زنگ حل مساله: (هفته‌ی دهم (آخر))

☺. صفحه را با دو رنگ، رنگ می‌کنیم. ثابت کنید می‌توان یکی از رنگ‌ها را طوری انتخاب کرد که به ازای هر $d \in R^+$ حتما نقاطی به فاصله d باشند که هر دو سر پاره خط به آن رنگ هستند.

☺. یک دسته سنگریزه داده شده است. هر نفر در نوبت خود همه دسته‌های دارای بیش از یک عضو را به دو قسمت تقسیم می‌کند. کسی که در نوبت خود نتواند حرکتی انجام دهد بازنده است. برای چه nهایی نفر اول استراتژی برد دارد؟

☺. مربع‌های ۱×۱ یک جدول ٤×۷ با رنگ‌های سفید و سیاه رنگ شده‌اند. ثابت کنید مستطیلی وجود دارد که خانه‌های چهار گوشه‌اش از یک رنگ باشند.

☺. جدولی $n \times n$ در اختیار داریم که چهار خانه گوشه‌اش سیاه و بقیه خانه‌هایش سفیدند. در هر حرکت می‌توان یک سطر یا ستون را انتخاب کرد و رنگ خانه‌هایش را تغییر داد. آیا می‌توان به جدولی با خانه‌های همرنگ رسید؟

☺. در هر خانه از یک جدول ۸×۸ یک عدد صحیح نوشته شده است. در هر حرکت می‌توان به همه اعداد موجود در یک ۲×۲ یا ۳×۳ یک واحد اضافه کرد. آیا همواره می‌توان به ٦٤ عدد زوج رسید؟

☺. آیا جدولی ۱۰×۱۰ وجود دارد که خانه‌هایش با عناصر ۰ ، ۱ و ۱− پر شده باشد و مجموع سطرها و ستون‌ها و دو قطر آن ۲۲ عدد متمایز باشند؟

☺. آیا برای هر n نقطه دلخواه در صفحه، دایره‌ای است که دقیقا k تا از نقاط درون آن باشند.

☺. آیا جدولی ٤×٤ وجود دارد که در هر خانه‌اش یک عدد حقیقی ناصفر وجود داشته باشد و برای هر مربع ۲×۲ یا ۳×۳ یا ٤×٤ مجموع چهار گوشه‌اش صفر باشد؟

☺. در یک اتاق ۱×۱ ، n فرش پهن کرده‌ایم که مجموع مساحتشان بیش از $n-1$ است. ثابت کنید قسمتی از اتاق وجود دارد که هر n فرش آن را پوشانده‌اند؟

☺. جدولی $n \times n$ داریم که در خانه‌های آن اعداد ۱ تا n^2 را قرار داده‌ایم بطوری‌که در سطر i، اعداد $(i-1)n+1$ تا $i \times n$ به ترتیب از چپ به راست قرار داده‌ایم. n خانه از جدول را برمی‌داریم که از هر سطر و ستون یک خانه انتخاب شود و مجموع اعداد درونشان بدست می‌آوریم. ثابت کنید این عدد به نوع انتخاب سطر و ستون‌ها بستگی ندارد و یکتاست.

☺. n سنگریزه در اختیار داریم. ۲ نفر در هر مرحله از این دسته یکی از اعضای $\{1, 2, 3, 5, 7, \ldots\}$ را برمی‌داریم. به ازای چه nهایی نفر اول می‌تواند آخرین سنگریزه را بردارد؟

☺. n نوع وزنه مختلف در اختیار داریم. ثابت کنید با ۲ بار وزن کردن آنها با ترازوی یک کفه‌ای می‌توان وزن هر نوع را مشخص کرد.

☺. ثابت کنید می‌توان هر مثلث دلخواه را به ۱۳۸۶ مثلث متساوی الساقین تقسیم کرد.

☺. همه نقاط صفحه با ۲ رنگ، رنگ شده‌اند. ثابت کنید مثلثی به مساحت ۱ وجود دارد که ۳ راسش همرنگ باشند.

☺. a_1 تا a_n اعدادی طبیعی و فردند. ثابت کنید n عدد q_1 تا q_n وجود دارند که $q_i \epsilon \{0, \pm 1\}$ و q_iها همگی با هم صفر نیستند و $\sum q_i a_i$ بر 2^{n-1} بخشپذیر باشد.

☺. تورنومنت یک king دارد، اگر و تنها اگر تیمی تمام تیم‌ها را برده باشد.

☺. ۱۰۰ نفر از شهر A و ۱۰۰ نفر از شهر B در یک صف ایستاده‌اند. ثابت کنید ۱۰۰ نفر متوالی هستند که ۵۰نفر از هرکدام از ۲شهر باشند. اگر از هر شهر ۱۲۰ نفر باشند نیز چنین ۱۰۰ نفری پیدا می‌شود؟

☺. حداکثر چند مهره سیاه و سفید می‌توان در یک جدول ۸×۸ قرار داد که در هر سطر و هر ستون تعداد مهره‌های سفید ۲ برابر سیاه‌ها باشد.

☺. در ابتدا صفحه شطرنجی ۸×۸ داریم. در هر مرحله می‌توانیم یک سطر یا یک ستون را انتخاب و رنگ تمام خانه‌هایش را برعکس کنیم آیا می‌توان با این حرکات به جدولی رسید که تنها یک خانه سیاه داشته باشد.

☺. یک شکلات مستطیل شکل $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ داریم. هر نفر در نوبت خود یک شکلات را از روی خطوط موازی با ضلع می‌شکند. برنده کسی است که در پایان نوبت او تمام قطعات ۱×۱ باشند. چه کسی استراتژی برد دارد؟

☺. n عدد حقیقی دور دایره‌ای قرار دارند که جمعشان برابر یک است. n عدد را به طور ساعتگرد در خطی می‌نویسیم (به همان ترتیب اولیه) و عدد iام را در i^2 ضرب می‌کنیم. ثابت کنید می‌توان از عددی شروع کرد که مجموع این اعداد از $\frac{n^2}{3}$ کمتر نشود.

☺. ۲۵ خرچنگ و ۲۵ قورباغه دور دایره‌ای هستند. ثابت کنید حیوانی هست که دو سمت او قورباغه است.

☺. یک مستطیل را توسط تعدادی فرش پوشانده‌ایم. ثابت کنید مجموع عرض فرش‌ها از عرض مستطیل کمتر نیست.

☺. یک درخت حداکثر چند زیردرخت دارد؟

☺. عدد n داده شده است. ثابت کنید دقیقا یک عدد n رقمی متشکل از اعداد ۱ و ۲ می‌توان ساخت که بر 2^n بخشپذیر باشد.

☺. دایره‌ای را توسط n خط تقسیم کرده‌ایم به طوری‌که هیچ ۳ خطی همرس نیستند. ثابت کنید می‌توان ناحیه‌ها را با ۲ رنگ، رنگ آمیزی نمود که هیچ ۲ ناحیه مجاور ضلعی‌ای همرنگ نباشند.

☺. 2^{n+1} عدد طبیعی داریم. ثابت کنید 2^n عدد از این اعداد را می‌توان یافت که مجموعشان بر 2^n بخشپذیر باشد.

☺. در آسمان شب هر ستاره در بازه‌ای از زمان رخ می‌نماید. می‌دانیم برای هر n ستاره حداقل ۲ تا از آنها همزمان دیده می‌شوند. ثابت کنید میتوان $\mathrm{n}-1$ عکس از آسمان شب گرفت که تمامی ستارگان در آن هویدا باشند.

☺. 2^{n} شهر داریم که که بین هر دو شهری یک جاده است. به هر شهر عددی از ۱ تا n نسبت داده شده است. ثابت کنید بدون توجه به رنگ آمیزی شهرها می‌توان جاده ها را طوری رنگ کرد که حداقل یک جاده به رنگ شهرهای دوسرش باشد.

☺. مجموعه $\{$ ۱ ، ۲ ، ... ، $\mathrm{n}-1$ ، n $\}$ داده شده است. می‌خواهیم این اعداد را به ۳ دسته تقسیم کنیم که مجموع اعداد هر دسته با هم برابر باشند. به ازای چه nهایی این کار را می‌توان انجام داد؟

☺. ثابت کنید مجموع بزرگترین مقسوم علیه فرد اعداد $n + 1$ ، ... ، $2n$ برابر n^2 است.

☺. ۵۲۸ صندوقچه با درهای بسته با شماره‌های ۱ تا ۵۲۸ موجودند. افرادی با شماره‌های ۱ تا ۵۲۸ این صندوقچه‌ها را یک به یک مورد بررسی قرار می‌دهند. در بررسی صندوقچه‌ی i توسط k، اگر i بر k بخشپذیر باشد، فرد شماره‌ی k وضعیت درِ صندوقچه‌ی i را تغییر حالت می‌دهد؛ اگر باز بود می‌بندد و اگر بسته بود آن را باز می‌کند.

می خواهیم تعدادی از این افراد را انتخاب کنیم تا آنها هرکدام همه‌ی صندوقچه‌ها را بررسی کنند و در انتها فقط درِ صندوقچه‌ی شماره‌ی ۱ باز بماند و بقیه‌ی صندوقچه‌ها بسته باشند. ثابت کنید که دقیقا یک گروه مشخص از افراد جواب این سوال است. درستی ادعای خود را اثبات نمایید.

☺. ۸۵ تا سیب داریم. نفر اول به شکل تصادفی یکی از اعداد ۱ یا ۲ یا ۳ تا برمی‌دارد و نفر دوم آدم باهوشی است. کسی برنده است که سیب‌ها رو به صفر برساند. به چه احتمالی نفر دوم می‌برد؟

☺. در آسمان شب هر ستاره در بازه‌ای از زمان رخ می‌نماید. می‌دانیم برای هر n ستاره حداقل ۲ تا از آنها همزمان دیده می‌شوند. ثابت کنید می‌توان $\mathrm{n} - 1$ عکس از آسمان شب گرفت که تمامی ستارگان در آن هویدا باشند.

☺. $\mathrm{n} \geq 3$ نقطه روی صفحه وجود دارد. هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط نیستند. نقطه‌ای را "خوب" می‌نامیم که مجموع فواصل آن تا همه نقاط کمینه باشد. ثابت کنید دقیقا یک نقطه‌ی خوب وجود دارد.

☺. به چند طریق می‌توان یک جدول $3 \times 2\mathrm{n}$ را با دومینو پوشاند؟

☺. ثابت کنید جایگشتی از اعداد ۱ تا n وجود دارد که میانگین هیچ دو عددی میان آن دو نباشد.

☺. در هر خانه از یک جدول ۱۰×۱۰ عددی صحیح نوشته شده است. به طوری‌که مجموع اعداد نوشته شده در ۲۵ خانه‌ی مشترک هر ۵ سطر و هر ۵ ستون دلخواه زوج است. ثابت کنید همه اعداد جدول زوجند.

☺. S_n ، ... ، S_1 زیرمجموعه‌هایی از محور اعداد حقیقی‌اند. هرکدام از S_i ها بصورت اجتماع ۲ بازه بسته هستند. هر ۳ تا از این زیرمجموعه‌ها نقطه مشترکی دارند. ثابت کنید نقطه‌ای وجود دارد که متعلق به حداقل نیمی از آنها است.

☺. تعدادی عدد طبیعی به شکل توان‌های دو به ما داده‌اند. می‌دانیم که از هر توان دو حداکثر دوتا به ما داده شده است. مثلا ممکن است به ما اعداد 1,1,2,4,8,32,32 را بدهند. ثابت کنید تعداد راه‌های افراز این اعداد به دو دسته با مجموع برابر یا صفر و یا توانی از دو است.

☺. $2n + 3$ نقطه طوری در صفحه قرار دارند که هیچ ۳ نقطه‌ای روی یک خط و هیچ ٤ نقطه‌ای روی یک دایره قرار ندارند. ثابت کنید دایره‌ای وجود دارد که از ۳ نقطه می‌گذرد و n نقطه در داخل و n نقطه در بیرون دایره هستند.

☺. اعداد ۱ تا ۲۰ به ترتیب نوشته شدند. دو نفر به ترتیب پشت این عددها مثبت و منفی می‌گذارند و در نهایت قدر مطلق مجموع اعداد را حساب می‌کنیم.

نفر اول به ترتیب پشت ۱ ۳ . . . ۱۹ و نفر دوم به ترتیب پشت ۲ ٤ . . . ۲۰. نفر دوم می‌خواهد که عدد نهایی زیاد شود و نفر اول می‌خواهد کم بشود! عدد نهایی چند می‌شود؟

☺. در یک تورنومنت (گراف جهتدار کامل) هر دو تیم، t برد مشترک دارند. ثابت کنید: $n = 4 \times t + 3$

☺. در یک گراف جهتدار کامل تیمی وجود دارد که هر تیم را یا مستقیم و یا با یک واسطه برده است.

☺. ۸ رخ در صفحه شطرنج چنانند که هیچ دوتایی همدیگر را تهدید نمی‌کنند. ثابت کنید ۲ جفت رخ هستند که فاصله‌شان دو عدد برابر است.

☺. دنباله $a_1, \ldots, a_n$ داریم. هرکس در نوبت خود یکی از اعداد دو سر دنباله را پاک می‌کند و برای خود برمی‌دارد. در پایان کسی که مجموع بیشتری بدست آورد برنده است. ثابت کنید نفر اول می‌تواند نبازد.

☺. $2n$ نفر را در نظر بگیرید که هر کس زوج دوست دارد. ثابت کنید ۲ نفر هستند که زوج دوست مشترک دارند.

☺. همه‌ی نقاط صفحه با ۲ رنگ، رنگ شده‌اند. ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاع با ۳ راس همرنگ وجود دارد.

☺. به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا n را در یک ردیف چید بطوری که به جز چپ‌ترین عدد به ازای هر عدد مثل k عددی سمت چپ آن یافت که با k یک واحد اختلاف داشته باشد.

☺. n جعبه با شماره‌های ۱ تا n داریم که در جعبه iام، i توپ قرار دارد. در هر مرحله می‌توانیم تعدادی از جعبه‌ها را انتخاب کنیم و از همه آنها تعداد یکسانی توپ برداریم. حداقل چند حرکت لازم است که تمام جعبه‌ها خالی شوند؟

☺. ثابت کنید گراف همبندی که زوج یال دارد قابل افراز به p_3 است.

☺. بدون برداشتن قلم از روی کاغذ، یک زوج ضلعی رسم کرده‌ایم که اضلاع آن یکی درمیان عمودی هستند. در ضمن در حین رسم این چندضلعی، همه اضلاع عمودی از پایین به بالا رسم شده‌اند. ثابت کنید این چندضلعی خودش را قطع کرده است.

☺. به هر زیرمجموعه از مجموعه { ۱ ، ۲ ، . . . ، n } عددی از بین اعداد ۱ تا n نسبت داده‌ایم. ثابت کنید دو زیرمجموعه مثل X و Y وجود دارند که:

$$S(X) = S(Y) = MAX(X\Delta Y)$$

☺. آیا همواره می‌توان کمتر یا مساوی نصف یال‌های یک گراف جهتدار را حذف کرد که دیگر دور نداشته باشد.

☺. ثابت کنید هر عدد کمتر از !n را می‌توان به صورت مجموع حداکثر n عدد طبیعی نوشت که هرکدام مقسوم‌علیهی از !n هستند.

☺. یک جدول $2n \times 2n$ داریم که هر خانه‌اش با یکی از اعداد ۱+ ، ۰ یا ۱− پر شده است. در سمت راست هر سطر جمع عناصر آن سطر را می‌نویسیم و برای هر ستون نیز مجموع عناصر ستونش را در پایین ستون می‌نویسیم. ثابت کنید روشی برای پر کردن جدول وجود دارد که 4n عدد بوجود آمده متمایز باشند.

☺. (ماتریس نقره‌ای) ماتریسی $n \times n$ که مجموعه اعداد داخل سطر و ستون iام آن، مجموعه { ۱ ، ۲ ، . . . ، $2n-1$ } باشد را ماتریس نقره‌ای می‌نامند. ثابت کنید بینهایت ماتریس نقره‌ای وجود دارد.

☹. تعدادی کارت داریم که روی هرکدام یکی از اعداد 1 تا n نوشته شده است و مجموعشان $k \times n!$ است. ثابت کنید می‌توان این کارت‌ها را به k دسته افراز کرد که مجموع اعداد هر دسته برابر !n شود.

☹. درختی با رئوس ۱ تا n در نظر بگیرید. در طی n مرحله، در هر مرحله یکی از رئوس را طوری حذف می‌کنیم که گراف باقیمانده همبند بماند. تعداد حالات ممکن برای این کار را عدد این درخت می‌نامیم. مجموع عدد تمام درخت‌های ممکن (n^{n-2} درخت) را بیابید. (به طور مثال برای $n = 2$، این مجموع ۲ است)

☹. P عددی فرد و اول است. چند زیرمجموعه P عضوی از مجموعه $\{1, 2, \ldots, 2P\}$ وجود دارد که مجموع اعضایش بر P بخش پذیر باشد؟

☹. ثابت کنید در گرافی به اندازه 2^n خوشه‌ای به اندازه‌ی $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ یا مجموعه مستقلی به اندازه‌ی $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ وجود دارد.

☹. n شهر با $2n - 1$ جاده یک طرفه به هم متصل‌اند و از هر شهر به هر شهر دیگر روی جهت جاده‌ها می‌توان رفت. ثابت کنید جاده‌ای است که با بستن آن باز هم شرط برقرار است.

☹. $2n$ نقطه سفید و $2n$ نقطه سیاه داریم. ثابت کنید خطی وجود دارد که از هر رنگ n نقطه در هر طرف خط باشد.

☹. a_n = تعداد دنباله های به طول n دودویی فاقد زیررشته ۰۱۰

b_n = تعداد دنباله های به طول n دودویی فاقد زیررشته ۰۰۱۱ و ۱۱۰۰

ثابت کنید :

$$b_{n+1} = 2a_n$$

☹. n لامپ روی یک خط قرار داده‌ایم. همگی بجز لامپ اول در ابتدا خاموش هستند. در هر مرحله اگر لامپی با همسایه‌هایش در مرحله‌ی قبل در یک وضعیت بود در این مرحله خاموش می‌شود و درغیر این صورت روشن می‌شود. ثابت کنید بینهایت n داریم که لامپ‌ها خاموش می‌شوند و بینهایت n داریم که هرگز همه لامپ‌ها خاموش نمی‌شوند.

☹. ۱۹۸۵ عدد طبیعی که هیچ‌کدام مقسوم‌علیه اولی بیش از ۲۶ ندارند وجود دارد. ثابت کنید حاصلضرب چهار تا از آنها توان چهارم یک عدد صحیح است.

☹. کوچکترین عدد طبیعی همانند n را بیابید که در میان هر n عدد صحیح دلخواهی حتما چهار عدد متمایز a, b, c, d باشند که $a + b - c - d$ بر ۲۰ بخشپذیر باشد.

☹. ثابت کنید جمله‌ای از دنباله فیبوناچی وجود دارد که به ۰۰۰۰۰۵ ختم شود (و حداقل ۷ رقم داشته باشد)

☹. جدولی ۱۰۰×۱۰۰ در اختیار داریم (شطرنجی). در هر حرکت می‌توان رنگ خانه‌های داخل یک مستطیل را عوض کرد. حداقل چند حرکت برای تک رنگ کردن جدول نیاز است؟

☹. از مجموعه $\{ 2n-1 ، 2n-2 ، \ldots ، -2n+1 \}$ ، $2n+1$ عدد انتخاب شده است. ثابت کنید می‌توان ۳ عدد از این اعداد را انتخاب کرد که مجموعشان صفر شود.

☹. دنباله‌ی x_1 تا x_n از اعداد حقیقی داده شده است. در هر مرحله می‌توان عددی همانند a را اختیار کرده و اعداد را تبدیل به $|x_1-a|$ تا $|x_n-a|$ کرد.

الف) ثابت کنید می‌توان به دنباله‌ی همه صفر رسید. (۱۰)

ب) کمترین تعداد حرکات که بتوان هر دنباله‌ای را به هدف بالا رساند چند است؟ (۲۰)

☹. در یک ماتریس مجموع اعداد هر سطر و ستون صحیح است. ثابت کنید می‌توان عدد هر خانه را به سقف یا کف آن طوری تبدیل کرد که مجموع هیچ سطر یا ستونی تغییر نکند.

به پایان آمد این دفتر   حکایت همچنان باقی‌ست ...