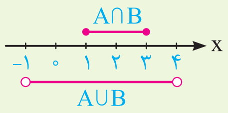
نام بازه	مجموعه‌ی بازه	نمایش هندسی بازه
بازه‌ی باز a و b (a,b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بازه‌ی نیم‌باز از راست $[a,b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	
بازه‌ی نیم‌باز از چپ $(a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	
بازه‌ی بسته‌ی a و b $[a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	
بازه‌ی باز a و $+\infty$ $(a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
بازه‌ی باز $-\infty$ و a $(-\infty,a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
بازه‌ی نیم‌باز a و $+\infty$ $[a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$	
بازه‌ی نیم‌باز $-\infty$ و a $(-\infty,a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$	

تذکر در نمایش هندسی بازه‌ها در جدول فوق، نقطه‌هایی که در بازه مربوطه قرار ندارند، با دایره‌ی توخالی نمایش داده می‌شوند.

نکته اگر A و B بازه‌هایی از اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه $A \cap B$ مجموعه نقاطی است که هم به بازه‌ی A و هم به بازه‌ی B تعلق دارند و $A \cup B$ نیز مجموعه نقاطی است که حداقل به یکی از دو مجموعه A یا B تعلق دارند. برای مثال اگر $A = (-۱,۳]$ و $B = [۱,۴)$ باشند، آن‌گاه:



$\Rightarrow$



◀ مسائل این بخش در دو تیپ دسته‌بندی می‌شوند.

تیپ ۱ استفاده از قوانین مجموعه‌ها

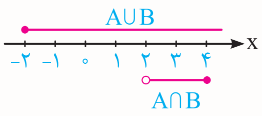
کلید حل: با استفاده از مفاهیمی نظیر اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم مسائل این بخش حل می‌شوند.

مثال‌ها

۱. اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -۲ \le x \le ۴\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > ۲\}$ باشند، $A \cup B$ و $A \cap B$ را به‌صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید. / دی ۹۰ /

پاسخ

$$\begin{cases} A = [-۲,۴] \\ B = (۲,+\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = [-۲,+\infty) \\ A \cap B = (۲,۴] \end{cases}$$

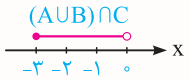


۲. اگر $A=\{x\in\mathbb{R} \mid -۳\le x\le ۳\}$، $B=\{x\in\mathbb{R} \mid x>۲\}$ و $C=\{x\in\mathbb{R} \mid x<۰\}$ باشد، بازه‌هایی که با مجموعه‌های زیر تعریف شده‌اند را مشخص کرده و روی محور نمایش دهید. / تمرین کتاب درسی /

پاسخ

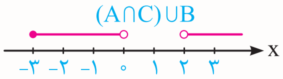
الف $(A \cup B) \cap C$

$$\begin{cases} A \cup B = [-۳,+\infty) \\ C = (-\infty,۰) \end{cases} \Rightarrow (A \cup B) \cap C = [-۳,۰)$$



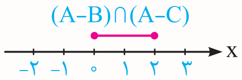
ب $(A \cap C) \cup B$

$$\begin{cases} A \cap C = [-۳,۰) \\ B = (۲,+\infty) \end{cases} \Rightarrow (A \cap C) \cup B = [-۳,۰) \cup (۲,+\infty)$$



ج $(A - B) \cap (A - C)$

$$\begin{cases} A = [-۳,۳] \\ B = (۲,+\infty) \\ C = (-\infty,۰) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - B = [-۳,۲] \\ A - C = [۰,۳] \end{cases}$$



$(A - B) \cap (A - C) = [۰,۲]$

تیپ ۲ حل نامعادلات درجه اول

کلید حل: جواب حل نامعادلات درجه اول معمولاً به‌صورت یک یا اجتماع چند بازه است. برای یافتن بازه‌ی جواب باید به این نکات توجه کرد:

۱) در حل نامعادلات تمامی جملات مجهول در یک طرف و تمامی جملات معلوم در طرف دیگر نامعادله قرار می‌گیرند.

۲) در صورتی‌که دو طرف نامعادله در عددی منفی (مثبت) ضرب یا تقسیم شود، علامت نامساوی عوض می‌شود (نمی‌شود).

۳) در هنگام برخورد با نامعادلات قدرمطلقی خواهیم داشت:

الف $|u| \le v \ , v > ۰ \Rightarrow -v \le u \le v$

ب $|u| \ge v, \quad v > ۰ \Rightarrow u \le -v \ , \ u \ge v$

ج $|u| \underset{\le}{\ge} |v| \Rightarrow u^۲ \underset{\le}{\ge} v^۲$

مثال‌ها

۳. اگر دومجموعه‌ی A و B به‌صورت $A=\left\{x \mid x \in \mathbb{R}, -۱<\frac{x-۱}{۳}<۲\right\}$ و $B=\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x+۱| \le ۲\}$ باشند، $A \cap B$ و $A \cup B$ را به‌صورت بازه بنویسید. / خرداد ۸۸ /

پاسخ

$$A: -۱ < \frac{x-۱}{۳} < ۲ \xrightarrow{\times ۳} -۳ < x-۱ < ۶$$

$$\xrightarrow{\text{جمع طرفین با ۱}} -۲ < x < ۷ \Rightarrow A = (-۲,۷)$$

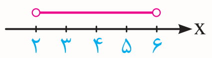
$$B: |x+۱| \le ۲ \Rightarrow -۲ \le x+۱ \le ۲ \xrightarrow{\text{جمع طرفین با ۱-}} -۳ \le x \le ۱$$

$$\Rightarrow B = [-۳,۱] \Rightarrow A \cap B = (-۲,۱] \ , \ A \cup B = [-۳,۷)$$

۴. نامعادله‌ی $۲ < \frac{x}{۲} + ۱ < ۴$ را حل کرده و مجموعه جواب را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید. / دی ۹۲/

پاسخ

$۲<\frac{x}{۲}+۱<۴ \Rightarrow ۱<\frac{x}{۲}<۳ \Rightarrow ۲<x<۶$



۵. اگر $A=\left\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{۲x-۲}{۳}\ge -۲\right\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -۳<x\le ۷\}$ باشد، مجموعه‌های زیر را به‌وسیله بازه نمایش دهید. / شهریور ۹۲/

الف) A

پاسخ

$\frac{۲x-۲}{۳}\ge -۲ \xRightarrow{\times ۳} ۲x-۲\ge -۶ \Rightarrow ۲x\ge -۴\Rightarrow x\ge -۲$

$\Rightarrow A=[-۲,+\infty)$

ب) B

پاسخ

$B=(-۳,۷]$

ج) $A-B$

پاسخ

$A-B=(۷,+\infty)$

د) $A\cap B$

پاسخ

$A\cap B=[-۲,۷]$

۲ معادلات گویا

کسرهایی را که صورت و مخرج آن‌ها چند جمله‌ای باشند، عبارات گویا می‌نامند. مقدار این عبارت‌های گویا زمانی با معنی است که مخرجشان مخالف صفر باشد.

عبارت گویا $= \frac{P(x)}{Q(x)}, Q(x)\neq ۰$

معادلات گویا: معادلاتی را که در آن‌ها عبارات گویا وجود داشته باشد، معادلات گویا می‌نامند. برای حل این معادلات باید مراحل زیر طی شوند:

۱) ک.م.م مخرج کسرها را محاسبه می‌کنیم.

عوامل مشترک با توان بیشتر × عوامل غیر مشترک = ک.م.م مخرج کسرها

۲) طرفین معادله را در عبارت ک.م.م ضرب کرده و معادله جدید را حل می‌کنیم.

۳) جواب‌هایی قابل قبول هستند که مخرج کسرهای معادله اولیه را صفر نکنند.

مثال‌ها

۶. معادله‌ی $\frac{x-۳}{x+۲}=\frac{x+۱}{x-۱}$ را حل کنید. / شهریور ۹۳/

پاسخ

ک.م.م مخرج‌ها را در دو طرف معادله ضرب می‌کنیم.

ک.م.م $=(x+۲)(x-۱)$

$\Rightarrow (x+۲)(x-۱)\times\frac{x-۳}{x+۲}=(x+۲)(x-۱)\times\frac{x+۱}{x-۱}$

$\Rightarrow x^۲-۴x+۳=x^۲+۳x+۲\Rightarrow ۷x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۷}$

جواب به‌دست آمده مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر نمی‌کند، پس قابل قبول است.

۷. به‌ازای چه مقدار k معادله‌ی $\frac{۱}{x-۲}+\frac{۸}{k}=\frac{۳x}{x+۲}$ دارای جواب $x=۱$ است؟ / شهریور ۹۲/

پاسخ

جواب هر معادله همواره در آن معادله صدق می‌کند، بنابراین:

$x=۱\Rightarrow \frac{۱}{۱-۲}+\frac{۸}{k}=\frac{۳}{۳}\Rightarrow k=۴$

۸. معادله‌ی $\frac{x}{x-۱}+\frac{۳}{x^۲-۱}=\frac{x-۲}{x+۱}$ را حل کنید. / شهریور ۹۰ و ۹۱/

پاسخ

ک.م.م مخرج‌ها را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم.

ک.م.م $=(x-۱)(x+۱)$

$\Rightarrow (x-۱)(x+۱)\left(\frac{x}{x-۱}+\frac{۳}{x^۲-۱}\right)=(x-۱)(x+۱)\left(\frac{x-۲}{x+۱}\right)$

$\Rightarrow x^۲+x+۳=x^۲-۳x+۲\Rightarrow ۴x=-۱\Rightarrow x=\frac{-۱}{۴}$

جواب به‌دست آمده مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر نمی‌کند، پس قابل قبول است.

۳ نامعادلات گویا

نامعادله‌هایی را که در آن‌ها عبارات گویا وجود داشته باشند، نامعادلات گویا می‌نامند.

برای حل این معادلات باید مراحل زیر طی شوند:

۱) همه‌ی عبارات جبری را به یک طرف نامعادله منتقل می‌کنیم.

۲) با مخرج مشترک‌گیری و ساده کردن، عبارات جبری حاصل را به یک کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ تبدیل می‌کنیم.

۳) عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را در یک جدول، تعیین علامت می‌کنیم و مجموعه مقادیر x قابل قبول را می‌یابیم.

مثال‌ها

۹. نامعادله‌ی $\frac{۲x^۲-۱۶}{x^۲+۳x+۲}<۱$ را حل کرده و جواب را روی محور نشان دهید. / دی ۸۹/

پاسخ

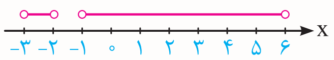
$\frac{۲x^۲-۱۶}{x^۲+۳x+۲}-۱<۰\Rightarrow\frac{x^۲-۳x-۱۸}{x^۲+۳x+۲}<۰$

$\Rightarrow \begin{cases}x^۲-۳x-۱۸=۰\\x^۲+۳x+۲=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-۶)(x+۳)=۰\Rightarrow x=-۳\ ,\ x=۶\\(x+۱)(x+۲)=۰\Rightarrow x=-۱\ ,\ x=-۲\end{cases}$

حال جدول تعیین علامت را کشیده و کسر فوق را تعیین علامت می‌کنیم.

x		-۳		-۲		-۱		۶	
$x^۲-۳x-۱۸$	+	۰	−		−		−	۰	+
$x^۲+۳x+۲$	+		+	۰	−	۰	+		+
کسر	+	۰	−	تعریف نشده	+	تعریف نشده	−	۰	+

مجموعه جواب ⇒



۱۰. نامعادلهٔ $\frac{۸}{x^۲-۱۶} > \frac{۵}{x+۴}+\frac{۳}{x-۴}$ را حل کنید. / دی ۹۰/

پاسخ

$$\frac{۳}{x-۴}+\frac{۵}{x+۴}-\frac{۸}{(x-۴)(x+۴)}>۰$$

$$\Rightarrow \frac{۳(x+۴)+۵(x-۴)-۸}{(x-۴)(x+۴)}>۰ \Rightarrow \frac{۳x+۱۲+۵x-۲۰-۸}{(x-۴)(x+۴)}>۰$$

$$\Rightarrow P=\frac{۸x-۱۶}{(x-۴)(x+۴)}>۰ \Rightarrow \text{ریشه‌ها} \begin{cases} x=۲ \\ x=\pm ۴ \end{cases}$$

x		−۴		۲		۴	
$۸x-۱۶$	−		−	۰	+		+
$(x-۴)(x+۴)$	+	۰	−		−	۰	+
P	−		+	۰	−		+
		تعریف نشده				تعریف نشده	

$\text{جواب} = \{x\in\mathbb{R} \mid -۴<x<۲ \cup x>۴\}$

۱۱. نامعادلهٔ $\frac{۶-x^۲}{x}>۱$ را حل کنید و مجموعه جواب را به‌صورت بازه نشان دهید. / شهریور ۹۴ و تمرین کتاب درسی/

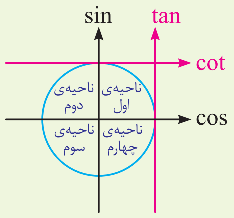
پاسخ

$$\frac{۶-x^۲}{x}-۱>۰ \Rightarrow \frac{۶-x^۲-x}{x}>۰ \Rightarrow P=\frac{(۲-x)(x+۳)}{x}>۰$$

x		−۳		۰		۲	
$۶-x^۲-x$	−	۰	+		+	۰	−
x	−		−	۰	+		+
P	+	۰	−		+	۰	−
				تعریف نشده			

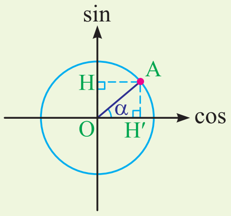
$\text{مجموعه جواب} = (-\infty,-۳)\cup(۰,۲)$

۴ مثلثات

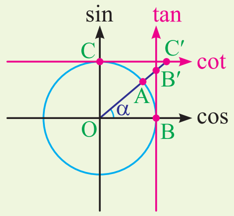


دایره مثلثاتی: دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع واحد که محورهای sin، cos، tan و cot مطابق شکل روبه‌رو تعریف می‌شوند. محورهای sin و cos دایرهٔ مثلثاتی را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند.

نسبت‌های مثلثاتی: برای تعیین نسبت‌های مثلثاتی sin و cos، از محل برخورد زاویهٔ α با دایرهٔ مثلثاتی، دو عمود AH و AH' را به‌ترتیب بر محورهای sin و cos رسم می‌کنیم. برای تعیین نسبت‌های tan و cot نیز زاویهٔ α را امتداد می‌دهیم تا محورهای tan و cot را در نقاط B' و C' قطع کند. آنگاه داریم ($|OA|=۱$):



$$\begin{cases} \sin\alpha = OH \\ \cos\alpha = OH' \end{cases}$$



$$\begin{cases} \tan\alpha = BB' \\ \cot\alpha = CC' \end{cases}$$

نسبت‌های مثلثاتی برخی زاویه‌ها :

نسبت مثلثاتی \ زاویه	۰	$۳۰^\circ=\frac{\pi}{۶}$	$۴۵^\circ=\frac{\pi}{۴}$	$۶۰^\circ=\frac{\pi}{۳}$
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
cot	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

نسبت مثلثاتی \ زاویه	$۹۰^\circ=\frac{\pi}{۲}$	$۱۸۰^\circ=\pi$	$۲۷۰^\circ=\frac{۳\pi}{۲}$
sin	۱	۰	−۱
cos	۰	−۱	۰
tan	تعریف نشده	۰	تعریف نشده
cot	۰	تعریف نشده	۰

نکته نسبت‌های مثلثاتی زوایای $(-\alpha)$، $(\frac{\pi}{۲}\pm\alpha)$ و $(\pi\pm\alpha)$ مطابق جدول به‌دست می‌آیند.

نسبت مثلثاتی \ زاویه	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{۲}-\alpha$	$\frac{\pi}{۲}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
tan	$-\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$
cot	$-\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$

روابط مقدماتی مثلثات:

۱ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱ \Rightarrow \begin{cases} \sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha \\ \cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha \end{cases}$

۲ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

۳ $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

۴ $\tan\alpha.\cot\alpha=۱ \Rightarrow \tan\alpha=\frac{۱}{\cot\alpha}$

۵ $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$

۶ $۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$

نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha \pm \beta)$:

با دانستن نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه α و β، می‌توان نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل این دو زاویه را با استفاده از روابط زیر به‌دست آورد.

۱) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

۲) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

۳) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

۴) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

۵) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$

۶) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$

نکته در روابط نسبت‌های مثلثاتی مجموع دو زاویه α و β اگر دو زاویه را برابر بگیریم $(\alpha=\beta)$، نتایج زیر حاصل می‌شوند.

۱) $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha \cos\alpha$

۲) $\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۱-۲\sin^۲\alpha$

روابط طلایی: $\begin{cases}\sin^۲\alpha=\dfrac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}\\[2mm] \cos^۲\alpha=\dfrac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}\end{cases}$

۳) $\tan ۲\alpha=\dfrac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$

مسائل این بخش در سه تیپ دسته‌بندی می‌شوند.

تیپ ۱: نسبت‌های مثلثاتی زوایای غیرمعروف

کلید حل: برای به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌هایی نظیر ۱۵°، ۷۵°، $۶۷/۵^\circ$ و ... باید ابتدا زاویه‌ی موردنظر را با استفاده از دو زاویه‌ی معروف (۳۰°، ۴۵°، ۶۰° و ...) بسازیم، سپس از روابط گفته‌شده استفاده نماییم.

مثال‌ها

۱۲. $\sin(۱۵^\circ)$ را محاسبه کنید. / شهریور۹۴/

پاسخ

$$۱۵^\circ=۴۵^\circ-۳۰^\circ$$

$$\sin ۱۵^\circ=\sin(۴۵^\circ-۳۰^\circ)=\sin ۴۵^\circ\cos ۳۰^\circ-\cos ۴۵^\circ\sin ۳۰^\circ$$

$$=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)-\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$$

نکته برای به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی نیم‌قوس $\left(\dfrac{۴۵^\circ}{۲}=۲۲/۵^\circ\right)$ یا $\left(\dfrac{۱۳۵^\circ}{۲}=۶۷/۵^\circ\right)$ بهتر است از روابط طلایی استفاده کنیم.

۱۳. نسبت‌های مثلثاتی زیر را بیابید. / تمرین کتاب درسی/

الف) $\sin ۲۲/۵^\circ$ ب) $\cos ۶۷/۵^\circ$

پاسخ

الف با استفاده از رابطه‌ی طلایی $\sin^۲\alpha=\dfrac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$ داریم:

$$\alpha=۲۲/۵^\circ \Rightarrow \sin^۲ ۲۲/۵^\circ=\frac{۱-\cos ۴۵^\circ}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin^۲ ۲۲/۵^\circ=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}$$

$۲۲/۵^\circ$ در ناحیه‌ی اول است و تمامی نسبت‌های مثلثاتی آن هم مثبت است.

$$\Rightarrow \sin ۲۲/۵^\circ=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

ب با استفاده از رابطه‌ی طلایی $\cos^۲\alpha=\dfrac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}$ داریم:

$$\alpha=۶۷/۵^\circ \Rightarrow \cos^۲ ۶۷/۵^\circ=\frac{۱+\cos ۱۳۵^\circ}{۲}$$

$$\cos ۱۳۵^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=-\cos ۴۵^\circ=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos^۲ ۶۷/۵^\circ=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}\Rightarrow \cos ۶۷/۵^\circ=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

تیپ ۲: به‌دست آوردن یک نسبت مثلثاتی از روی سایر نسبت‌های مثلثاتی

کلید حل: در این تیپ از سؤالات باید بر روی روابط مقدماتی مثلثات تسلط کافی داشته باشید.

۱۴. اگر $\sin\alpha=\dfrac{۳}{۵}$ و $\cos\beta=\dfrac{۵}{۱۳}$ و α منفرجه و β حاده باشد، حاصل $\sin(\alpha+\beta)$ را بیابید. / دی ۹۲/

پاسخ

$$\sin\alpha=\frac{۳}{۵}\Rightarrow \cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}$$

α منفرجه است، پس $\cos$ آن منفی می‌شود.

$$\Rightarrow \cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$$

$$\cos\beta=\frac{۵}{۱۳}\Rightarrow \sin^۲\beta=۱-\cos^۲\beta=۱-\frac{۲۵}{۱۶۹}=\frac{۱۴۴}{۱۶۹}$$

β حاده است، پس $\sin$ آن مثبت است.

$$\sin^۲\beta=\frac{۱۴۴}{۱۶۹}\Rightarrow \sin\beta=\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۵}{۱۳}\right)+\left(-\frac{۴}{۵}\right)\left(\frac{۱۲}{۱۳}\right)=\frac{-۳۳}{۶۵}$$

۱۵. اگر $\tan\alpha=\dfrac{-۳}{۴}$ و α زاویه‌ی منفرجه باشد، حاصل $\sin ۲\alpha$ را به‌دست آورید. /مشابه خرداد ۹۳/

پاسخ

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow ۱+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

$$\Rightarrow \cos^۲\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{-۴}{۵}$$

α زاویه‌ی منفرجه است. پس $\cos\alpha<۰$ و $\sin\alpha>۰$

$$\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha\Rightarrow \sin^۲\alpha=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{۳}{۵}$$

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲\left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{-۴}{۵}\right)=\frac{-۲۴}{۲۵}$$

۱۶. اگر $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ و زاویه‌ی α حاده باشد، حاصل $\cot 2\alpha$ را بیابید.

پاسخ

برای $\cot 2\alpha$ رابطه‌ای مستقیم در کتاب درسی نیامده است، اما می‌دانیم $\cot 2\alpha . \tan 2\alpha = 1$ می‌باشد، پس بهتر است $\tan 2\alpha$ را یافته و آن را معکوس کنیم.

$$\sin\alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\xrightarrow[\cos\alpha>0]{\text{حاده } \alpha} \cos\alpha = \frac{12}{13} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\times\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{119}{120}$$

تیپ ۳

تساوی‌های مثلثاتی

کلید حل: در این تیپ سؤالات با استفاده از تمامی روابط مثلثاتی باید درستی یک تساوی را اثبات کنیم.

مثال‌ها

۱۷. درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

۱ $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$ / تمرین کتاب درسی و دی ۹۴

پاسخ

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$= (\cos 2x)\times 1 = \cos 2x$$

۲ $\frac{\sin x}{1+\cos x} = \tan\frac{x}{2}$ / شهریور ۹۲ و خرداد ۹۴

پاسخ

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$$

۳ $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$ / تمرین کتاب درسی

پاسخ

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = [\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta]$$

$$-[\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta] = 2\sin\alpha\sin\beta$$

۴ $\tan\alpha+\cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$ / تمرین کتاب درسی

پاسخ

$$\tan\alpha+\cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج }(\times 2)} \frac{2}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

۵ $\cot\alpha-\tan\alpha = 2\cot 2\alpha$ / تمرین کتاب درسی

پاسخ

$$\cot\alpha-\tan\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = 2\cot 2\alpha$$

۶ $\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \sin 2x$ / تمرین کتاب درسی

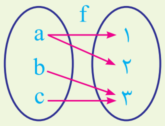
پاسخ

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2\tan x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 2\tan x.\cos^2 x$$

$$= 2\sin x.\cos x = \sin 2x$$

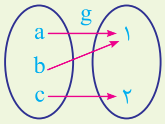
۵ تابع

تابع از دیدگاه زوج مرتب: مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌ی اول یکسان نباشند، تابع است. به عبارت دیگر در یک مجموعه زوج‌های مرتب، اگر دو زوج مرتب مؤلفه‌ی اول برابر داشته باشند، باید مؤلفه‌ی دومشان نیز برابر باشد.



$f = \{(a,1),(a,2),(b,3),(c,3)\}$

f تابع نیست، زیرا دو زوج مرتب متمایز $(a,1)$ و $(a,2)$ مؤلفه‌ی اول برابر دارند.



$g = \{(a,1),(b,1),(c,2)\}$

g تابع است، زیرا در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌ی اول برابرندارند.

تابع از دیدگاه ضابطه: ضابطه‌ی $y=f(x)$ که در آن x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است،در صورتی ضابطه‌ی یک تابع است که **به‌ازای هر x از دامنه تنها یک مقدار برای y** به‌دست آید. به عبارتی دیگر اگر $x_1 = x_2$ باشد، آن‌گاه $f(x_1)=f(x_2)$ شود.

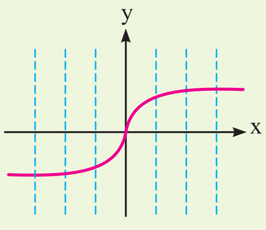
برای مثال ضابطه‌ی $y=f(x)=x^2-x$ تابع است، زیرا:

$$x_1=x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = x_2^2 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x_1^2-x_1 = x_2^2-x_2$$

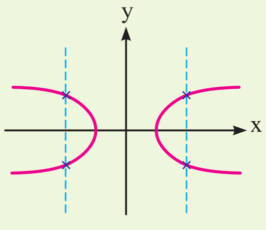
$\Rightarrow f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow$ تابع است.

و ضابطه‌ی $x^2+y^2=5$ تابع نیست، زیرا به‌ازای $x=1$ دو مقدار $y=\pm 2$ به‌دست می‌آید.

تابع از دیدگاه نمودار: یک منحنی زمانی می‌تواند نمودار یک تابع باشد که در دستگاه مختصات، هر خط موازی محور y ها، نمودار منحنی را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



تابع است.



تابع نیست.

تابع چند ضابطه‌ای: هرگاه دامنه‌ی یک تابع را به چند مجموعه‌ی جدا از هم تقسیم کنیم، به‌طوری که اجتماع آن مجموعه‌ها برابر با دامنه‌ی تابع باشد و روی هر مجموعه تابعی متمایز تعریف کنیم، یک تابع چند ضابطه‌ای به‌دست می‌آید.

$$y=\begin{cases} f_1(x) & x\in D_1 \\ f_2(x) & x\in D_2 \\ \vdots \\ f_n(x) & x\in D_n\end{cases}$$

شرط آن‌که یک رابطه‌ی چند ضابطه‌ای تابع باشد، آن است که:

۱ هر یک از ضابطه‌ها در دامنه‌ی تعریف خود، تابع باشد.

۲ اگر دامنه‌ها اشتراک داشتند، مقادیر ضابطه‌ها به‌ازای نقاط مشترک برابر باشند.

نکته دامنه‌ی تابع چند ضابطه‌ای، اجتماع دامنه‌ی تک‌تک ضابطه‌ها است.

$D_f=D_1\cup D_2\cup\ldots\cup D_n$

مسائل این بخش در سه تیپ دسته‌بندی می‌شوند.

تیپ ۱ بررسی تابع بودن یک رابطه

کلید حل: برای بررسی تابع بودن یک رابطه، باید از مفاهیم تابع که اشاره نمودیم استفاده شود.

مثال‌ها

۱۸. مقادیر a و b را چنان بیابید که مجموعه‌ی زیر یک تابع باشد. / خرداد ۹۰

$g=\{(-1,b+3),(7,1),(-1,4-a),(7,a)\}$

پاسخ

هیچ دو زوج مرتبی نباید مؤلفه‌ی اول برابر داشته باشند، مگر آن‌که مؤلفه‌ی دومشان نیز برابر باشد.

$(7,1),(7,a)\Rightarrow a=1$

$\Rightarrow(-1,b+3),(-1,3)\Rightarrow b+3=3\Rightarrow b=0$

۱۹. رابطه‌ی $R=\{(3,m^2),(2,1),(-2,m),(3,m+2),(m,4)\}$ به‌ازای چه مقادیری از m، یک تابع است؟

پاسخ

هیچ دو زوج مرتبی نباید مؤلفه‌ی اول برابر داشته باشند، مگر آن‌که مؤلفه‌ی دومشان نیز برابر باشد.

$(3,m^2),(3,m+2)\Rightarrow m^2=m+2\Rightarrow m=-1,m=2$

$m=-1\Rightarrow R=\{(3,1),(2,1),(-2,-1),(3,1),(-1,4)\}$ ✓

$m=2\Rightarrow R=\{(3,4),\underline{(2,1)},(-2,2),(3,4),\underline{(2,4)}\}$ ×

همانطور که ملاحظه می‌شود، تنها به‌ازای $m=-1$ رابطه‌ی R تابع می‌شود.

تیپ ۲ یافتن پارامترهای مجهول

کلید حل: هر نقطه که مختصاتش در معادله‌ی $y=f(x)$ صدق کند بر نمودار تابع f قرار دارد و برعکس.

$(x,y)\in f\Leftrightarrow y=f(x)$

در سؤالات این تیپ ضابطه‌ی تابع f با یک یا چند پارامتر مجهول داده می‌شود که با صدق دادن نقاط در ضابطه‌ی تابع، می‌توان پارامترهای مجهول را یافت.

تذکر از این تیپ مسائل معمولاً در تمامی دوره‌های امتحانات نهایی سؤال آمده است.

مثال‌ها

۲۰. اگر $f(x)=ax^2+bx+c$ باشد، مقادیر a، b و c را طوری تعیین کنید که این سهمی محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کند و از نقطه‌ی $(-2,3)$ نیز بگذرد. / شهریور ۹۴

پاسخ

نقاط $(1,0)$ و $(0,-1)$ و $(-2,3)$ باید در معادله‌ی تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ صدق کنند.

$(0,-1)\in f\Rightarrow f(0)=-1\Rightarrow c=-1$

$(1,0)\in f\Rightarrow f(1)=0\Rightarrow a+b+c=0\Rightarrow a+b=1$

$(-2,3)\in f\Rightarrow f(-2)=3\Rightarrow 4a-2b+c=3\Rightarrow 4a-2b=4$

$$\begin{cases}a+b=1\\4a-2b=4\end{cases}\Rightarrow a=1,b=0\Rightarrow f(x)=x^2-1$$

۲۱. دو تابع $y=x^2+ax+b$ و $y=x+2b$ مفروضند. a و b را طوری بیابید که نمودارهای این دو تابع روی محور xها در نقطه‌ای به‌طول ۲ یک‌دیگر را قطع کنند. / خرداد ۸۸

پاسخ نقطه‌ی $(2,0)$ باید در ضابطه‌ی هر دو تابع صدق کند، بنابراین داریم:

$y=x^2+ax+b\xRightarrow{(2,0)\in f}2a+b+4=0$

$y=x+2b\xRightarrow{(2,0)\in f}2+2b=0\Rightarrow b=-1$

$2a+b+4=0\xRightarrow{b=-1}a=-\frac{3}{2}$

تیپ ۳ مقادیر تابع و رسم نمودار

کلید حل: مقدار تابع در نقطه‌ای از دامنه به طول $x=x_0$ برابر است با $f(x_0)$. یعنی برای یافتن مقدار تابع در نقطه‌ی x_0 کافی است x_0 را در ضابطه‌ی تابع قرار داده و مقدار $f(x_0)$ را بیابیم.

برای رسم نمودار توابع چند ضابطه‌ای $f(x)$ باید توجه کرد که هر ضابطه را در دامنه‌ی مشخص شده رسم کنیم.

از این تیپ مسائل نیز معمولاً در تمامی دوره‌های امتحانات نهایی سؤال آمده است.

۲۲. اگر $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$ باشد، $f(-\frac{4}{x})$ را به‌دست آورید و درستی تساوی $f(x)\times f(-\frac{4}{x})=-1$ را بررسی نمایید. $(x\neq 0,\pm 2)$ / خرداد ۸۹

پاسخ

$$f(-\frac{4}{x})=\frac{-\frac{4}{x}-2}{-\frac{4}{x}+2}=\frac{-4-2x}{-4+2x}=\frac{x+2}{-x+2}$$

$$\Rightarrow f(x)\times f(-\frac{4}{x})=\frac{x-2}{x+2}\times\frac{x+2}{-(x-2)}=-1$$

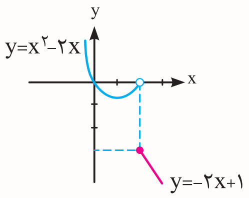
۲۳. تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۲x & ; \ x<۲ \\ -۲x+۱ & ; \ x\geq ۲ \end{cases}$ داده شده است. /شهریور ۹۴/

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) مقدار $f(f(۳))$ را محاسبه کنید.

پاسخ

الف تابع فوق تابعی دو ضابطه‌ای است و باید هر ضابطه را در دامنه‌ی خودش رسم کرد.



ب برای یافتن $f(f(۳))$ ابتدا $f(۳)$ را می‌یابیم.

$$x=۳\Rightarrow f(۳)=-۲(۳)+۱=-۵$$

$$x=f(۳)=-۵\Rightarrow f(f(۳))=(-۵)^{۲}-۲(-۵)=۳۵$$

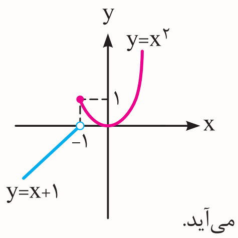
۲۴. تابع $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x<-۱ \\ x^{۲} & x\geq -۱ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. /دی ۹۲/

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) دامنه‌ی تابع f را به‌دست آورید.

پاسخ

الف تابع موردنظر دو ضابطه‌ای است و باید هر ضابطه را در دامنه‌ی مشخص شده‌اش رسم کرد.



ب دامنه‌ی تابع f از اجتماع دامنه‌ی ضابطه‌ها به‌دست می‌آید.

$$D_f=(-\infty,-۱)\cup[-۱,+\infty)=\mathbb{R}$$

۶ دامنه‌ی تابع

۱ دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای، $\mathbb{R}$ است.

۲ دامنه‌ی توابع کسری گویا به شکل $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای هستند، مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی به غیر از ریشه‌های $q(x)$ است.

۳ دامنه‌ی توابع به شکل $y=\sqrt[۲n]{f(x)}$ همان دامنه‌ی $f(x)$ است به‌شرطی که $f(x)\geq ۰$.

۴ دامنـه‌ی توابـع بـه شـکل $y=\sqrt[۲n+۱]{f(x)}$، $y=\sin(f(x))$، $y=\cos(f(x))$، $|f(x)|$ و $[f(x)]$ همـان دامنـه‌ی $f(x)$ می‌باشـد.

۶ دامنه‌ی توابع لگاریتمی به‌شکل $y=\log_{g(x)} f(x)$، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است که اولاً $f(x)$ و $g(x)$ در آن تعریف شده باشند و ثانیاً این سه نامعادله نیز برقرار باشند.

$$f(x)>۰,g(x)>۰,g(x)\neq ۱$$

۷ دامنه‌ی تابع $y=\tan(f(x))$، زیرمجموعه‌ای از دامنه‌ی تابع $f(x)$ است که در آن $f(x)\neq k\pi+\dfrac{\pi}{۲}$ باشد. $(k\in\mathbb{Z})$

۸ دامنه‌ی تابع $y=\cot(f(x))$، زیرمجموعه‌ای از دامنه‌ی تابع $f(x)$ است که در آن $f(x)\neq k\pi$ باشد. $(k\in\mathbb{Z})$

مثـــال‌هـــا

۲۵. دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

۱ $f(x)=\sin\left(\dfrac{x}{x-۲}\right)$ /شهریور ۹۳/

پاسخ

$$x-۲\neq ۰\Rightarrow x\neq ۲\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$$

۲ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{۲x-۱}}$ /شهریور ۹۰/

پاسخ

عبارت زیر رادیکال، داخل مخرج نیز می‌باشد. بنابراین عبارت زیر رادیکال تنها می‌تواند بزرگ‌تر از صفر باشد.

$$۲x-۱>۰\Rightarrow x>\frac{۱}{۲}\Rightarrow D_f=(\frac{۱}{۲},+\infty)$$

۳ $f(x)=\tan(x+\dfrac{\pi}{۳})$ /خرداد ۹۰/

پاسخ

$$x+\frac{\pi}{۳}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x\neq k\pi+\frac{\pi}{۶}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\left\{x \mid x=k\pi+\frac{\pi}{۶},k\in\mathbb{Z}\right\}$$

۴ $f(x)=\cot(۲x-\dfrac{\pi}{۲})$ /شهریور ۸۹/

پاسخ

$$۲x-\frac{\pi}{۲}\neq k\pi\Rightarrow x\neq\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\left\{x \mid x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴},k\in\mathbb{Z}\right\}$$

۵ $f(x)=\log(x^{۲}-۲x-۳)$ /شهریور ۹۰/

پاسخ

$$x^{۲}-۲x-۳>۰\Rightarrow (x+۱)(x-۳)>۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<-۱ \\ \text{یا} \\ x>۳ \end{cases} \Rightarrow D_f=(-\infty,-۱)\cup(۳,+\infty)$$

نکته در حـل مسـائل تعییـن دامنـه، گاهـی اوقـات لازم اسـت تـا از چنـد قانـون بـرای تعییـن دامنـه اسـتفاده شـود. در ایـن صـورت بـه‌ازای هـر قانـون یـک مجموعـه جـواب به‌دسـت می‌آیـد. در نهایـت بـرای تعییـن دامنـه‌ی تابـع بایـد بیـن مجموعـه جواب‌هـای به‌دسـت آمـده اشـتراک گرفتـه شـود.

۲۶. دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

۱ $f(x)=\log_x(۱-x^{۲})$ /شهریور ۸۸/

پاسخ

شرط ۱: $۱-x^{۲}>۰\Rightarrow x^{۲}<۱\Rightarrow |x|<۱\Rightarrow -۱<x<۱$

شرط ۲: $x>۰$ و شرط ۳: $x\neq ۱$

اگر از سه مجموعه جواب به‌دست آمده اشتراک بگیریم، داریم: $D_f=(۰,۱)$

/ خرداد ۸۶ /

۲ $f(x)=\frac{\sqrt{2-x}}{x^2-9}$

پاسخ

شرط ۱: $2-x\ge 0\Rightarrow x\le 2$

شرط ۲: $x^2-9\ne 0\Rightarrow x^2\ne 9\Rightarrow x\ne \pm 3$

$\Rightarrow D_f=(-\infty,2]-\{-3\}$

/ شهریور ۸۸ /

۳ $f(x)=\sqrt[3]{\frac{5}{x^2+x-12}}$

$x^2+x-12\ne 0\Rightarrow (x+4)(x-3)\ne 0$

$\Rightarrow x\ne -4, x\ne 3\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-4,3\}$

/ خرداد ۸۷ /

۴ $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{|x|}$

پاسخ

شرط ۱: $4-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le 4\Rightarrow -2\le x\le 2$

شرط ۲: $|x|\ne 0\Rightarrow x\ne 0$

$D_f=[-2,2]-\{0\}$

۷ اعمال جبری روی توابع

اگر f و g دو تابع با دامنه‌های دلخواه باشند، آن‌گاه توابع $f+g$، $f-g$، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

۱ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)\quad;\quad D_{f+g}=D_f\cap D_g$

۲ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)\quad;\quad D_{f-g}=D_f\cap D_g$

۳ $(f.g)(x)=f(x).g(x)\quad;\quad D_{f.g}=D_f\cap D_g$

۴ $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\quad;\quad D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}$

◀ سؤالات اعمال جبری توابع در دو تیپ دسته‌بندی می‌شوند.

تیپ ۱ محاسبه‌ی جبری توابع

کلید حل: مقدار ورودی در این توابع باید جزء دامنه‌ی تمامی تابع‌های به‌کار رفته باشد.

مثال‌ها

۲۷. اگر توابع $f(x)=\sqrt{x+7}$ و $g(x)=x^2-1$ باشند، مقدار $(g+2f)(2)$ را بیابید. / دی ۹۰ /

پاسخ

$g(2)=2^2-1=3\ ,\ f(2)=\sqrt{2+7}=3$

$(g+2f)(2)=g(2)+2f(2)=3+2(3)=9$

۲۸. اگر $f(x)=x+5$ و $g(x)=\frac{4x}{x^2-7x}$ باشند، آن‌گاه حاصل $(f.g)(1)$ را بیابید. / شهریور ۹۲ /

پاسخ

$f(1)=1+5=6\ ,\ g(1)=\frac{4(1)}{1^2-7(1)}=-\frac{2}{3}$

$(f.g)(1)=f(1).g(1)=6\times -\frac{2}{3}=-4$

۲۹. اگر $f(x)=x-2$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$ و $h(x)=\begin{cases}x+1 & x\ge 0\\ -x & x<0\end{cases}$ باشند، مطلوب است تعیین:

۱ $(\frac{f\times g}{2f+g})(0)$ / شهریور ۸۵ و خرداد ۸۷ /

پاسخ

$f(0)=0-2=-2\ ,\ g(0)=\sqrt{0+1}=1$

$(\frac{f.g}{2f+g})(0)=\frac{f(0)\times g(0)}{2f(0)+g(0)}=\frac{-2\times 1}{2(-2)+1}=\frac{2}{3}$

۲ $(\frac{f+h}{g-h})(-1)$

پاسخ

$f(-1)=-1-2=-3\ ,\ h(-1)=-(-1)=1$

$g(-1)=\sqrt{-1+1}=0$

$(\frac{f+h}{g-h})(-1)=\frac{f(-1)+h(-1)}{g(-1)-h(-1)}=\frac{-3+1}{0-1}=2$

تیپ ۲ یافتن دامنه

کلید حل: دامنه‌ی مجموع، تفاضل و حاصل‌ضرب دو تابع f و g برابر اشتراک دامنه‌ی این دو تابع است.

دامنه‌ی حاصل تقسیم دو تابع f و g برابر اشتراک دامنه‌ی این دو تابع منهای نقاطی است که مخرج را صفر می‌کنند.

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}$

مثال‌ها

۳۰. اگر $f(x)=3x+5$ و $g(x)=\frac{x}{x^2-4}$ باشند، دامنه و ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بیابید. / دی ۸۹ /

پاسخ

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}$

$\begin{cases}D_f=\mathbb{R}\\ D_g=\mathbb{R}-\{\pm 2\}\\ g(x)=0\Rightarrow x=0\end{cases}\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$

$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x+5}{\frac{x}{x^2-4}}=\frac{(3x+5)(x^2-4)}{x}$

۳۱. اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{x-1}{x}$ باشند، دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ را بیابید. / خرداد ۸۷ /

پاسخ

$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow D_f=[0,+\infty)$

$g(x)=\frac{x-1}{x}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{0\}$

$g(x)=0\Rightarrow x=1$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=(0,+\infty)-\{1\}$

۳۲. اگر $f(x)=\tan x$ و $g(x)=\cot x$ باشد، دامنه و ضابطه‌ی توابع $f+g, \frac{f}{g}$ را بیابید.

/تمرین کتاب درسی/

پاسخ

$$f(x)=\tan x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{x \mid x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$$

$$g(x)=\cot x \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{x \mid x=k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\tan x+\cot x$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{x \mid x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$$

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\tan x}{\cot x}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{x \mid x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$$

۸ ترکیب توابع

اگر f و g دو تابع با دامنه‌ی D_f و D_g باشند، آن‌گاه ترکیب این دو تابع بدین صورت تعریف می‌شود.

۱ $(fog)(x)=f(g(x))\ ;\ D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

۲ $(gof)(x)=g(f(x))\ ;\ D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

شرط تشکیل تابع fog این است که برد تابع g و دامنه‌ی f اشتراک داشته باشند، به‌عبارتی دیگر: $D_f\cap R_g\neq\varnothing$

◀ از ترکیب توابع سه تیپ سؤال مطرح می‌شود.

تیپ ۱ یافتن مقدار و ضابطه‌ی تابع مرکب

کلید حل: برای محاسبه‌ی تابع $fog(x)$ کافی است تابع $g(x)$ را به‌جای x در ضابطه‌ی تابع f قرار دهیم و برای محاسبه‌ی تابع $gof(x)$ نیز کافی است تابع $f(x)$ را به‌جای x در ضابطه‌ی تابع g قرار دهیم.

مثال‌ها

۳۳. با استفاده از ضابطه‌ی توابع f و g داده شده، ضابطه‌ی تابع خواسته شده را بیابید.

۱ $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-4} \\ g(x)=\dfrac{1}{x^2-1} \end{cases} \Rightarrow (gof)(x)=?$ /خرداد ۸۹/

پاسخ

$$gof(x)=g(f(x))=\frac{1}{f^2(x)-1}=\frac{1}{(\sqrt{x-4})^2-1}$$

$$\Rightarrow gof(x)=\frac{1}{x-5}$$

۲ $\begin{cases} f(x)=\sqrt{1-x} \\ g(x)=x^2 \end{cases} \Rightarrow (fog)(x)=?$ /دی ۹۲/

پاسخ

$$fog(x)=f(g(x))=\sqrt{1-g(x)}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow fog(x)=\sqrt{1-x^2}$$

۳ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+2}{x-3} \\ g(x)=\dfrac{1}{x-1} \end{cases} \Rightarrow (fog)(x)=?$ /شهریور ۹۰/

پاسخ

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{g(x)+2}{g(x)-3}=\frac{\frac{1}{x-1}+2}{\frac{1}{x-1}-3}$$

$$\Rightarrow fog(x)=\frac{\frac{1+2(x-1)}{(x-1)}}{\frac{1-3(x-1)}{(x-1)}}=\frac{2x-1}{-3x+4}$$

۴ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x-2} \\ g(x)=\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow (fog)(x)=?$ /شهریور ۹۴/

پاسخ

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)-2}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

۳۴. اگر $f(x)=2x+1, g(x)=3x+k$ باشد، مقدار k را طوری بیابید که $fog(x)=gof(x)$ باشد. /شهریور ۸۷/

پاسخ

$$fog(x)=f(g(x))=2(3x+k)+1=6x+2k+1$$

$$gof(x)=g(f(x))=3(2x+1)+k=6x+k+3$$

$$\Rightarrow \overbrace{(6x+2k+1)}^{fog(x)}=\overbrace{(6x+k+3)}^{gof(x)}\Rightarrow k=2$$

۳۵. اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=x^2+bx$ باشد، a و b را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$(fog)(x)=x^2+4x+1$$ /شهریور ۹۲/

پاسخ

$$f(x)=x+a\ ,\ g(x)=x^2+bx$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=g(x)+a=x^2+bx+a$$

$$\Rightarrow x^2+bx+a=x^2+4x+1\Rightarrow\begin{cases} b=4 \\ a=1 \end{cases}$$

تیپ ۲ دامنه‌ی تابع مرکب

کلید حل: دامنـه‌ی تابـع مرکب fog زیرمجموعـه‌ای از دامنه‌ی تابع g است کـه در آن $g(x)$ عضو دامنه‌ی f باشد.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "fog"'] & g(x) \arrow[r, "f"] & f(g(x)) \end{tikzcd}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

برای یافتن دامنه‌ی تابع gof نیز داریم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

مثال‌ها

۳۶. با استفاده از ضابطه‌های f و g داده شده، دامنه‌ی توابع مرکب خواسته شده را با استفاده از تعریف بیابید.

۱ $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-4} \\ g(x)=\dfrac{1}{x^2-1} \end{cases} \Rightarrow D_{gof}=?$ /خرداد ۸۹/

پاسخ

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

$D_f: x-۴\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۴ \Rightarrow D_f=[۴,+\infty)$

$D_g: x^{۲}-۱=۰\Rightarrow x=\pm ۱\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$

$f(x)\in D_g \Rightarrow \sqrt{x-۴}\ne \pm ۱ \Rightarrow x\ne ۵ \Rightarrow D_{gof}=[۴,+\infty)-\{۵\}$

۲ $\begin{cases} f(x)=\sqrt{۱-x} \\ g(x)=x^{۲} \end{cases} \Rightarrow D_{fog}=?$ / دی ۹۲

پاسخ

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$D_f: ۱-x\ge ۰\Rightarrow x\le ۱, D_g=\mathbb{R}$

$g(x)\in D_f \Rightarrow x^{۲}\le ۱\Rightarrow -۱\le x\le ۱$

$D_{fog}=[-۱,۱]$

۳ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+۲}{x-۳} \\ g(x)=\dfrac{۱}{x-۱} \end{cases} \Rightarrow D_{fog}=?$ / شهریور ۹۰

پاسخ

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$D_g=\mathbb{R}-\{۱\}, D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$

$g(x)\in D_f \Rightarrow \dfrac{۱}{x-۱}\ne ۳ \Rightarrow x\ne \dfrac{۴}{۳} \Rightarrow D_{fog}=\mathbb{R}-\left\{۱,\dfrac{۴}{۳}\right\}$

۴ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x-۲} \\ g(x)=\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow D_{fog}=?$ / شهریور ۹۴

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$D_f=\mathbb{R}-\{۲\}, D_g=[۰,+\infty)$

$g(x)\in D_f \Rightarrow \sqrt{x}\ne ۲ \Rightarrow x\ne ۴ \Rightarrow D_{fog}=[۰,+\infty)-\{۴\}$

۵ $\begin{cases} f(x)=\sqrt{۲-x-x^{۲}} \\ g(x)=۱-۲x \end{cases} \Rightarrow D_{fog}=?$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$D_g=\mathbb{R}$

$D_f: ۲-x-x^{۲}\ge ۰\Rightarrow x^{۲}+x-۲\le ۰$

$\Rightarrow (x+۲)(x-۱)\le ۰\Rightarrow -۲\le x\le ۱\Rightarrow D_f=[-۲,۱]$

$g(x)\in D_f \Rightarrow -۲\le ۱-۲x\le ۱\Rightarrow -۳\le -۲x\le ۰$

$\Rightarrow ۰\le x\le \dfrac{۳}{۲}\Rightarrow D_{fog}=\left[۰,\dfrac{۳}{۲}\right]$

تیپ ۳

یافتن f یا g از روی fog یا gof

کلید حل: ۱- اگر ضابطه‌ی توابع g و gof معلوم و ضابطه‌ی f مجهول باشد، برای یافتن ضابطه‌ی تابع f از تغییر متغیر $g(x)=t$ استفاده کرده و سپس x را برحسب t یافته و جایگذاری می‌کنیم.

۲- اگر ضابطه‌ی توابع f و fog معلوم و ضابطه‌ی g مجهول باشد، برای یافتن ضابطه‌ی تابع g در تابع f به‌جای x، g(x) قرار داده و آن را برابر تابع fog می‌گیریم.

۳۷. اگر $f(x)=۲x^{۲}-۲$ و $f(g(x))=۲x^{۲}+۴x$ باشد، تابع $g(x)$ را محاسبه نمایید. / شهریور ۸۹

پاسخ

$\begin{cases} f(g(x))=۲g^{۲}(x)-۲ \\ f(g(x))=۲x^{۲}+۴x \end{cases} \Rightarrow ۲g^{۲}(x)-۲=۲x^{۲}+۴x\Rightarrow ۲g^{۲}(x)=۲x^{۲}+۴x+۲$

$\Rightarrow g^{۲}(x)=x^{۲}+۲x+۱=(x+۱)^{۲}\Rightarrow g(x)=|x+۱|$

۳۸. اگر $f(۲x+۱)=۴x^{۲}+۱$ باشد، ضابطه‌ی تابع f را بیابید.

پاسخ

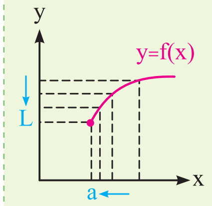
در این سؤال عبارت $۲x+۱$ در واقع همان $g(x)$ است و باید از تغییر متغیر استفاده شود.

$۲x+۱=t\Rightarrow x=\dfrac{t-۱}{۲} \Rightarrow f(۲x+۱)=۴x^{۲}+۱ \xRightarrow{x=\frac{t-۱}{۲}}$

$\Rightarrow f(t)=۴\left(\dfrac{t-۱}{۲}\right)^{۲}+۱\Rightarrow f(t)=t^{۲}-۲t+۲ \xRightarrow{t\to x} f(x)=x^{۲}-۲x+۲$

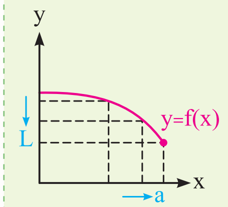
۱ تعریف حد

حد راست: اگر تابع f در سمت راست نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد و با نزدیک شدن از سمت راست به نقطه‌ی $x=a$، مقادیر تابع به سمت عدد L نزدیک شوند، گوییم تابع f در $x=a$ حد راستی برابر L دارد.



$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

حد چپ: اگر تابع f در سمت چپ نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد و با نزدیک شدن از سمت چپ به نقطه‌ی $x=a$، مقادیر تابع به سمت عدد L نزدیک شوند، گوییم تابع f در $x=a$ حد چپی برابر L دارد.



$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

شرط وجود حد در یک نقطه: شرط این‌که تابع f در $x=a$ دارای حد L باشد، این است که حد چپ و حد راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L\end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=L$$

قضایای حد:

۱ اگر تابع $f(x)=c$ یک تابع ثابت باشد، برای هر عدد x_0 از دامنه داریم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=c$$

۲ اگر حد تابع f در x_0 برابر L باشد، داریم:

$$\lim_{x\to x_0} kf(x)=k\lim_{x\to x_0} f(x)=kL \qquad (k\in\mathbb{R})$$

۳ اگر توابع f و g در نقطه‌ی x_0 دارای حدهای L_1 و L_2 باشند، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm \lim_{x\to x_0} g(x)=L_1\pm L_2$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x).g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\times \lim_{x\to x_0} g(x)=L_1 L_2$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{L_1}{L_2} \qquad (L_2\neq 0)$$

۴ اگر تابع f در نقطه‌ی x_0 دارای حدی برابر L باشد، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x\to x_0} f^n(x)=(L)^n$$

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L} \Rightarrow$$ اگر n زوج باشد، باید $L\geq 0$ باشد.

نکته

۱ تابع f در صورتی در نقطه‌ی $x=a$ می‌تواند حد داشته باشد که حداقل در سمت راست یا سمت چپ $x=a$ تعریف شده باشد.

۲ اگر حدهای راست و چپ تابع f در نقطه‌ی $x=a$ برابر نباشند، آن‌گاه تابع f در $x=a$ حد ندارد.

۳ اگر تابع f فقط در یک سمت (راست یا چپ) نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد، منظور از حد تابع f در $x=a$ همان حد (راست یا چپ) است.

$$x\in(a,b)\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$$

$$x\in(b,a)\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)$$

۴ در محاسبه‌ی حد توابع جزء صحیح دقت شود که:

$$۱)\, a\in\mathbb{Z}\Rightarrow \begin{cases}[a^+]=a\\ [a^-]=a-۱\end{cases}$$

$$۲)\, a\notin\mathbb{Z}\Rightarrow [a^+]=[a^-]=[a]$$

◀ از مباحث این قسمت ۳ تیپ سؤال مطرح می‌شود.

تیپ ۱ — محاسبه‌ی حد از روی نمودار

کلید حل: برای محاسبه‌ی حد از روی نمودار، باید حد چپ و حد راست را حساب کنیم.

مثال‌ها

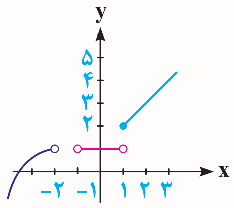
۱. با توجه به نمودار تابع f، حاصل حدهای خواسته شده را بیابید. / دی ۹۱

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$

د) $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$



پاسخ

الف منظور از $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ حد راست تابع f در $x=۱$ است.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۲$$

ب منظور از $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ حد چپ تابع f در $x=۱$ است.

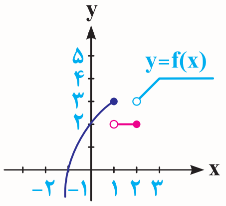
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱$$

ج از آنجایی که حد چپ و راست در نقطه‌ی $x=۱$ برابر نیستند، پس در $x=۱$ حد وجود ندارد.

د تابع f تنها در سمت چپ $x=-۲$ تعریف شده است. بنابراین حد چپ در نقطه‌ی $x=-۲$ همان حد تابع در این نقطه است.

$$\lim_{x\to -۲} f(x)=\lim_{x\to (-۲)^-} f(x)=۱$$

۲. با توجه به نمودار تابع f، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید. / خرداد ۸۹/



$$۳\lim_{x\to ۲^+} f(x) - \lim_{x\to ۱^-} f(x) + ۲f(۳)$$

پاسخ

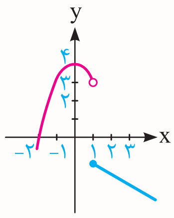
$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۳$ و $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۳$ و $f(۳) = ۴$

$$\Rightarrow ۳\lim_{x\to ۲^+} f(x) - \lim_{x\to ۱^-} f(x) + ۲f(۳) = ۳(۳) - ۳ + ۲(۴) = ۱۴$$

۳. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{۱}{۲}x & x \geq ۱ \\ ۴ - x^۲ & x < ۱ \end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در $x = ۱$ بررسی کنید. / خرداد ۹۰/

پاسخ

به‌ازای $x \geq ۱$، ضابطه‌ی $-\frac{۱}{۲}x$ و به‌ازای $x < ۱$ ضابطه‌ی $۴ - x^۲$ را رسم می‌کنیم.



همانطور که در شکل فوق ملاحظه می‌شود، حد چپ و راست در نقطه‌ی $x = ۱$ هر دو وجود دارند، اما برابر نیستند.

$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۳$ و $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = -\frac{۱}{۲}$

تیپ ۲
بررسی وجود حد (از روی ضابطه)

کلید حل: در مسائلی که به بررسی وجود حد می‌پردازند محاسبه‌ی حدود چپ و راست، راهگشا خواهد بود. در توابع چند ضابطه‌ای، برای محاسبه‌ی حد در نقاطی که دامنه را تفکیک کرده‌اند، باید از دو ضابطه‌ی مجزا استفاده شود.

۴. مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع f در نقطه‌ی $x = -۲$ دارای حد بوده و $\lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۲$ باشد. / خرداد ۸۸/

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{۲x^۲ - ۴a} & ; x \geq ۲ \\ x + b & ; -۲ \leq x < ۲ \\ x^۲ + bx + ۳a & ; x < -۲ \end{cases}$$

پاسخ

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \sqrt{۲x^۲ - ۴a} = \sqrt{۸ - ۴a} = ۲ \Rightarrow a = ۱$$

از آنجایی که تابع سه ضابطه‌ای بوده و $x = -۲$ یکی از نقاط تفکیک دامنه است، بنابراین حد چپ و راست را در نقطه‌ی $x = -۲$ محاسبه کرده و برابر قرار می‌دهیم.

تابع در $x = -۲$ حد دارد. $\Leftrightarrow \lim_{x\to (-۲)^-} f(x) = \lim_{x\to (-۲)^+} f(x)$

$$\lim_{x\to (-۲)^-} f(x) = (-۲)^۲ + b(-۲) + ۳\overset{۱}{a}$$

$$\lim_{x\to (-۲)^+} f(x) = -۲ + b \Rightarrow ۷ - ۲b = -۲ + b \Rightarrow b = ۳$$

۵. آیا تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{۳x - ۱}{x} & ; x < ۱ \\ x^۲ + ۱ & ; x > ۱ \end{cases}$ در $x = ۱$ حد دارد؟ چرا؟ / تمرین کتاب درسی/

پاسخ

ابتدا حد چپ و راست را در $x = ۱$ حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{۳x - ۱}{x} = \frac{۳ - ۱}{۱} = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} x^۲ + ۱ = ۱^۲ + ۱ = ۲$$

حد چپ و راست در نقطه‌ی $x = ۱$ وجود داشته و با هم برابر هستند. بنابراین حد تابع در $x = ۱$ وجود دارد و برابر است با:

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = ۲$$

۶. آیا تابع $f(x) = (x - ۲)[x] + ۲x - ۴$ در نقطه‌ی $x = ۱$ حد دارد؟ چرا؟ / شهریور ۸۸/

پاسخ

حد چپ و حد راست تابع f را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to ۱^-} f(x) = (۱ - ۲)[\overset{۰}{۱^-}] + ۲(۱) - ۴ = -۲ \\ \lim_{x\to ۱^+} f(x) = (۱ - ۲)[۱^+] + ۲(۱) - ۴ = -۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to ۱^-} f(x) \neq \lim_{x\to ۱^+} f(x)$$

حد چپ و حد راست در $x = ۱$ برابر نیستند. پس حد در $x = ۱$ وجود ندارد.

۷. مقدار a را طوری بیابید که تابع $f(x)$ در $x = \frac{\pi}{۲}$ دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x + ۲ & ; x > \frac{\pi}{۲} \\ \cos^۲(x + \frac{\pi}{۲}) - ۳\tan(x - \frac{\pi}{۴}) & ; x < \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

پاسخ

برای این‌که تابع در $x = \frac{\pi}{۲}$ حد داشته باشد، باید حد چپ و حد راست در این نقطه برابر باشند.

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-} f(x) = \lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-} \cos^۲(x + \frac{\pi}{۲}) - ۳\tan(x - \frac{\pi}{۴})$$

$$= \cos^۲ \pi - ۳\tan\frac{\pi}{۴} = (-۱)^۲ - ۳(۱) = -۲$$

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} f(x) = \lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} a\sin x + ۲ = a(۱) + ۲ = a + ۲$$

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} f(x) = \lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-} f(x) \Rightarrow a + ۲ = -۲ \Rightarrow a = -۴$$

تیپ ۳
محاسبه‌ی حد از روی ضابطه‌ی تابع

کلید حل: اگر ضابطه‌ی تابع f را داشته باشیم برای محاسبه‌ی حد این تابع در نقطه‌ی $x_۰$ از قضایای حد و جای‌گذاری $x_۰$ در ضابطه‌ی این تابع استفاده می‌نماییم. (به شرط پیوستگی)

$$\lim_{x\to x_۰} f(x) = f(x_۰)$$

۸. اگر تابع f در ۳ = x حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۵$ **باشد، حاصل** $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ **را به‌دست آورید.** / دی ۸۹ /

پاسخ

حد تابع f در ۳ = x را L می‌گیریم، بنابراین:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=\frac{۲\lim\limits_{x\to ۳} f(x)-۱}{\lim\limits_{x\to ۳} f(x)+۱}=۵$$

$$\xrightarrow{\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=L}\frac{۲L-۱}{L+۱}=۵\Rightarrow ۲L-۱=۵L+۵$$

$$\Rightarrow ۳L=-۶\Rightarrow L=-۲\Rightarrow \lim_{x\to ۳} f(x)=-۲$$

۹. در صورتی‌که $f(x+۲)=\dfrac{x+۴}{x}$ **باشد، آن‌گاه** $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ **را بیابید.** / شهریور ۸۹ و تمرین کتاب درسی /

پاسخ

در این سؤال ضابطه‌ی $f(x)$ به‌صورت صریح داده نشده است. بنابراین ابتدا باید ضابطه‌ی $f(x)$ را با استفاده از مفاهیم فصل قبل بیابیم.

$$f(x+۲)=\frac{x+۴}{x}\Rightarrow x+۲=t\Rightarrow x=t-۲$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{(t-۲)+۴}{t-۲}=\frac{t+۲}{t-۲}\Rightarrow f(x)=\frac{x+۲}{x-۲}$$

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{x+۲}{x-۲}=\frac{۳+۲}{۳-۲}=۵$$

۱۰. اگر $f(x)=x^۲+x$ **و** $g(x)=\sqrt{x}$ **باشد، حد هر یک از توابع زیر را بیابید.**

۱ $\lim\limits_{x\to ۴} f(x).g(x)$

پاسخ

$$\lim_{x\to ۴} f(x).g(x)=\lim_{x\to ۴} f(x).\lim_{x\to ۴} g(x)$$

$$\lim_{x\to ۴}(x^۲+x)\times\lim_{x\to ۴}\sqrt{x}=(۴^۲+۴)\times(\sqrt{۴})=۴۰$$

۲ $\lim\limits_{x\to ۹} f(x)-g^۲(x)$

پاسخ

$$\lim_{x\to ۹} f(x)-g^۲(x)=\lim_{x\to ۹} f(x)-(\lim_{x\to ۹} g(x))^۲$$

$$\lim_{x\to ۹}(x^۲+x)-(\lim_{x\to ۹}\sqrt{x})^۲=(۹^۲+۹)-(۳)^۲=۸۱$$

۳ $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{f(x)}{g^۲(x)}$

پاسخ

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)}{g^۲(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to ۱} f(x)}{(\lim\limits_{x\to ۱} g(x))^۲}=\frac{\lim\limits_{x\to ۱}(x^۲+x)}{(\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x})^۲}=۲$$

نکته در رابطه با حد توابع مثلثاتی در نقطه‌ی $x_۰\in\mathbb{R}$ داریم:

۱ $\lim\limits_{x\to x_۰}\sin x=\sin x_۰$

۲ $\lim\limits_{x\to x_۰}\cos x=\cos x_۰$

۳ $\lim\limits_{x\to x_۰\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}}\tan x=\tan x_۰$

۴ $\lim\limits_{x\to x_۰\neq k\pi}\cot x=\cot x_۰$

۱۱. حاصل حدود زیر را بیابید.

۱ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\dfrac{۲\sin(x-\frac{\pi}{۶})+\cos ۲x+\tan\frac{x}{۲}}{۲\tan\frac{x}{۲}+\cos^۲(x+\frac{\pi}{۲})}$

پاسخ

در تابع فوق به‌جای x، $\frac{\pi}{۲}$ قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲\sin(x-\frac{\pi}{۶})+\cos ۲x+\tan\frac{x}{۲}}{۲\tan\frac{x}{۲}+\cos^۲(x+\frac{\pi}{۲})}=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۳}+\cos\pi+\tan\frac{\pi}{۴}}{۲\tan\frac{\pi}{۴}+\cos^۲\pi}$$

$$=\frac{۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-۱)+۱}{۲(۱)+(-۱)^۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۲ $\lim\limits_{x\to ۰} x.\sin(x+\frac{\pi}{۶})$ / تمرین کتاب درسی /

پاسخ

$$\lim_{x\to ۰} x.\sin(x+\frac{\pi}{۶})=\lim_{x\to ۰} x\times\lim_{x\to ۰}\sin(x+\frac{\pi}{۶})=۰\times\frac{۱}{۲}=۰$$

۳ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۳}}\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{۶})-۲\cos ۳x}{\tan^۲ x}$ / شهریور ۸۸ /

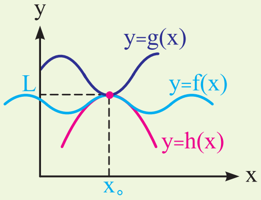
پاسخ

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{۶})-۲\cos ۳x}{\tan^۲ x}=\frac{\sin(\frac{\pi}{۲})-۲\cos\pi}{\tan^۲\frac{\pi}{۳}}$$

$$=\frac{۱-۲(-۱)}{(\sqrt{۳})^۲}=\frac{۳}{۳}=۱$$

۲ قضیه فشردگی

اگر به‌ازای هر x از بازه‌ای که شامل نقطه $x_۰$ است (مگر احتمالاً در خود $x_۰$)، رابطه‌ی $h(x)\le f(x)\le g(x)$ برقرار بوده و $\lim\limits_{x\to x_۰} h(x)=\lim\limits_{x\to x_۰} g(x)=L$ باشد، در این صورت داریم:



$$\Rightarrow \lim_{x\to x_۰} f(x)=L$$

۱۲. اگر به ازای هر x داشته باشیم $(x-۲)^۲ \le ۲f(x) \le ۴+x^۳$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}(f(x)+۳)$ را بیابید.
/ خرداد ۸۹

پاسخ

$$\frac{(x-۲)^۲}{۲} \le f(x) \le \frac{۴+x^۳}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(x-۲)^۲}{۲}=۲ \quad , \quad \lim_{x\to ۰}\frac{۴+x^۳}{۲}=۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۰}f(x)=۲$$

$$\lim_{x\to ۰}(f(x)+۳)=۲+۳=۵$$

۱۳. اگر به ازای هر $x\in(-\pi,\pi)$ داشته باشیم $۳-\cos^۲ x \le f(x) \le ۴-\tan(\frac{x}{۲})$، حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to\frac{\pi}{۲}$ را به‌دست آورید.
/ خرداد ۹۱

پاسخ

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(۳-\cos^۲ x)=۳-۰=۳$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}۴-\tan(\frac{x}{۲})=۴-\tan(\frac{\pi}{۴})=۳$$

حال با استفاده از قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}f(x)=۳$$

۱۴. اگر برای هر $x>۰$ داشته باشیم $(x-۲)^۲ \le f(x) \le ۴+\sin(x^۳)$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+}(۳+f(x))$ را بیابید.
/ دی ۹۴

پاسخ

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+}(x-۲)^۲=۴\\ \lim\limits_{x\to ۰^+}۴+\sin(x^۳)=۴\end{cases} \xRightarrow{\text{قضیه‌ی فشردگی}} \lim_{x\to ۰^+}f(x)=۴$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰^+}(۳+f(x))=۳+۴=۷$$

۳ رفع ابهام از حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$

در محاسبه‌ی حد توابع کسری $\frac{f(x)}{g(x)}$ گاهی اوقات حد صورت و حد مخرج هر دو هم‌زمان برابر صفر شده و به حالت $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم. در این حالت می‌گوییم آن حد مبهم است و برای حل مسأله باید عامل صفرکننده‌ی صورت و مخرج را با هم ساده کرد.

◀ مسائل این بخش در ۳ تیپ دسته‌بندی می‌شوند.

تیپ ۱
توابع کسری گویا

کلید حل: منظور از توابع کسری گویا، توابعی است که صورت و مخرج آن را عبارات چند جمله‌ای تشکیل می‌دهند و برای رفع ابهام در این تیپ مسائل وقتی $x\to x_۰$، باید عامل $x-x_۰$ را در صورت و مخرج تشکیل داده و با هم ساده نماییم. برای تشکیل عامل $x-x_۰$ در صورت و مخرج می‌توان از تجزیه و یا تقسیم چند جمله‌ای صورت و مخرج بر $x-x_۰$ استفاده کرد.

۱۵. حاصل هر یک از حدهای زیر را به‌دست آورید:

۱) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{۲x-۶}$
/ دی ۹۱

پاسخ

عامل $(x-۳)$ را در صورت و مخرج می‌سازیم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{۲x-۶}=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{۲\cancel{(x-۳)}}=\lim_{x\to ۳}\frac{x+۳}{۲}=۳$$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-۵x+۴}{x^۲-x}$
/ دی ۹۰

پاسخ

عامل $(x-۱)$ را در صورت و مخرج می‌سازیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۵x+۴}{x^۲-x}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(x-۴)}{x\cancel{(x-۱)}}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۴}{x}=-۳$$

۳) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^۲-۲x}{x^۲-۳x+۲}$
/ شهریور ۹۱

پاسخ

عامل $(x-۲)$ را در صورت و مخرج می‌سازیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۲x}{x^۲-۳x+۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x\cancel{(x-۲)}}{(x-۱)\cancel{(x-۲)}}=\lim_{x\to ۲}\frac{x}{x-۱}=۲$$

۴) $\lim\limits_{x\to ۵}\frac{۳x^۲-۱۳x-۱۰}{x^۲-۶x+۵}$
/ خرداد ۸۵

پاسخ

اگر عدد $x=۵$ را در عبارات صورت و مخرج قرار دهیم، متوجه می‌شویم حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ داریم و باید در صورت و مخرج عامل $(x-۵)$ بسازیم. برای ساختن عامل $(x-۵)$ در صورت و مخرج به‌ترتیب از روش تقسیم و تجزیه استفاده می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} ۳x^۲-۱۳x-۱۰ & x-۵ \\ \hline -(۳x^۲-۱۵x) & ۳x+۲ \\ \hline ۲x-۱۰ & \\ -(۲x-۱۰) & \\ \hline ۰ & \end{array} \Rightarrow (۳x^۲-۱۳x-۱۰)=(x-۵)(۳x+۲)$$

$$\lim_{x\to ۵}\frac{۳x^۲-۱۳x-۱۰}{x^۲-۶x+۵}=\lim_{x\to ۵}\frac{\cancel{(x-۵)}(۳x+۲)}{\cancel{(x-۵)}(x-۱)}=\lim_{x\to ۵}\frac{(۳x+۲)}{x-۱}=\frac{۱۷}{۴}$$

۵) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۳+x^۲-۲x}{x-۱}$
/ شهریور ۸۷

پاسخ

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+x^۲-۲x}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x(x^۲+x-۲)}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x\cancel{(x-۱)}(x+۲)}{\cancel{x-۱}}=\lim_{x\to ۱}x(x+۲)=۱\times ۳=۳$$

۶) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۳-۳x^۲+۳x-۱}{x^۲-۲x+۱}$
/ تمرین کتاب درسی

پاسخ

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳-۳x^۲+۳x-۱}{x^۲-۲x+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)^۳}{(x-۱)^۲}=\lim_{x\to ۱}(x-۱)=۰$$

۷ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x+1}{2x^2-3x+1}$ / تمرین کتاب درسی /

پاسخ

عامل $x-1$ در صورت و مخرج باید ساخته شود. برای این کار صورت و مخرج را بر $(x-1)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l}
x^4-2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2}
-(x^4-x^3) & x^3+x^2+x-1 \\ \cline{1-1}
x^3-2x & \\
-(x^3-x^2) & \\ \cline{1-1}
x^2-2x+1 & \\
-(x^2-2x+1) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\Rightarrow x^4-2x+1=(x-1)(x^3+x^2+x-1)$$

$$\begin{array}{l|l}
2x^2-3x+1 & x-1 \\ \cline{2-2}
-(2x^2-2x) & 2x-1 \\ \cline{1-1}
-x+1 & \\
-(-x+1) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\Rightarrow 2x^2-3x+1=(x-1)(2x-1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x+1}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^3+x^2+x-1)}{\cancel{(x-1)}(2x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-1}{2x-1}=\frac{1^3+1^2+1-1}{2(1)-1}=2$$

تیپ ۲

توابع کسری شامل عبارات رادیکالی

کلید حل: برای رفع ابهام از توابع کسری رادیکالی راه‌حل کلی این است که صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج عبارت رادیکالی موجود در صورت یا مخرج ضرب کرد تا عامل صفر شونده در صورت و مخرج ظاهر شده و با هم ساده شوند. در ضمن می‌توان با استفاده از تجزیه عبارات صورت و مخرج، عامل صفرکننده‌ی موجود را ساده کرد.

۱۶. حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

۱ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ / خرداد ۸۹ و دی ۸۵ /

پاسخ

در صورت کسر از یک $\sqrt{x}$ فاکتور می‌گیریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}\,\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\cancel{\sqrt{x}-1}}=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=1$$

۲ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ / شهریور ۹۴ /

پاسخ

صورت و مخرج این کسر را در مزدوج عبارت صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$$

۳ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-\sqrt{x+6}}{x-3}$ / دی ۹۲ /

پاسخ

صورت و مخرج این کسر را در مزدوج عبارت صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{x+6}}{x-3}\times\frac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{x+6}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-(\sqrt{x+6})^2}{(x-3)(x+\sqrt{x+6})}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{(x-3)(x+\sqrt{x+6})}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{\cancel{(x-3)}(x+\sqrt{x+6})}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+2)}{x+\sqrt{x+6}}=\frac{5}{6}$$

۴ $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5-x}{\sqrt{2x-1}-3}$ / شهریور ۹۰ /

پاسخ

صورت و مخرج این کسر را در مزدوج عبارت مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 5}\frac{5-x}{\sqrt{2x-1}-3}\times\frac{\sqrt{2x-1}+3}{\sqrt{2x-1}+3}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x)\times(\sqrt{2x-1}+3)}{(2x-1)-9}=\lim_{x\to 5}\frac{\overset{-1}{\cancel{(5-x)}}\times(\sqrt{2x-1}+3)}{2\cancel{(x-5)}}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-1\times(\sqrt{2x-1}+3)}{2}=-3$$

۵ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{3-\sqrt{x+7}}$ / خرداد ۹۱ /

پاسخ

صورت و مخرج این کسر را در مزدوج عبارت مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{3-\sqrt{x+7}}\times\frac{3+\sqrt{x+7}}{3+\sqrt{x+7}}=\lim_{x\to 2}\frac{x\,\overset{-1}{\cancel{(x-2)}}\times(3+\sqrt{x+7})}{\cancel{2-x}}$$

$$=\lim_{x\to 2}(-x)\times(3+\sqrt{x+7})=-12$$

۶ $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}-3}$ / تمرین کتاب درسی /

پاسخ

در این سؤال هم صورت و هم مخرج شامل عبارت رادیکالی هستند. بنابراین صورت و مخرج کسر را هم در مزدوج صورت و هم در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}-3}\times\underbrace{\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}}}_{\text{مزدوج صورت}}\times\underbrace{\frac{\sqrt{2x-1}+3}{\sqrt{2x-1}+3}}_{\text{مزدوج مخرج}}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{[2^2-(\sqrt{x-1})^2]\times(\sqrt{2x-1}+3)}{[(\sqrt{2x-1})^2-3^2]\times(2+\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\overset{-1}{\cancel{(5-x)}}\times(\sqrt{2x-1}+3)}{2\cancel{(x-5)}\times(2+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to 5}\frac{-(\sqrt{2x-1}+3)}{2(2+\sqrt{x-1})}=\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}$$

۷ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

پاسخ

برای حل این سؤال باید مخرج را با استفاده از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ تجزیه کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}}{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{1}{3}$$

تیپ ۳ توابع کسری شامل عبارات مثلثاتی

کلید حل: در حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$، اگر حداقل یکی از عبارات صورت و مخرج شامل نسبت‌های مثلثاتی بودند، ابتدا آن‌ها را ساده نموده و سپس یکی از روابط زیر را برای حل مسائل به‌کار می‌بریم:

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$ ۲) $\lim\limits_{u\to ۰}\frac{\sin u}{u}=۱$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=۱$ ۴) $\lim\limits_{u\to ۰}\frac{\tan u}{u}=۱$

u هر تابعی برحسب x می‌تواند باشد، به شرطی که به سمت صفر میل کند.

نکته در حل مسائل این بخش روابط زیر برای ساده‌سازی عبارات مثلثاتی بسیار مفید هستند.

۱ $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$

۲ $\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x=۲\cos^۲ x-۱=۱-۲\sin^۲ x$

۳ $(\sin x\pm \cos x)^۲=۱\pm ۲\sin x\cos x=۱\pm \sin ۲x$

۴ $\cos x=\sin(\frac{\pi}{۲}-x)=\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$

مثال‌ها

۱۷. حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

۱ $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{\sin x}$ / دی ۹۲ و شهریور ۸۹

پاسخ

$۱-\cos ۲x=۲\sin^۲ x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲ x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to ۰}۲\sin x=۰$

۲ $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin(۳x)\tan(۲x)}{x^۲}$ / دی ۹۱

پاسخ

$\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin(۳x)\tan(۲x)}{x^۲}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۳\sin ۳x}{۳x}\times\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۲\tan(۲x)}{۲x}=۳\times ۲=۶$

۳ $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x\sin ۲x\sin ۳x}{x^۳}$ / خرداد ۹۴

پاسخ

$\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x\sin ۲x\sin ۳x}{x^۳}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{x}\times\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{x}$

$=۱\times ۲\times ۳=۶$

۴ $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{۲x^۲}$ / شهریور ۹۴ و شهریور ۸۸

پاسخ

$۱-\cos ۲x=۲\sin^۲ x$

$\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{۲x^۲}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲ x}{۲x^۲}=\lim\limits_{x\to ۰}(\frac{\sin x}{x})^۲=۱$

۵ $\lim\limits_{x\to ۰}\left(\frac{x^۲}{۱-\cos ۲x}\times\tan(x+\frac{\pi}{۴})\right)$ / دی ۹۴

پاسخ

$۱-\cos ۲x=۲\sin^۲ x$

$\lim\limits_{x\to ۰}\left(\frac{x^۲}{۱-\cos ۲x}\times\tan(x+\frac{\pi}{۴})\right)=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x^۲}{۲\sin^۲ x}\times\overset{۱}{\cancel{\tan\frac{\pi}{۴}}}$

$=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x^۲}{۲\sin^۲ x}=\frac{۱}{۲}$

۶ $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan x-\sin x}{x^۳}$ / خرداد ۸۹ و تمرین کتاب درسی

پاسخ

$\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan x-\sin x}{x^۳}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^۳}$

$=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x(۱-\cos x)}{x^۳\cos x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x\times ۲\sin^۲\frac{x}{۲}}{x^۳\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times ۲\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin^۲\frac{x}{۲}}{x^۲}\times\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{\cos x}=۱\times\frac{۲}{۴}\times ۱=\frac{۱}{۲}$

۷ $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۴}-۲}{\sin ۳x}$ / شهریور ۸۷

پاسخ

صورت کسر این حد یک عبارت رادیکالی و مخرج آن یک عبارت مثلثاتی است. بنابراین این سؤال ترکیبی از حالات مبهم $\frac{۰}{۰}$ تیپ ۲ و تیپ ۳ است.

$\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۴}-۲}{\sin ۳x}\times\frac{\sqrt{x+۴}+۲}{\sqrt{x+۴}+۲}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x+\cancel{۴}-\cancel{۴}}{(\sin ۳x)(\sqrt{x+۴}+۲)}$

$=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۳x}{۳\sin ۳x}\times\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{x+۴}+۲}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۱۲}$

نکته گاهی اوقات در محاسبه‌ی حدهای مبهم، بهتر است حد داده‌شده را با تعریف یک متغیر جدید ساده بنماییم. برای مثال در محاسبه‌ی حد $\lim\limits_{x\to a}f(x)$، متغیر t را بدین صورت تعریف می‌کنیم $(x-a=t)$. بدیهی است که متغیر t به سمت صفر میل می‌کند.

$\begin{cases}x-a=t\\ x\to a\end{cases}\Rightarrow t\to ۰$

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{t\to ۰}f(t+a)$

۱۸. حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

۱ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۵}}\frac{\sin(۵x-\pi)}{x-\frac{\pi}{۵}}$ / شهریور ۹۲

پاسخ

وقتی x به سمت $\frac{\neq}{۵}$ میل می‌کند، آن‌گاه $x-\frac{\pi}{۵}=t$ به سمت صفر میل می‌کند.

$\begin{cases}x-\frac{\pi}{۵}=t\\ x\to\frac{\pi}{۵}\end{cases}\Rightarrow t\to ۰\ ,\ ۵x-\pi=۵t$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۵}}\frac{\sin(۵x-\pi)}{x-\frac{\pi}{۵}}=\lim\limits_{t\to ۰}\frac{\sin ۵t}{t}=\lim\limits_{t\to ۰}\frac{۵\sin ۵t}{۵t}=۵\times ۱=۵$

۲ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan x-۱}{۴x-\pi}$ / تمرین کتاب درسی

پاسخ

در این سؤال نیز به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم و از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

$\begin{cases}x-\frac{\pi}{۴}=t\\ x\to\frac{\pi}{۴}\end{cases}\Rightarrow t\to ۰\ ,\ x=t+\frac{\pi}{۴}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{4x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-1}{4t}$$

از فصل قبل می‌دانیم: $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$\Rightarrow\lim_{t\to0}\frac{\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-1}{4t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1+\tan t}{1-\tan t}-1}{4t}$$

$$\Rightarrow\lim_{t\to0}\frac{2\tan t}{(1-\tan t)\times4t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{2(1-\tan t)}\times\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$$

۴ حد بی نهایت

منظور از حد بی نهایت حدی است که پس از جای‌گذاری x در آن، حاصل حد نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) شود. اگر حد تابعی در $x=a$ نامتناهی شود، گفته می‌شود آن تابع در $x=a$ حد ندارد.

حد بی نهایت در حالتی اتفاق می‌افتد که مخرج کسر تابعی، برابر صفر حدی شود.

نکات زیر در یافتن علامت حدهای بی نهایت حائز اهمیت است.

۱ $\dfrac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty$

۲ $\dfrac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty$

۳ $\dfrac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty$

۴ $\dfrac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty$

۱۹. حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

۱ $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x+1}{9-x^2}$ / خرداد ۸۸ و خرداد ۹۳/

پاسخ

$$\lim_{x\to3^+}\frac{x+1}{9-x^2}=\frac{4}{9-(9^+)}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

۲ $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2}{|x-2|}$ / دی ۹۲/

پاسخ

$$\lim_{x\to2^-}\frac{x^2}{|x-2|}=\frac{2^2}{|2^--2|}=\frac{4}{|0^-|}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

۳ $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x^2+1}{x+2}$ / شهریور ۹۴/

پاسخ

$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{x^2+1}{x+2}=\frac{(-2)^2+1}{(-2)^++2}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

۴ $\lim\limits_{x\to6^-}\dfrac{4}{(x-6)^2}$ / شهریور ۹۲/

پاسخ

$$\lim_{x\to6^-}\frac{4}{(x-6)^2}=\frac{4}{(6^--6)^2}=\frac{4}{(0^-)^2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

۵ $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\dfrac{2}{\cos x}$ / شهریور ۸۹ و خرداد ۹۴/

پاسخ

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{2}{\cos x}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

۶ $\lim\limits_{x\to\pi}\cot x$ / خرداد ۸۸/

پاسخ

$$\lim_{x\to\pi}\cot x=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to\pi}\frac{-1}{\sin x}\begin{cases}x\to\pi^-\xrightarrow{\sin x>0}\dfrac{-1}{0^+}=-\infty\\[2mm] x\to\pi^+\xrightarrow{\sin x<0}\dfrac{-1}{0^-}=+\infty\end{cases}$$

۷ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{1-\cos x}$ / خرداد ۹۰ و تمرین کتاب درسی/

پاسخ

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1-\cos x}=\frac{1}{1-(1^-)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

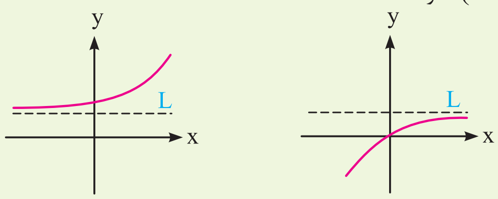
۸ $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{3})^-}\dfrac{\tan x+\sqrt{3}}{\tan x-\sqrt{3}}$ / تمرین کتاب درسی/

پاسخ

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{3})^-}\frac{\tan x+\sqrt{3}}{\tan x-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^--\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{0^-}=-\infty$$

۵ حد در بی‌نهایت

منظور از حد در بی‌نهایت، محاسبه‌ی حد یک تابع در زمانی است که متغیر x آن از هر عدد حقیقی بتواند بزرگ‌تر $(x\to+\infty)$ یا از هر عدد حقیقی بتواند کوچک‌تر $(x\to-\infty)$ شود.



$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$

حد هر عبارت چندجمله‌ای به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots$ و $(n\in\mathbb{N})$، وقتی متغیر آن به سمت بی‌نهایت می‌رود $(x\to\pm\infty)$، برابر با حد جمله‌ی پرتوان آن می‌باشد.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\cdots)=\lim_{x\to\pm\infty}ax^n$$

بنابراین در توابع کسری که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای است، داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\cdots}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n}{a'x^m}=\begin{cases}0 & n<m\\ \dfrac{a}{a'} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

۲۰. حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

۱ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-\sqrt{x^2+4x}}{1-x}$ / خرداد ۸۹/

پاسخ

درجه‌ی صورت بیشتر از درجه‌ی مخرج است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-\sqrt{x^2+4x}}{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{-x}=\lim_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty$$

۲ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2-\sqrt{x-3}}{5x^2-\sqrt{x^4+1}}$ / دی ۸۹ /

پاسخ

درجه‌ی صورت برابر درجه‌ی مخرج است. بنابراین حاصل حد، عددی غیر صفر خواهد بود.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-\sqrt{x-3}}{5x^2-\sqrt{x^4+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{5x^2-x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}=\frac{6x^2}{4x^2}=\frac{3}{2}$$

۳ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2+\sqrt{x+2}}{x^2+5x-1}$ / شهریور ۹۴ و تمرین کتاب درسی /

پاسخ

درجه‌ی صورت و مخرج برابر است. بنابراین حاصل حد، عددی غیر صفر خواهد بود.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+\sqrt{x+2}}{x^2+5x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2}{x^2}=-3$$

۴ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{8x^3-2x^2+5}{-2x^4+3x-1}$ / خرداد ۹۴ /

پاسخ

درجه‌ی چند جمله‌ای صورت کم‌تر از درجه‌ی چندجمله‌ای مخرج است. بنابراین حاصل حد برابر عدد صفر می‌شود.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x^3-2x^2+5}{-2x^4+3x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x^3}{-2x^4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4}{x}=0$$

۵ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3+1}$ / خرداد ۹۰ /

پاسخ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^3}{2x^3}=-\frac{1}{2}$$

۶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sqrt{x+1}}{5x+\sqrt{4x^2+1}}$ / خرداد ۹۱ /

پاسخ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x+1}}{5x+\sqrt{4x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{5x+|2x|}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{5x+2x}=\frac{2}{7}$$

۲۱. مقادیر a و b را طوری بیابید که $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^3+x^2+1}{6x^b-x}=\dfrac{-2}{3}$ باشد. / خرداد ۸۸ /

پاسخ

از آن‌جایی که حاصل حد در بی‌نهایت تابع کسری فوق برابر عددی غیر صفر شده، پس چندجمله‌ای صورت و مخرج هم‌درجه هستند. $(b=3)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^3+x^2+1}{6x^3-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^3}{6x^3}=\frac{a}{6}=-\frac{2}{3}\Rightarrow a=-4$$

۲۲. اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(a-2)x^3+2x^2+3}{bx^2+1}=2$ باشد، مقادیر a و b را بیابید. / دی ۸۶ /

پاسخ

حاصل حد در بی‌نهایت فوق عددی غیر صفر شده است، پس صورت و مخرج باید هم‌درجه باشند. ضریب $(a-2)$ جمله درجه سوم صورت را برابر صفر قرار می‌دهیم تا صورت و مخرج هم درجه شوند. $a-2=0\Rightarrow a=2$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3}{bx^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{bx^2}=\frac{2}{b}=2\Rightarrow b=1$$

۶ پیوستگی

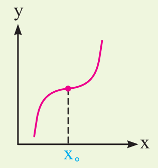
تابع f در نقطه‌ی $x=x_0$ پیوسته است، هرگاه:

۱ تابع f در نقطه‌ی $x=x_0$ تعریف شده باشد.

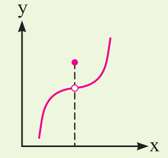
۲ حد تابع f در نقطه‌ی $x=x_0$ وجود داشته باشد.

۳ حد تابع در نقطه‌ی $x=x_0$ با مقدار تابع در این نقطه برابر باشد، یعنی:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$



پیوسته در $x=x_0$



ناپیوسته در $x=x_0$

◀ از مبحث پیوستگی دو تیپ سؤال مطرح می‌شود.

تیپ ۱ — بررسی پیوستگی در یک نقطه

کلید حل: در این تیپ مسائل، حد چپ، حد راست و مقدار تابع در نقطه‌ی $x=x_0$ را به‌دست آورده و با هم مقایسه می‌کنیم. اگر این سه مقدار با هم برابر شوند، تابع در نقطه $x=x_0$ پیوسته بوده و در غیر این صورت ناپیوسته است.

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)\Rightarrow$$ تابع f در $x=x_0$ پیوسته است.

۲۳. پیوستگی توابع زیر را در نقاط مشخص شده (x_0) بررسی کنید.

۱ $f(x)=\begin{cases}[2x-2] & ; x>1\\ 3x-1 & ; x=1\\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & ; x<1\end{cases}\ ,\ (x_0=1)$ / خرداد ۸۸ /

پاسخ

حد راست، حد چپ و مقدار تابع را در نقطه‌ی $x_0=1$ به‌دست آورده و مقایسه می‌کنیم.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=[2\times1^+-2]=[0^+]=0 & \text{حد راست}\\ \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2 & \text{حد چپ}\\ f(1)=3(1)-1=2 & \text{مقدار تابع}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1^+}f(x)\neq\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)$$

شرط پیوستگی در $x=1$ برقرار نیست، پس تابع f در $x_0=1$ ناپیوسته است.

۲ $f(x)=\begin{cases}3[x]+4 & ; x\geq-2\\ \dfrac{|2x+4|}{x+2} & ; x<-2\end{cases}\ ,\ (x_0=-2)$ / شهریور ۸۹ /

پاسخ

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)=3[(-2)^+]+4=-6+4=-2\\ \lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{-2\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}=-2\\ f(-2)=3[-2]+4=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=f(-2)=-2$$

تابع f در $x_0=-2$ پیوسته است.

۳ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{۲\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-۳} & ; \quad x>۳ \\ ۲ & ; \quad x=۳ \\ ۵x-۱۳ & ; \quad x<۳ \end{cases} \quad , (x_\circ=۳)$ / دی ۹۳

پاسخ

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^+} \dfrac{۲\sqrt{(x-۳)^۲}}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳^+} \dfrac{۲\cancel{(x-۳)}}{\cancel{x-۳}}=۲ \\ \lim\limits_{x\to ۳^-} (۵x-۱۳)=۱۵-۱۳=۲ \\ f(۳)=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=f(۳)$$

تابع f در $x_\circ=۳$ پیوسته است.

۴ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-۲|}{x-۲} & ; \quad x<۲ \\ -۱ & ; \quad x=۲ \\ ۳-x^۲ & ; \quad x>۲ \end{cases} \quad , (x_\circ=۲)$ / خرداد ۹۳

پاسخ

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{-\cancel{(x-۲)}}{\cancel{x-۲}}=-۱ \\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+} ۳-x^۲=۳-۴=-۱ \\ f(۲)=-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=f(۲)=-۱$$

تابع f در $x_\circ=۲$ پیوسته است.

۵ $f(x)=\begin{cases} \sin ۲x & ; \quad x>\dfrac{\pi}{۴} \\ \dfrac{۱}{۲}+\cos^۲ x & ; \quad x\le \dfrac{\pi}{۴} \end{cases} \quad , (x_\circ=\dfrac{\pi}{۴})$ / تمرین کتاب درسی

پاسخ

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۴})^+} f(x)=\sin ۲(\dfrac{\pi}{۴})=۱ \\ \lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۴})^-} f(x)=\dfrac{۱}{۲}+\cos^۲(\dfrac{\pi}{۴})=\dfrac{۱}{۲}+(\dfrac{\sqrt{۲}}{۲})^۲=۱ \\ f(\dfrac{\pi}{۴})=\dfrac{۱}{۲}+\cos^۲(\dfrac{\pi}{۴})=۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۴})^+} f(x)=\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۴})^-} f(x)=f(\dfrac{\pi}{۴})$$

تابع f در $x_\circ=\dfrac{\pi}{۴}$ پیوسته است.

تیپ ۲ یافتن مقادیر مجهول برای پیوستگی

کلید حل: در این تیپ، با مسائلی مواجه می‌شویم که یک یا دو پارامتر مجهول در ضابطه‌ی تابع قرار دارد و مسأله از ما می‌خواهد مقادیر مجهول را طوری بیابیم که تابع پیوسته شود. برای حل این مسائل باید حد چپ، حد راست و مقدار تابع را به‌دست آورده و برابر قرار دهیم. از حل معادلات تشکیل شده، پارامترهای مجهول به دست می‌آیند.

۲۴. مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع زیر، در نقطه‌ی $x_\circ=-۱$ پیوسته باشد. / شهریور ۹۴

$$f(x)=\begin{cases} ax^۲+۲ & ; \quad x>-۱ \\ ۵ & ; \quad x=-۱ \\ -۳x+b & ; \quad x<-۱ \end{cases}$$

پاسخ

$\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=f(-۱)$ (شرط پیوستگی در $x_\circ=-۱$)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=a+۲ \\ \lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=۳+b \\ f(-۱)=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+۲=۵ \\ ۳+b=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۳ \\ b=۲ \end{cases}$$

۲۵. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f زیر، در نقطه‌ی $x_\circ=۳$ پیوسته باشد. / خرداد ۸۹

$$f(x)=\begin{cases} [۲x]+b & ; \quad x<۳ \\ ۳-ax & ; \quad x=۳ \\ \dfrac{x^۲-۹}{x-۳} & ; \quad x>۳ \end{cases}$$

پاسخ

$\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=f(۳)$ (شرط پیوستگی در $x_\circ=۳$)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^+} \dfrac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{x-۳}}=۶ \\ \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=[۲\times ۳^-]+b=[۶^-]+b=۵+b \\ f(۳)=۳-۳a \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۶=۵+b=۳-۳a \Rightarrow a=-۱ , b=۱$$

۲۶. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع زیر، در نقطه‌ی $x_\circ=۲$ پیوسته باشد. / دی ۹۲

$$f(x)=\begin{cases} ۳+ax^۲ & ; \quad x>۲ \\ ۷ & ; \quad x=۲ \\ \dfrac{b}{x-۱}-۱ & ; \quad x<۲ \end{cases}$$

پاسخ

$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)$ (شرط پیوستگی در $x_\circ=۲$)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+} (۳+ax^۲)=۳+۴a \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\dfrac{b}{۲-۱}-۱=b-۱ \\ f(۲)=۷ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳+۴a=b-۱=۷ \Rightarrow a=۱ , b=۸$$

۲۷. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f زیر، در نقطه‌ای به طول ۲- $x_\circ=$ پیوسته باشد.

/ دی ۹۱ و تمرین کتاب درسی /

$$f(x)=\begin{cases} ax+۱ & ; \; x>-۲ \\ ۱۳ & ; \; x=-۲ \\ ۲ax^۲+bx-۱ & ; \; x<-۲ \end{cases}$$

پاسخ

$\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=f(-۲)$ (شرط پیوستگی در ۲- $x_\circ=$)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=-۲a+۱ \\ \lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=۸a-۲b-۱ \\ f(-۲)=۱۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۲a+۱=۸a-۲b-۱=۱۳\Rightarrow \begin{cases} a=-۶ \\ b=-۳۱ \end{cases}$$

۲۸. مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع f زیر، در نقطه‌ی ۱- $x_\circ=$ پیوسته باشد.

/ خرداد ۹۲ /

$$f(x)=\begin{cases} -۴x+a & ; \; x>-۱ \\ -۶x & ; \; x=-۱ \\ x^۲-۵x & ; \; x<-۱ \end{cases}$$

پاسخ

$\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=f(-۱)$ (شرط پیوستگی در ۱- $x_\circ=$)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^-} x^۲-۵x=۶ \\ \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+} -۴x+a=a+۴ \quad \Rightarrow a+۴=۶\Rightarrow a=۲ \\ f(-۱)=۶ \end{cases}$$

۲۹. مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع f زیر، در نقطه‌ی ۰ $x_\circ=$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin^۲ x}{۱-\cos x} & x>۰ \\ a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{۶}\right) & x\le ۰ \end{cases}$$

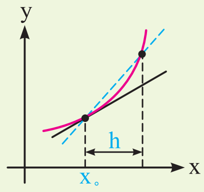
پاسخ

$\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=f(۰)$ (شرط پیوستگی در ۰ $x_\circ=$)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-} a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{۶}\right)=a\sin\dfrac{\pi}{۶}=\dfrac{a}{۲} \\ \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{\cancel{(۱-\cos x)}(۱+\cos x)}{\cancel{۱-\cos x}}=۲ \quad \Rightarrow \dfrac{a}{۲}=۲\Rightarrow a=۴ \\ f(۰)=a\sin\dfrac{\pi}{۶}=\dfrac{a}{۲} \end{cases}$$

۱ مشتق

تعریف: اگر تابع f در نقطه‌ی x_0 پیوسته باشد، آن‌گاه حد زیر در صورت وجود، مشتق f در x_0 نامیده شده و با $f'(x_0)$ نمایش داده می‌شود.



$$\begin{cases} f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \end{cases}$$

تذکر

۱ برای یافتن مشتق در نقطه‌ی x_0 از هر دو رابطه‌ی بالا می‌توان استفاده کرد.

۲ مشتق در نقطه‌ی x_0، در واقع شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ی x_0 است که در ادامه به آن می‌پردازیم.

◄ **از مبحث تعریف مشتق سه تیپ سؤال مطرح می‌شود.**

تیپ ۱ یافتن تابع مشتق با استفاده از تعریف

کلید حل: اگر f تابعی باشد که در تمام دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر است، آن‌گاه f' تابعی است که مقدار مشتق را در هر نقطه به ما می‌دهد و آن را تابع مشتق تابع f می‌نامیم.

برای یافتن ضابطه‌ی تابع مشتق با استفاده از تعریف مشتق از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مثال‌ها

۱. مشتق توابع زیر را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

۱ $f(x)=\sqrt{4-x}$ / خرداد ۸۸

پاسخ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4-(x+h)}-\sqrt{4-x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4-(x+h)}-\sqrt{4-x}}{h}\times\underbrace{\frac{\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}}}_{\text{مزدوج صورت}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(4-(x+h))-(4-x)}{h(\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x})}=\lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{4-x-h}+\sqrt{4-x})}$$

$$=\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$$

۲ $f(x)=2-x^2$ / دی ۸۷

پاسخ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2-(x+h)^2)-(2-x^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{h}=\lim_{h\to 0}-2x-h=-2x$$

تیپ ۲ یافتن مقدار مشتق در یک نقطه

کلید حل: اگر تابع f داده شده باشد، برای یافتن مقدار مشتق در نقطه‌ی x_0، با استفاده از تعریف مشتق، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

مثال‌ها

۲. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق توابع زیر را در نقاط خواسته شده بیابید.

۱ $f(x)=\sqrt{x-1}\ ,\ x=5$ / دی ۹۱

پاسخ

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\times\underbrace{\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2}}_{\text{مزدوج صورت}}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\cancel{x-5}}{\cancel{(x-5)}\times(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}$$

۲ $f(x)=\dfrac{x}{x-1}\ ,\ x=2$ / خرداد ۸۹

پاسخ

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x}{x-1}-2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x-2x+2}{x-1}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(2-x)}^{-1}}{(x-1)\cancel{(x-2)}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{x-1}=-1$$

۳ $f(x)=x^2+4x\ ,\ x=2$ / شهریور ۹۰

پاسخ

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+6)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}(x+6)=8$$

۴ $f(x)=3x-1\ ,\ x=-1$ / شهریور ۹۱

پاسخ

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{3x-1-(-4)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{3\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=3$$

۵ $f(x)=ax^2+bx+c\ ,\ x=-\dfrac{b}{2a}$ / تمرین کتاب درسی

پاسخ

$$f'\left(\frac{-b}{2a}\right)=\lim_{x\to -\frac{b}{2a}}\frac{f(x)-f\left(-\frac{b}{2a}\right)}{x-\left(\frac{-b}{2a}\right)}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{b}{2a}}\frac{(ax^2+bx+c)-\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c\right)}{x+\frac{b}{2a}}$$

$$= \lim_{x\to -\frac{b}{2a}} \frac{ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}}{x+\frac{b}{2a}} \times \frac{4a}{4a}$$

$$= \lim_{x\to -\frac{b}{2a}} \frac{4a^2x^2+4abx+b^2}{4ax+2b} = \lim_{x\to -\frac{b}{2a}} \frac{(2ax+b)^2}{2(2ax+b)}$$

$$= \lim_{x\to -\frac{b}{2a}} \frac{2ax+b}{2} = 0$$

تیپ ۳ — یافتن دامنه‌ی مشتق‌پذیری

کلید حل: دامنه‌ی مشتق‌پذیری تابع f قسمتی از دامنه‌ی آن تابع است که مشتق در آن تعریف می‌شود. برای یافتن دامنه‌ی مشتق‌پذیری ابتدا ضابطه‌ی مشتق تابع f یعنی f' را یافته و سپس دامنه‌ی آن را می‌یابیم. هر نقطه‌ای که در دامنه‌ی f' نباشد، در دامنه‌ی مشتق‌پذیری نیز نخواهد بود.

مثال‌ها

۳. دامنه‌ی مشتق‌پذیری توابع زیر را بیابید.

۱ $y=\sqrt{x}$ — / خرداد ۹۳ و دی ۹۴ /

پاسخ

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow D_{y'}=(0,+\infty)$$

۲ $y=\sqrt{x-2}$ — / دی ۹۳ /

پاسخ

$$y=\sqrt{x-2} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x-2}} \Rightarrow D_{y'}=(2,+\infty)$$

۳ $y=\sqrt[3]{x}$

پاسخ

$$y=\sqrt[3]{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow D_{y'}=\mathbb{R}-\{0\}$$

۴. با استفاده از تعریف مشتق ابتدا مشتق توابع زیر را به‌دست آورده و سپس دامنه‌ی مشتق‌پذیری را مشخص کنید.

۱ $y=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ — / خرداد ۹۰ /

پاسخ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+\sqrt{x+h}}-\frac{1}{1+\sqrt{x}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(1+\sqrt{x})-(1+\sqrt{x+h})}{(1+\sqrt{x+h})(1+\sqrt{x})}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h(1+\sqrt{x+h})(1+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h(1+\sqrt{x+h})(1+\sqrt{x})}\times\underbrace{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}}_{\text{مزدوج صورت}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(1+\sqrt{x+h})(1+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

$$=\frac{-1}{(1+\sqrt{x})^2.(2\sqrt{x})} \Rightarrow D_{y'}=(0,+\infty)$$

۲ $y=\sqrt{6-2x}$ — / خرداد ۹۴ /

پاسخ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{6-2(x+h)}-\sqrt{6-2x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{6-2(x+h)}-\sqrt{6-2x}}{h}\times\underbrace{\frac{\sqrt{6-2(x+h)}+\sqrt{6-2x}}{\sqrt{6-2(x+h)}+\sqrt{6-2x}}}_{\text{مزدوج صورت}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(6-2x-2h)-(6-2x)}{h(\sqrt{6-2x-2h}+\sqrt{6-2x})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{6-2x-2h}+\sqrt{6-2x})}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{6-2x}} \xrightarrow{6-2x>0} D_{y'}=(-\infty,3)$$

۲ دستورها و قضایای مشتق‌گیری

اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی مشتق‌پذیر باشند، داریم:

۱ $y=af(x)\ ,\ a\in\mathbb{R} \Rightarrow y'=af'(x)$

۲ $y=f(x)\pm g(x) \Rightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)$

۳ $y=f(x).g(x) \Rightarrow y'=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$

۴ $y=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y'=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$

۵ $y=fog(x) \Rightarrow y'=(fog)'(x)=g'(x).f'(g(x))$

دستور شماره ۵ به مشتق تابع مرکب معروف است و به‌صورت‌های زیر نیز نمایش داده می‌شود.

$$\begin{cases} y=f(u) \Rightarrow y'=u'f'(u) \\ y=f(u), u=g(x) \Rightarrow y'_x=f'(u)\times g'(x) \end{cases}$$

◀ مجموعه سؤالات مشتق‌گیری در سه تیپ دسته‌بندی می‌شوند.

تیپ ۱ — مشتق توابع چندجمله‌ای

کلید حل: برای یافتن مشتق توابع چندجمله‌ای، از دستورات زیر استفاده می‌کنیم.

۱) $y=k \xrightarrow[\text{ثابت است}]{\text{یک عدد } k} y'=0$

۲) $y=ax^n \Rightarrow y'=nax^{n-1}$

۳) $y=u^n \Rightarrow y'=nu'.u^{n-1}$ (u تابعی برحسب x است.)

مثال‌ها

۵. مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده‌کردن مشتق الزامی نیست.)

۱ $y=(2x-3)^4(x^2+5x)$ — / شهریور ۹۴ /

پاسخ

$$y'=4\times 2(2x-3)^3(x^2+5x)+(2x+5)(2x-3)^4$$

۲ $y=\frac{-x^2+x}{\frac{x}{3}+2}$ / خرداد ۸۹ /

پاسخ

$$y'=\frac{(-2x+1)(\frac{x}{3}+2)-(\frac{1}{3})(-x^2+x)}{(\frac{x}{3}+2)^2}$$

۳ $y=(3x^2-4)^5$ / دی ۹۲ /

پاسخ

$$y'=5(6x)(3x^2-4)^4$$

۴ $y=\frac{3x+1}{x^2-5}$ / شهریور ۹۱ /

پاسخ

$$y'=\frac{3(x^2-5)-(2x)(3x+1)}{(x^2-5)^2}$$

۵ $y=\frac{(2x+3)^2}{5x-1}$ / شهریور ۸۸ /

پاسخ

$$y'=\frac{2(2)(2x+3)(5x-1)-5(2x+3)^2}{(5x-1)^2}$$

۶ $y=\frac{6x+2}{x(3x-1)}$ / دی ۹۱ /

پاسخ

$$y=\frac{6x+2}{3x^2-x}$$

$$y'=\frac{6(3x^2-x)-(6x-1)(6x+2)}{(3x^2-x)^2}$$

۷ $y=(x^3-2x+1)^4+\frac{1}{2x+1}$ / خرداد ۸۸ /

پاسخ

$$y'=4(3x^2-2)(x^3-2x+1)^3+\frac{(0)(2x+1)-2(1)}{(2x+1)^2}$$

۸ $y=\frac{(2x-5)^4}{5x^2+6x}$ / دی ۹۴ /

پاسخ

$$y'=\frac{4\times 2(2x-5)^3(5x^2+6x)-(10x+6)(2x-5)^4}{(5x^2+6x)^2}$$

۹ $y=(\frac{x-1}{2x+3})^3$ / دی ۸۶ /

پاسخ

$$y'=3(\frac{x-1}{2x+3})^2(\frac{(1)(2x+3)-(2)(x-1)}{(2x+3)^2})$$

۱۰ $y=(\frac{2x+1}{x})^4$ / خرداد ۹۳ /

پاسخ

$$y'=4(\frac{2x+1}{x})^3(\frac{(2)(x)-(1)(2x+1)}{x^2})$$

۶. اگر $y=u^2+u$ و $u=x^2-1$ باشد، حاصل $\frac{dy}{dx}$ (مشتق y نسبت به x) را بیابید. / تمرین کتاب درسی /

پاسخ

$$y'_x=y'_u\times u'_x \Rightarrow y'_x=(2u+1).(2x)$$

$$\xrightarrow{u=x^2-1} y'_x=(2(x^2-1)+1).2x$$

تیپ ۲

مشتق توابع رادیکالی

کلید حل: برای محاسبه‌ی مشتق توابع رادیکالی از دستورات زیر استفاده می‌کنیم:

۱) $y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

۲) $y=\sqrt[n]{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

۳) $y=\sqrt[n]{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ (u تابعی برحسب x است.)

۴) $y=\sqrt[n]{u^m} \Rightarrow y'=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$ (u تابعی برحسب x است.)

مثال‌ها

۷. مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست.)

۱ $y=\sqrt{x^2(x+1)}$ / شهریور ۹۳ /

پاسخ

$$y'=\frac{2x(x+1)+(1)(x^2)}{2\sqrt{x^2(x+1)}}$$

۲ $y=\sqrt{x^2-4x}$ / دی ۹۱ /

پاسخ

$$y'=\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}}$$

۳ $y=\sqrt{x^3+2x^2+6}$ / شهریور ۹۲ /

پاسخ

$$y'=\frac{3x^2+4x}{2\sqrt{x^3+2x^2+6}}$$

۴ $y=\sqrt[3]{x^2-4x}$ / خرداد ۸۷ /

پاسخ

$$y'=\frac{(2x-4)}{3\sqrt[3]{(x^2-4x)^2}}$$

۵ $y=\sqrt[4]{(3-2x)^3}$ / خرداد ۸۶ /

پاسخ

$$y'=\frac{3(-2)}{4\sqrt[4]{3-2x}}$$

۶ $y=\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{4x-5}$ / خرداد ۹۲

پاسخ

$$y'=\dfrac{\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}(4x-5)-(4)(\sqrt{x^3+1})}{(4x-5)^2}$$

۷ $y=(7+x^3)\times\sqrt{4x^2+7}$ / دی ۹۴

پاسخ

$$y'=(3x^2)(\sqrt{4x^2+7})+(\dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+7}})(7+x^3)$$

۸ $y=(\dfrac{1}{x}-\sqrt{x})^5$ / شهریور ۸۹

پاسخ

$$y'=5(\dfrac{1}{x}-\sqrt{x})^4\times(\dfrac{-1}{x^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}})$$

۹ $y=(1-4x^3)\sqrt{x^2+2x+1}$ / خرداد ۸۹

پاسخ

$$y'=(-12x^2)\sqrt{x^2+2x+1}+\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+1}}(1-4x^3)$$

۱۰ $y=(x^2-x+5)\times\sqrt{4+2x}$ / شهریور ۸۸

پاسخ

$$y'=(2x-1)\sqrt{4+2x}+\dfrac{2}{2\sqrt{4+2x}}\times(x^2-x+5)$$

۱۱ $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^3}$ / خرداد ۸۸

پاسخ

$$y'=\dfrac{(\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}})(x^3)-(3x^2)(\sqrt{4-x^2})}{x^6}$$

۱۲ $y=\sqrt{x}(\dfrac{1}{x})$ / خرداد ۹۴

پاسخ

$$y'=(\dfrac{1}{2\sqrt{x}})(\dfrac{1}{x})+(\dfrac{-1}{x^2})(\sqrt{x})$$

تیپ ۳

مشتق توابع مثلثاتی

کلید حل: برای محاسبه‌ی مشتق توابع مثلثاتی از دستورات زیر استفاده می‌کنیم. (در تمامی این روابط u تابعی برحسب x و یا خود x می‌تواند باشد.)

۱) $y=\sin u\Rightarrow y'=u'\cos u$

۲) $y=\cos u\Rightarrow y'=-u'\sin u$

۳) $y=\tan u\Rightarrow y'=u'.(1+\tan^2 u)$

۴) $y=\cot u\Rightarrow y'=-u'(1+\cot^2 u)$

۵) $y=\sin^n u\Rightarrow y'=nu'\cos u.\sin^{n-1}u$

۶) $y=\cos^n u\Rightarrow y'=-nu'\sin u.\cos^{n-1}u$

۷) $y=\tan^n u\Rightarrow y'=nu'(1+\tan^2 u).\tan^{n-1}u$

۸) $y=\cot^n u\Rightarrow y'=-nu'(1+\cot^2 u).\cot^{n-1}u$

مثال‌ها

۸. مشتق توابع زیر را بیابید. (ساده کردن الزامی نیست.)

۱ $y=(2x^3-x+7)(\sin x)$ / شهریور ۹۲

پاسخ

$$y'=(6x^2-1)(\sin x)+(\cos x)(2x^3-x+7)$$

۲ $y=2\sin^2(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{4})$ / شهریور ۹۰

پاسخ

$$y'=4\times\sin(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{4})\times\cos(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{4})\times(-\dfrac{1}{4})$$

۳ $y=\cot(6x).\sin x$ / دی ۹۲

پاسخ

$$y'=-6(1+\cot^2(6x))\sin x+\cos x.\cot(6x)$$

۴ $y=3\sin^2(5x)-4\tan x$ / شهریور ۹۱

پاسخ

$$y'=6\sin(5x)\times\cos(5x)\times5-4(1+\tan^2 x)$$

۵ $y=\sin\sqrt{x}.\cos(2x)$ / خرداد ۸۸

پاسخ

$$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\times\cos 2x-2\sin 2x\times\sin\sqrt{x}$$

۶ $y=\sin^3(2x)-\cos(x^2)$ / شهریور ۹۴

پاسخ

$$y'=3\sin^2(2x)\times\cos(2x)\times2+2x\sin(x^2)$$

۷ $y=\tan(4x+1)+\cos(3x^2)$ / شهریور ۸۸

پاسخ

$$y'=4(1+\tan^2(4x+1))-6x\sin(3x^2)$$

۸ $y=\cos^2(5x)-\tan(x^3-4x)$ / خرداد ۹۴

پاسخ

$$y'=2\cos(5x)\times(-\sin(5x))\times5-(3x^2-4)\times(1+\tan^2(x^3-4x))$$

۹ $y=\tan x-2\cos^3(2x)$ / خرداد ۹۳

پاسخ

$$y'=(1+\tan^2 x)+12\cos^2(2x)\times\sin 2x$$

۱۰ $y=\cot(2x)+\sin^2 x$ / دی ۹۰

پاسخ

$$y'=-2(1+\cot^2(2x))+2\sin x.\cos x$$

۳ آهنگ تغییرات

آهنگ متوسط تغییر تابع: اگر متغیر x از مقدار x_1 به مقدار x_2 تغییر کند، مقدار تابع وابسته به x، از $f(x_1)$ به $f(x_2)$ تغییر خواهد کرد. در این صورت (x_2-x_1) را نمو متغیر و $(f(x_2)-f(x_1))$ را نمو تابع نامیده و آهنگ متوسط تغییر تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\text{نمو تابع}}{\text{نمو متغیر}} = \begin{cases} \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\ \dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} \end{cases}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع: در تعریف آهنگ متوسط تغییر تابع f، اگر متغیر x_2 بسیار نزدیک به x_1 شود $(\Delta x \to 0)$، آن‌گاه حد آهنگ متوسط تغییر، برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع می‌شود.

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در } x_1 = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

تذکر آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطه‌ی x_1، همان مشتق تابع f در نقطه‌ی x_1 است.

مثال‌ها

۹. اگر $P(t)=2+t^2$ نمایش ازدیاد یک نوع باکتری در زمان t باشد (t زمان برحسب ساعت)، آهنگ متوسط افزایش جمعیت را در ۵ ساعت اول پس از $t_1=1$ به‌دست آورید. / دی ۹۲

پاسخ زمان ثانویه ۵ ساعت پس از زمان اولیه است، بنابراین داریم:

$$t_2=t_1+5=1+5=6\,,\,P(6)=38\,,\,P(1)=3$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{P(t_2)-P(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{P(6)-P(1)}{6-1}=\frac{38-3}{5}=7$$

۱۰. تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=-x^2+5x$ داده شده است. آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی متغیر از ۱ به ۳ تغییر می‌کند، به‌دست آورید. / شهریور ۹۳

پاسخ

$$\begin{cases} x_1=1 \\ f(x_1)=4 \end{cases} , \begin{cases} x_2=3 \\ f(x_2)=6 \end{cases}$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{6-4}{3-1}=1$$

۱۱. آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ وقتی متغیر از $x_1=3$ به $x_2=8$ تغییر می‌کند را بیابید. / خرداد ۹۲

پاسخ

$$\begin{cases} x_1=3 \\ f(x_1)=2 \end{cases} , \begin{cases} x_2=8 \\ f(x_2)=3 \end{cases}$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{3-2}{8-3}=\frac{1}{5}$$

۱۲. حجم آب یک استخر در حال تخلیه برحسب لیتر از رابطه‌ی $V=120(2500-50t+t^2)$ به‌دست می‌آید. آهنگ لحظه‌ای تخلیه را در دقیقه‌ی دهم به‌دست آورید. (t برحسب دقیقه است.) / تمرین کتاب درسی

پاسخ آهنگ لحظه‌ای تخلیه‌ی آب این استخر برابر V'_{10} است.

$$V_t=120(2500-50t+t^2)\Rightarrow V'_t=120(-50+2t)$$

$$V'_{10}=120(-50+2\times 10)=-3600\,lit/\min$$

۱۳. اگر $P(t)=3000+100t^2$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t باشد (t برحسب ساعت):

الف) آهنگ متوسط افزایش جمعیت را در ۵ ساعت اول پس از زمان $t_0=2$ به‌دست آورید.

ب) آهنگ لحظه‌ای افزایش جمعیت را در $t=3$ به‌دست آورید. / شهریور ۹۴

پاسخ

الف

$$\begin{cases} t_0=t_1=2 \\ P(t_1)=3400 \end{cases} , \begin{cases} t_2=t_1+5=7 \\ P(t_2)=7900 \end{cases}$$

$$\text{آهنگ متوسط افزایش جمعیت} = \frac{P(t_2)-P(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{7900-3400}{7-2}=900$$

ب آهنگ لحظه‌ای افزایش جمعیت در $t=3$ برابر $P'(3)$ است.

$$P'(t)=200t \xrightarrow{t=3} P'(3)=600$$

۱۴. تابع $f(x)=x^2+2x-1$ داده شده است.

الف) آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی متغیر از نقطه‌ی $x_1=1$ به $x_2=3$ تغییر کند، تعیین کنید.

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع را در نقطه‌ی $x_0=2$ به‌دست آورید. / خرداد ۹۴

پاسخ

الف

$$\begin{cases} x_1=1 \\ f(x_1)=2 \end{cases} , \begin{cases} x_2=3 \\ f(x_2)=14 \end{cases}$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{14-2}{3-1}=6$$

ب آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع در $x_0=2$ برابر $f'(2)$ است.

$$f'(x)=2x+2 \xrightarrow{x_0=2} f'(2)=6$$

نکته اگر متحرکی با معادله‌ی $y=S(t)$ حرکت کند، آن‌گاه خواهیم داشت:

۱) $\text{سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی } [t_1,t_2] = \dfrac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}$

۲) $\text{سرعت لحظه‌ای} = S'(t)$

۳) $\text{شتاب لحظه‌ای} = S''(t)$

در واقع آهنگ متوسط تغییر مکان، همان سرعت متوسط و مشتق اول تغییر مکان $(S'(t))$ همان سرعت لحظه‌ای و مشتق دوم تغییر مکان $(S''(t))$ همان شتاب در لحظه t است.

۱۵. معادله‌ی حرکت یک متحرک روی یک خط مستقیم به‌صورت $f(t)=2t^2-5t+1$ است.

الف) سرعت متوسط این متحرک را در فاصله‌ی زمانی $t_1=0$ و $t_2=3$ تعیین کنید. / شهریور ۹۲ و مشابه دی ۹۳

ب) سرعت لحظه‌ای این متحرک را در $t=2$ بیابید.

پاسخ

الف

$$\begin{cases} t_1=0 \\ f(t_1)=1 \end{cases} , \begin{cases} t_2=3 \\ f(t_2)=4 \end{cases}$$

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{4-1}{3-0}=1$$

ب سرعت لحظه‌ای در $t = 2$، در واقع همان $f'(2)$ است.

$$f'(t) = 4t - 5 \xRightarrow{t=2} f'(2) = 3$$

۱۶. معادله‌ی حرکت متحرکی به‌صورت $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + 1$ می‌باشد.

الف) سرعت متوسط این متحرک را در فاصله‌ی زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 4$ به‌دست آورید.

ب) آهنگ آنی تغییرات $f(t)$ را در $t = 7$ بیابید. / خرداد ۹۱ /

پاسخ

الف

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ f(t_1) = 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} t_2 = 4 \\ f(t_2) = -3 \end{cases}$$

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{-3 - 1}{4 - 0} = -1$$

ب آهنگ آنی تغییرات $f(t)$ در $t = 7$ برابر است با: $f'(7)$

$$f'(t) = t - 3 \Rightarrow f'(7) = 4$$

۱۷. توپ تنیسی را به هوا پرتاب می‌کنیم. اگر مسافت پیموده‌شده توسط توپ برحسب متر، تابعی از زمان به‌صورت $S(t) = 12t - 3t^2$ باشد:

الف) سرعت متوسط را در ۲ ثانیه‌ی اول به‌دست آورید.

ب) در چه زمان و ارتفاعی سرعت توپ صفر می‌شود؟

ج) در لحظه‌ی $t = 4$ وضعیت توپ چگونه است و چه سرعتی دارد؟ / تمرین کتاب درسی /

پاسخ

الف

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ S(t_1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t_2 = 2 \\ S(t_2) = 12 \end{cases}$$

$$\text{سرعت متوسط در ۲ ثانیه‌ی اول} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{12 - 0}{2 - 0} = 6\,m/s$$

ب

$$V(t) = S'(t) = 12 - 6t$$

$$V(t) = 0 \Rightarrow 12 - 6t = 0 \Rightarrow t = 2s$$

یعنی در $t = 2s$ توپ در نقطه‌ی اوج خود قرار می‌گیرد. حال برای محاسبه‌ی ارتفاع نقطه‌ی اوج داریم:

$$S(2) = 12 \times 2 - 3(2)^2 = 12m$$

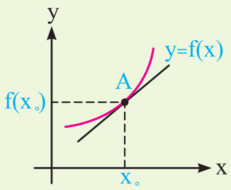
ج در $t = 4$ توپ به نقطه‌ی اولیه‌ی خود بازمی‌گردد و سرعتش برابر و در خلاف جهت سرعت اولیه است.

$$V(t) = S'(t) = 12 - 6t$$

$$V(4) = 12 - 6(4) = -12\,m/s$$

۴ شیب خط مماس برمنحنی

برای محاسبه‌ی شیب خط مماس بر منحنی $f(x)$ در $x = x_0$، کافی است با استفاده از دستورها و قضایای مشتق‌گیری، $f'(x)$ را یافته و مقدار آن را در $x = x_0$ بیابیم.



$$\text{شیب خط مماس در } x = x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

مثال‌ها

۱۸. شیب خط مماس بر نمودار توابع زیر را در نقاط مشخص شده به‌دست آورید.

۱ $y = x^3 - 2x \;,\; x = 1$ / شهریور ۹۴ /

پاسخ

$$y' = 3x^2 - 2 \xRightarrow{x=1} y'(1) = 1 \Rightarrow m_{\text{مماس}} = 1$$

۲ $y = x^3 - x + 5 \;,\; x = 1$ / دی ۹۲ /

پاسخ

$$y' = 3x^2 - 1 \xRightarrow{x=1} y'(1) = 2 \Rightarrow m_{\text{مماس}} = 2$$

۳ $y = x^2 - x \;,\; x = 5$ / خرداد ۹۲ /

پاسخ

$$y' = 2x - 1 \xRightarrow{x=5} y'(5) = 9 \Rightarrow m_{\text{مماس}} = 9$$

۴ $y = \sqrt{x + 5} \;,\; x = 4$ / شهریور ۹۱ /

پاسخ

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + 5}} \xRightarrow{x=4} y'(4) = \frac{1}{6} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{1}{6}$$

۵ $y = \sqrt{x^2 + 4x} \;,\; x = 1$

پاسخ

$$y' = \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x}} \xRightarrow{x=1} y'(1) = \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$