گزینه دو

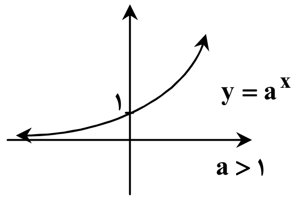
مؤسسه آموزشی فرهنگی

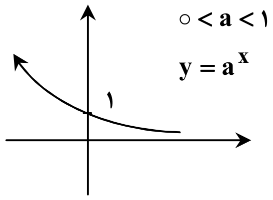
ریاضی ۲

(فصل ۴)

توابع نمایی:

هر تابع به‌صورت $y=a^x$ که a عددی حقیقی و $a\neq 1$ و $a>0$ و x متغیر است. یک تابع نمایی نامیده می‌شود. دامنه توابع نمایی تمام اعداد حقیقی و برد آن R^+ است.

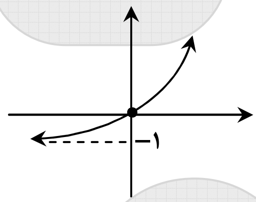




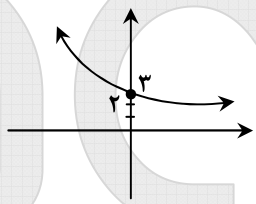
در این حالت اکیداً صعودی است.   در این حالت اکیداً نزولی است.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

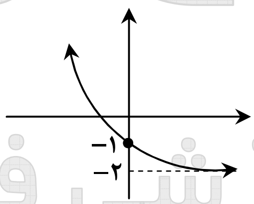
$y=2^x-1$



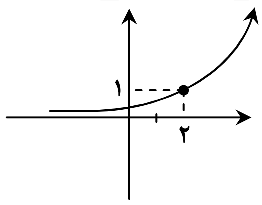
$y=(\frac{1}{3})^x+2$



$y=3^{-x}-2$

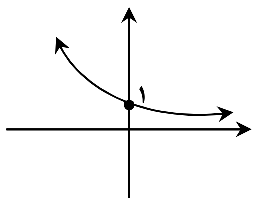


$y=3^{x-2}$



$$y=\frac{(\frac{1}{6})^x}{5^{-x}}$$

$$y=\frac{6^{-x}}{5^{-x}}=(\frac{6}{5})^{-x}=(\frac{5}{6})^x$$



خواص تابع نمایی:

$۱)\ a^x . a^y = a^{x+y}$ $\quad$ $۲)\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad$ $۳)\ (a^x)^y = a^{xy}$

☜مثال: اگر سرعت تکثیر سلول‌ها براساس یک تابع نمایی قابل مدل‌سازی باشد، و بعد از ۲ ساعت تعداد سلول‌ها ۱۲ و بعد از ٤ ساعت ٤٨ باشد، تعداد سلول‌ها ۷ ساعت پس از شروع تکثیر چقدر است؟

✍حل:

اگر سرعت رشد سلول‌ها را با تابع $y = ka^t$ مدل‌سازی کنیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} y(۲) = ka^۲ = ۱۲ \\ y(۴) = ka^۴ = ۴۸ \end{array}\right\} \Rightarrow a^۲ = ۴ \xrightarrow{a>۰} a = ۲ \rightarrow k = ۳$$

$$\rightarrow y(t) = ۳ \times ۲^t \rightarrow y(۷) = ۳ \times ۲^۷ = ۳۸۴$$

دقت کنید که علت استفاده از ضریب k آن است که سلول‌ها با یک مقدار اولیه شروع به افزایش می‌کنند. این مقدار اولیه را در لحظه‌ی $t = ۰$، k در نظر گرفتیم.

☜مثال: معادلات یا نامعادلات زیر را حل کنید .

الف) $(\frac{۱}{۵\sqrt{۵}})^x = ۱۲۵^{۲x-۱}$

$$۵^{-\frac{۳}{۲}x} = ۵^{۶x-۳} \Rightarrow ۶x - ۳ = -\frac{۳}{۲}x \Rightarrow ۶x + \frac{۳}{۲}x = ۳ \Rightarrow \frac{۱۵}{۲}x = ۳ \Rightarrow x = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲}{۵}$$

ب) $۹^x = ۲ \times ۳^{x+۲} - ۴۵$

$$۳^{۲x} - ۲ \times ۹ \times ۳^x + ۴۵ = ۰ \Rightarrow (۳^x)^۲ - ۱۸(۳^x) + ۴۵ = ۰ \Rightarrow (۳^x - ۱۵)(۳^x - ۳) = ۰ \left\langle \begin{array}{l} ۳^x = ۱۵ \rightarrow x = \log_۳^{۱۵} \\ ۳^x = ۳ \rightarrow x = ۱ \end{array}\right.$$

ج) $(۳-\sqrt{۸})^{x^۲} \geq (۳+\sqrt{۸})^x$

$$(۳-\sqrt{۸}) \times \frac{(۳+\sqrt{۸})}{۳+\sqrt{۸}} = \frac{۱}{۳+\sqrt{۸}}$$

$$(\frac{۱}{۳+\sqrt{۸}})^{x^۲} \geq (۳+\sqrt{x})^x \Rightarrow (۳+\sqrt{۸})^{-x^۲} \geq (۳+\sqrt{۸})^x$$

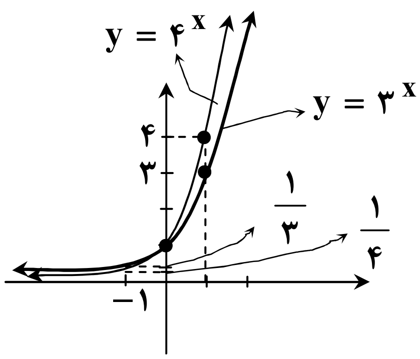
چون $۱ < \sqrt{۸} + ۳$ است، پس این تابع صعودی است، لذا لازم است:

$$-x^۲ \geq x \Rightarrow x^۲ + x \leq ۰ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۰$$

☜مثال: دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{۳^x - ۴^x}$ کدام است؟

✍حل:

باید $۳^x - ۴^x \geq ۰$ باشد، پس باید $۳^x \geq ۴^x$ باشد. چون $۴ > ۳$ است، پس تابع ۴^x برای $x \geq ۰$ سریع‌تر از تابع ۳^x بزرگ می‌شود و برای $x < ۰$ سریعتر از تابع ۳^x کوچک می‌شود.



پس برای $x \leq ۰$، $۴^x \leq ۳^x$ است، لذا دامنه‌ی تابع $D = (-\infty, ۰]$ است.

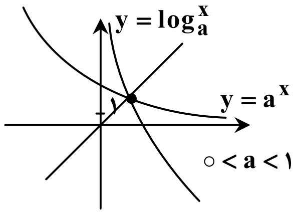
توابع لگاریتمی:

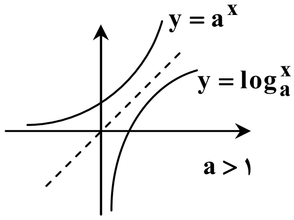
چون تابع نمایی $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ تابعی یک به یک است، لذا معکوس‌پذیر است. معکوس تابع نمایی، تابع لگاریتمی نامیده می‌شود.

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a^y \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_a^x$$

دامنه تابع لگاریتمی: $D_f = \{x > 0 \mid a > 0, a \neq 1\}$

برد توابع لگاریتمی R است.

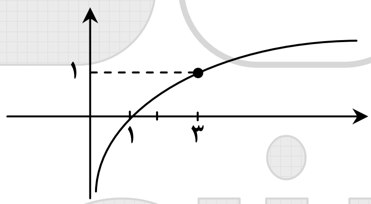




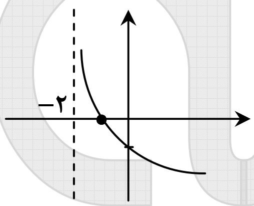
اگر پایه لگاریتم را ذکر نکردند، آن را ۱۰ در نظر می‌گیریم.

☜مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

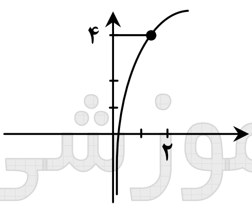
الف) $y = \log_3^x$



ب) $y = \log_{\frac{1}{2}}^{x+2}$



ج) $y = \log_2^x + 3$



☜مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \sqrt{\log \dfrac{5x - x^2}{4}}$

$$\log \frac{5x - x^2}{4} \geq 0 \Rightarrow \frac{5x - x^2}{4} \geq 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 4$$

دقت کنید که شرط $\dfrac{5x - x^2}{4} \geq 1$، شرط $\dfrac{5x - x^2}{4} > 0$ را هم تأمین می‌کند.

ب) $$f(x) = \log_{1+x}^{9-x^2} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 9 - x^2 > 0 \Rightarrow -3 < x < 3 \\ 1 + x > 0, 1 + x \neq 1 \Rightarrow x > -1, x \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D = (-1, 3) - \{0\}$$

$$f(x) = \sqrt{\log^{\log^{\log^{x-2}}}}$$

ج) $\log^{\log^{\log^{x-2}}} \ge 0 \to \log^{\log^{(x-2)}} \ge 10^{0} = 1 \Rightarrow \log^{(x-2)} \ge 10^{1} = 10$

$\Rightarrow x-2 \ge 10^{10} \Rightarrow x \ge 10^{10}+2 \Rightarrow D=[10^{10}+2,\infty)$

خواص لگاریتم:

$1)\ \log_a^x=\log_a^y \Rightarrow x=y$

$2)\ \log_a^1=0$ و $\log_a^a=1$

$3)\ \log_a^x+\log_a^y=\log_a^{xy}$

$4)\ \log_a^x-\log_a^y=\log_a^{\frac{x}{y}}$

$5)\ \log_{a^n}^{x^m}=\frac{m}{n}\log_a^x$

$6)\ \log_y^x=\frac{\log_z^x}{\log_z^y}$

در حالت کلی: $\log_b^a\times\log_c^b\times\log_d^c=\log_d^a$

این قضیه به تعداد نامحدودی لگاریتم قابل تعمیم است.

نتیجه: $\log_y^x=\frac{1}{\log_x^y}$

$6)\ x^{\log_a^y}=y^{\log_a^x}$

اگر لگاریتم دو عدد باهم برابر باشند، خود دو عدد نیز برابرند. تساوی فوق با لگاریتم گرفتن از دو طرف اثبات می‌شود.

$7)\ a^{\log_a^x}=x$

$$8)\ \log_a^x>y:\begin{cases} x>a^y & a>1 \\ x<a^y & 0<a<1 \end{cases} \quad (x>0,\ y\in R)$$

☜مثال: اگر $\log_{12}^{3}=a$ آن‌گاه $\log_{\sqrt{3}}^{16}$ کدام است؟

✍حل:

$$\log_{12}^3=a \to \log_3^{12}=\frac{1}{a}=\log_3^{3\times4}=\log_3^3+\log_3^4=1+\log_3^4=\frac{1}{a} \Rightarrow \log_3^4=\frac{1}{a}-1$$

$$\log_{\sqrt{3}}^{16}=\log_{3^{\frac{1}{2}}}^{4^2}=\frac{2}{\frac{1}{2}}\log_3^4=4\log_3^4=4(\frac{1}{a}-1)=\frac{4(1-a)}{a}$$

☜مثال: اگر $\log^2=0/301$ باشد، $\log^{25}$ چقدر است؟

✍حل:

$$\log^{5^2}=2\log^5=2\log^{\frac{10}{2}}=2(\log10-\log2)=2(1-\log2)=2(1-0/301)=1/398$$

☜مثال: لگاریتم عددی در پایه ۹ از لگاریتم عکس مجذور آن در پایه ۹ به اندازه‌ی ۴/۵ واحد بیش‌تر است. آن عدد کدام است؟

✍حل:

$$\log_9^x=\log_9^{\frac{1}{x^2}}+4/5 \Rightarrow \log_9^x-\log_9^{\frac{1}{x^2}}=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \log_9^{\frac{x}{\frac{1}{x^2}}}=\frac{9}{2} \Rightarrow \log_{3^2}^{x^3}=\frac{9}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}\log_3^x=\frac{9}{2} \Rightarrow \log_3^x=3 \Rightarrow x=3^3=27$$

مثال: اگر $\log_b^a = \frac{3}{2}$ آن‌گاه $\log_{\sqrt{b}}^{ab^2}$ کدام است؟

حل:

$$\log_{\sqrt{b}}^{ab^2} = \log_{\sqrt{b}}^{a} + \log_{\sqrt{b}}^{b^2} = \log_{b^{\frac{1}{2}}}^{a} + \log_{b^{\frac{1}{2}}}^{b^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_b^a + \frac{2}{\frac{1}{2}}\log_b^b = 2\log_b^a + 4\log_b^b = 2\log_b^a + 4 = 2\times\frac{3}{2} + 4 = 7$$

مثال: حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $5^{(2\log_5^2 + 3\log_5^3)}$

$$5^{\log_5^4 + \log_5^{27}} = 5^{\log_5^{4\times 27}} = 4\times 27 = 108$$

ب) $[\log_6^2] + [\log_2^6]$

$$\left.\begin{array}{l} \log_6^1 = 0 \\ \log_6^6 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \log_6^2 < 1 \Rightarrow [\log_6^2] = 0$$

$$\log_2^4 = 2 \Rightarrow \log_2^8 = 3 \Rightarrow 2 < \log_2^6 < 3 \Rightarrow [\log_2^6] = 2 \Rightarrow [\log_2^6] + \left[\ \log_6^2\ \right] = 2$$

ج) $(0/2)^{-2+\log_{\sqrt{5}}^{10}}$

$$(0/2)^{-2+\log_{5^{\frac{1}{2}}}^{2\times 5}} = (0/2)^{-2+\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_5^{2\times 5}} = (0/2)^{-2+2\log_5^{2\times 5}} = (0/2)^{-2+2(\log_5^2+\log_5^5)} = (0/2)^{-2+2\log_5^2+2} = (0/2)^{\log_5^4}$$

$$= (\frac{10}{2})^{-\log_5^4} = 5^{\log_5^{4^{-1}}} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

د) $|\log_{\frac{1}{2}}^{8}| + \log_8^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$|\log_{2^{-1}}^{2^3}| + \log_{2^3}^{2^{-\frac{1}{2}}} = |\frac{3}{-1}\log_2^2| + \frac{-\frac{1}{2}}{3}\log_2^2 = 3 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$$

هـ) $\log_{x^2\sqrt{x}}^{x\sqrt[3]{x^2}}$

$$\log_{x^{2+\frac{1}{2}}}^{x^{1+\frac{2}{3}}} = \log_{x^{\frac{5}{2}}}^{x^{\frac{5}{3}}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{2}}\log_x^x = \frac{2}{3}$$

مثال: مجموعه جواب معادلات یا نامعادلات زیر را بیابید.

الف) $5^x = 3^{1-x}$

از دو طرف پایه ۳ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_3^{5^x} = \log_3^{3^{1-x}} \Rightarrow x\log_3^5 = (1-x)\log_3^3 = (1-x) \Rightarrow x(\log_3^5 + 1) = 1 \rightarrow x(\log_3^5 + \log_3^3) \Rightarrow x = \frac{1}{\log_3^{15}} = \log_{15}^3$$

ب) $\log\frac{x+3}{5} < -1$

$$\frac{x+3}{5} < 10^{-1} = \frac{1}{10} \Rightarrow x+3 < \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

ج) $\log^{x-1}+\log^{x+1}=\log^{3}$

$$\log^{(x-1)(x+1)}=\log^{3} \Rightarrow x^{2}-1=3 \Rightarrow x^{2}=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

با توجه به دامنه $\log x$، فقط $x=2$ قابل قبول است.

د) $x^{\log_{5}^{x}}=625$

از ۲ طرف در پایه ۵ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_{5}^{(x^{\log_{5}^{x}})}=\log_{5}^{625}=\log_{5}^{5^{4}}=4$$

$$\log_{5}^{x}\times\log_{5}^{x}=(\log_{5}^{x})^{2}=4 \Rightarrow \log_{5}^{x}=\pm 2 \left\langle \begin{array}{l} x=25 \\ x=\frac{1}{25} \end{array}\right.$$

هـ) $\log_{\frac{1}{9}}^{\frac{x-1}{3}}<\log_{\frac{1}{2}}^{2}$

$$\log_{\frac{1}{9}}^{\frac{x-1}{3}}<\log_{2^{-1}}^{2}=-1 \Rightarrow \frac{x-1}{3}>(\frac{1}{9})^{-1}=9 \Rightarrow x-1>27 \Rightarrow x>28$$

و) $\log(3x-1)=(\log 5)^{2}-(\log 2)^{2}$

$$\log^{3x-1}=(\log^{5}-\log^{2})(\log^{5}+\log^{2})=(\log^{\frac{5}{2}}\times\log^{10})=\log^{\frac{5}{2}} \Rightarrow 3x-1=\frac{5}{2} \Rightarrow x=\frac{7}{6}$$

ن) $\log_{x}^{3}+\log_{x}^{2x+9}=2$

$$\log_{x}^{3(2x+9)}=2 \Rightarrow 6x+27=x^{2} \to x^{2}-6x-27=0 \Rightarrow (x-9)(x+3)=0 \left\langle \begin{array}{l} x=-3 \\ x=9 \end{array}\right.$$

با توجه به دامنه $\log^{x}$ که باید $x>0$ باشد، فقط $x=9$ قابل قبول است.

ی) $x^{1+\log_{10}^{x}}=10^{2}$

$$\log x^{(1+\log_{10}^{x})}=\log 10^{2}=2$$

$$(1+\log_{10}^{x})\log_{10}^{x}=2 \to (\log^{x})^{2}+(\log^{x})-2=0 \to (\log^{x}+2)(\log^{x}-1)=0$$

$$\Rightarrow \log x=-2,1 \Rightarrow x=10^{-2},10$$

مثال: کدام عبارت صحیح است؟

۱) $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}}>\log_{\frac{1}{2}}^{100}$ ۲) $\log_{\frac{1}{2}}^{3}>\log_{3}^{2}$ ۳) $\log_{5}^{3}>\log_{3}^{5}$ ۴) $\log_{\frac{1}{2}}^{3}>\log_{\frac{1}{2}}^{2}$

حل:

توابع لگاریتمی برای پایه‌های بزرگ‌تر از ۱ صعودی و برای پایه‌های کوچک‌تر از ۱ نزولی‌اند. پس عبارت زیر به‌علت نزولی بودن لگاریتم صحیح است: (به همین دلیل گزینه ٤ غلط است)

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}}>\log_{\frac{1}{2}}^{100}$$

در گزینه‌ی ۲، $0<\log_{3}^{2}<1$ و $-2<\log_{\frac{1}{2}}^{3}=-\log_{2}^{3}<-1$ است. و در گزینه‌ی ۳: $0<\log_{3}^{5}$ و $0>\log_{5}^{3}$ است.

مثال: اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱$ باشد، عدد $۵^{۳۰}$ چند رقمی است؟

حل:

برای آن‌که بدانیم عدد چند رقمی است، ابتدا از آن لگاریتم می‌گیریم:

$$\log ۵^{۳۰} = ۳۰\log ۵ = ۳۰\log \frac{۱۰}{۲} = ۳۰(\log ۱۰ - \log ۲) = ۳۰(۱ - \log ۲) = ۲۰/۹۷$$

عدد $۱۰^{n-۱}$، عددی n رقمی است. حال کلیه اعداد n رقمی بین $۱۰^{n-۱}$ و ۱۰^{n} قرار دارند، لذا لگاریتم یک عدد n رقمی بین n و $n-۱$ است. لذا: اگر عدد A، n رقمی باشد، $[\log A]+۱=n$ می‌باشد.

پس برای یافتن تعداد ارقام یک عدد پس از آن که از آن لگاریتم گرفتیم، از حاصل براکت گرفته و با یک جمع می‌کنیم. لذا این عدد: $[۲۰/۹۷]+۱=۲۱$ رقمی است.