فصل ۱

الکتروستاتیک

۱) مطلوب است محاسبه نسبت نیروهای الکتروستاتیکی به گرانشی در دو حالت زیر

الف) بین دو الکترون ب) بین دو پروتون

ج) به‌ازای چه مقداری از $\frac{q}{m}$، این دو نیرو از نظر اندازه با هم برابر می‌شوند؟

(با فرض اینکه دو ذره کاملاً یکسان باشند.)

۲) مطلوب است محاسبهٔ نیروی برهم کنش بین دو کره مسی به جرم ۱ گرم که در فاصلهٔ ۱ متری از هم قرار دارند به شرطی که مجموع بارهای الکتریکی ناشی از الکترون‌ها به اندازه ۱٪ با مجموع بار هسته‌های موجود در کره‌ها اختلاف داشته باشند.

(جرم اتمی مس برابر ۶۳/۵۴ گرم و هر اتم آن شامل ۲۹ پروتون است.)

۳) دو کره کوچک با بار یکسان و جرم یکسان m از یک نقطه توسط دو نخ ابریشمی به طول یکسان L آویزان شده‌اند. فاصله بین دو کره یعنی x بسیار کوچکتر از طول L است ($x << L$). مطلوب است محاسبه نرخ خروج بار، $\frac{dq}{dt}$، از هر کره اگر سرعت نزدیک شدن آنها به صورت $V = \frac{a}{\sqrt{x}}$ بر حسب فاصله x تغییر کند. (a یک عدد ثابت است.)

۴) دو بار مثبت q_1 و q_2 به ترتیب نسبت به مبداء مختصات دارای بردارهای مکان $\vec{r_1}$ و $\vec{r_2}$ می‌باشند. اندازه بار منفی q_3 و بردار مکان آن یعنی $\vec{r_3}$ را طوری بیابید به طوریکه اگر q_3 در موقعیت $\vec{r_3}$ قرار گیرد نیروی برآیند وارد بر هر سه بار برابر صفر شود.

۵) یک حلقه سیمی نازک به شعاع r دارای بار q می‌باشد. اگر بار q_0 را در مرکز این حلقه قرار دهیم بر نیروی کششی موجود در داخل سیم چه مقدار افزوده می‌شود؟

۶) بار نقطه‌ای $+50\ \mu C$ در نقطه‌ای با بردار مکان $\vec{r_0} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ قرار دارد که $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهای واحد در راستای x و y می‌باشند. مطلوب است محاسبه شدت بردار میدان الکتریکی $\vec{E}$ در نقطه‌ای با بردار مکان $\vec{r} = 8\hat{i} - 5\hat{j}$. ($\vec{r}$ و $\vec{r_0}$ بر حسب متر بیان شده‌اند.)

۷) بارهای نقطه‌ای $+q$ و $-q$ را مطابق شکل زیر در گوشه‌های یک مربع با قطری به طول $2L$ قرار می‌دهیم. مطلوب است بزرگی اندازهٔ شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ای روی محور

گذرنده از مرکز مربع به طوریکه این محور بر سطح مربع عمود باشد و نقطهٔ مورد نظر به فاصلهٔ x از مرکز مربع قرار داشته باشد.

۸) یک حلقهٔ نازک نیم‌دایره‌ای به شعاع $R = ۲۰$ cm با بار $q = ۰/۷$ nc به طور یکنواخت باردار می‌شود. اندازه شدت میدان الکتریکی را در مرکز این نیم دایره بیابید.

۹) یک حلقه سیمی نازک به شعاع r دارای بار q است. اندازه شدت میدان الکتریکی را روی محور حلقه و به صورت تابعی از فاصله L تا مرکز آن بیابید. همچنین رابطه را با فرض $L >> r$ بررسی نمایید. ماکزیمم شدت میدان و فاصله L مربوط به آن را پیدا کنید.

۱۰) بار نقطه‌ای q را در مرکز یک حلقه نازک به شعاع R که به صورت یکنواخت با بار $-q$ باردار شده است، قرار می دهیم. اندازه بردار شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای روی محور حلقه و به فاصله x از مرکز حلقه بیابید. فرض کنید که $x >> R$.

۱۱) یک حلقه سیمی باردار با بار q و شعاع R را در نظر بگیرید. یک ریسمان بسیار بلند که به طور یکنواخت با چگالی خطی λ باردار شده است را در امتداد محور حلقه طوری قرار می‌دهیم که یک انتهای ریسمان درست در مرکز حلقه قرار بگیرد. مطلوب است محاسبه نیروی متقابل بین ریسمان و حلقه.

۱۲) یک حلقه نارسانای نازک به شعاع R دارای چگالی بار خطی $\lambda = \lambda_0 \cos\phi$ می‌باشد که λ_0 یک عدد ثابت و ϕ زاویه با محور x است. مطلوب است بزرگی شدت میدان الکتریکی

الف) در مرکز حلقه

ب) روی محور حلقه و به صورت تابعی از فاصلهٔ x تا مرکز

تابع به‌دست آمده را برای حالت $x >> R$ بررسی کنید.

۱۳) یک میله نازک و مستقیم به طول $2a$ به طور یکنواخت با بار q باردار شده است. مطلوب است بزرگی شدت میدان الکتریکی به صورت تابعی از r فاصله از مرکز میله و در امتداد خط مستقیم

الف) عمود بر میله و گذرنده از مرکز میله

ب) منطبق بر راستای میله منتهی در نقاط بیرون از میله جواب خود را برای حالت $r >> A$ بررسی کنید.

۱۴) یک ریسمان بسیار بلند و مستقیم به طور یکنواخت با چگالی بار خطی λ (بار بر واحد طول) باردار شده است. بزرگی و جهت شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به فاصله y از ریسمان و روی خطی عمود بر ریسمان و گذرنده از یکی از دو انتهای ریسمان را بیابید.

۱۵) یک ریسمان دارای چگالی بار خطی یکنواخت λ (بار بر واحد طول) به صورت نشان داده شده در شکل درآورده شده است. فرض کنید شعاع انحنای R نسبت به طول ریسمان بسیار کوچکتر باشد. مطلوب است محاسبه بزرگی شدت میدان الکتریکی در نقطهٔ O.

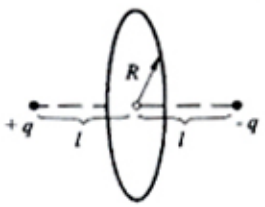
۱۶) کره‌ای به شعاع R دارای چگالی بار سطحی (بار بر واحد سطح) $\sigma = \vec{a} \cdot \vec{r}$ برروی سطح آن است که $\vec{a}$ برداری است ثابت و $\vec{r}$ برداری است شعاعی که از مرکز کره تا نقطه‌ای روی سطح آن امتداد می‌یابد. بردار شدت میدان الکتریکی را در مرکز کره بیابید.

۱۷) فرض کنید چگالی بار سطحی موجود بر روی کره‌ای به شعاع R بستگی به زاویهٔ کروی θ به صورت $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ داشته باشد که σ_0 یک ثابت مثبت است. نشان دهید که این توزیع بار معادل است با دو توپ باردار به شعاع R که به صورت یکنواخت باردار شده‌اند و به فاصله کمی از یکدیگر قرار دارند. بارهای هر دو توپ از نظر اندازه باهم برابر و از نظر علامت مخالف هم می‌باشند. با توجه به این معادل‌سازی، بردار شدت میدان الکتریکی در داخل کره مفروض را بیابید.

۱۸) مطلوب است یافتن بردار شدت میدان الکتریکی در مرکز یک توپ به شعاع R با چگالی بار حجمی (بار بر واحد حجم) $\rho = \vec{a} \cdot \vec{r}$ که $\vec{a}$ یک بردار ثابت و $\vec{r}$ بردار شعاعی که از مرکز کره ترسیم می‌شود.

۱۹) یک ریسمان بسیار بلند با چگالی بار خطی یکنواخت λ را روی محور دایره‌ای به شعاع R قرار می‌دهیم به طوری‌که انتهای ریسمان منطبق بر مرکز دایره باشد. شار الکتریکی عبور کننده از دایره را بیابید.

۲۰) دو بار نقطه‌ای q و $-q$ مطابق شکل به فاصله $2L$ از یکدیگر قرار دارند. مطلوب است محاسبه شار میدان الکتریکی گذرنده از دایره‌ای به شعاع R.



۲۱) توپی به شعاع R به صورت یکنواخت با چگالی بار حجمی (بار بر واحد حجم) ρ باردار شده است. شار الکتریکی گذرنده از سطح مقطع توپ که در اثر تقاطع صفحه‌ای با فاصله $r_0 < R$

از مرکز کره با کره بوجود آمده است را بیابید.

۲۲) دو ریسمان بلند که با هم موازی هستند هر یک دارای چگالی بار خطی (بار بر واحد طول) یکنواخت λ می‌باشند. همچنین این دو ریسمان به فاصله L از یکدیگر قرار دارند. ماکزیمم بزرگی شدت میدان الکتریکی در صفحهٔ دو ریسمان و بین آن دو را پیدا کنید.

۲۳) محور استوانه‌ای با طول بی‌نهایت و سطح مقطع دایره‌ای شکل منطبق بر محور Z دستگاه مختصات است. سطح این استوانه با چگالی بار سطحی یکنواخت $\sigma = \sigma_0 \cos\phi$ بار دار شده است به طوری‌که ϕ زاویه قطبی استوانه است (این چگالی بار بستگی به Z ندارد) مطلوب است اندازه و جهت شدت میدان الکتریکی روی محور Z.

۲۴) یک میدان الکتریکی فقط تابعی از x و y است و از رابطه $\vec{E} = \frac{a\,(x\hat{i} + y\hat{j})}{x^2 + y^2}$ تبعیت می‌کند. (a عددی ثابت و $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهای یکه محورهای x و y می‌باشند.) مطلوب است محاسبه شار میدان الکتریکی گذرنده از کره‌ای به شعاع R که مرکز آن منطبق بر مبداء مختصات باشد.

۲۵) توپی به شعاع R دارای بار مثبتی است که چگالی بار حجمی آن برابر $\rho = \rho_0 (1 - \frac{r}{R})$ می‌باشد. در این رابطه r فاصله از مرکز توپ و ρ_0 عددی ثابت است. با فرض اینکه ضریب گذردهی توپ و محیط برابر یک باشد مطلوب است:

الف) اندازه شدت میدان الکتریکی به صورت تابعی از r هم در داخل توپ و هم در خارج آن.

ب) ماکزیمم شدت $E_{\max}$ و فاصله مربوط به آن r_m.

۲۶) سیستمی را در نظر بگیرید که شامل یک توپ باردار به شعاع R که بار آن دارای تقارن کروی است و فضای بیرون آن با چگالی حجمی $\rho = \frac{\alpha}{r}$ پر شده است (α عددی ثابت و r فاصله از مرکز توپ می‌باشد).

الف) مقدار بار توپ را طوری بیابید که اندازه میدان الکتریکی بیرون توپ مستقل از r باشد.

ب) اندازه میدان الکتریکی چقدر است؟ ضریب گذردهی توپ و محیط را برابر یک فرض کنید.

۲۷) فضایی با چگالی حجمی بار $\rho = \rho_0 e^{-\alpha r^2}$ پر شده که ρ_0 و α اعدادی ثابت و r فاصله از مرکز این سیستم است. اندازه بردار میدان الکتریکی را به صورت تابعی از r بیابید. عبارت بدست آمده را برای مقادیر بسیار کوچک و بزرگ یعنی $\alpha r^2 << 1$ و $\alpha r^2 >> 1$ بررسی نمایید.

۲۸) داخل توپی که با چگالی حجمی ρ به صورت یکنواخت باردار شده است، حفره‌ای کروی شکل قرار دارد. مرکز این حفره به اندازه بردار $\vec{a}$ از مرکز توپ جابه‌جا شده است. بردار $\vec{E}$ در داخل حفره را محاسبه کنید. با فرض اینکه ضریب گذردهی برابر یک باشد.

۲۹) داخل استوانه با طول بی‌نهایت که به صورت یکنواخت با چگالی حجمی بار ρ باردار شده است حفره‌ای استوانه‌ای شکل قرار دارد. فاصله بین محور استوانه و محور حفره برابر a است. بردار $\vec{E}$ را در داخل حفره بیابید. ضریب گذردهی برابر یک فرض می‌شود.

۳۰) محورهای دو حلقه سیمی نازک هر یک به شعاع R برهم منطبق‌اند. اگر فاصله بین این دو حلقه برابر a و بارهای آن‌ها به ترتیب q و $-q$ باشند، مطلوب است اختلاف پتانسیل بین مراکز این دو حلقه.

۳۱) یک ریسمان مستقیم با طول بی‌نهایت با چگالی خطی بار $\lambda = ۰/۴ \frac{\mu c}{m}$ باردار شده است. اختلاف پتانسیل بین نقاط ۱ و ۲ را بیابید به شرطی که نقطه ۲ به اندازه $n = ۲$ برابر دورتر از نقطهٔ ۱ نسبت به ریسمان قرار داشته باشد.

۳۲) مطلوب است محاسبه میدان و پتانسیل الکتریکی در مرکز یک نیم کره به شعاع R که با چگالی سطحی بار σ به صورت یکنواخت باردار شده است.

۳۳) دیسکی بسیار نازک به شعاع R دارای چگالی سطحی یکنواخت بار σ است که در خلأ قرار دارد. میدان و پتانسیل الکتریکی روی محور دیسک و به فاصله L از مرکز آن را بیابید. عبارت به دست آمده را برای حالت $L \to ۰$ و $L >> R$ بررسی نمایید.

۳۴) پتانسیل الکتریکی ϕ را روی لبه یک دیسک نازک به شعاع R که به صورت یکنواخت با چگالی سطحی بار σ باردار شده است را بیابید.

۳۵) مطلوب است بردار میدان الکتریکی که پتانسیل این میدان به صورت $\phi = \vec{a} \cdot \vec{r}$ می‌باشد $\vec{a}$ برداری ثابت و $\vec{r}$ برداری است که از مبداء به نقطه‌ای درون میدان وصل می‌شود.

۳۶) بردار شدت میدان الکتریکی را به شرطی بیابید که پتانسیل این میدان بستگی به مختصات x و y داشته باشد و از رابطه

الف) $\phi = a(x^۲ - y^۲)$ ب) $\phi = axy$

تبعیت کند.

۳۷) پتانسیل یک میدان الکتروستاتیک به صورت $\phi = a(x^۲ + y^۲) + bz^۲$ است. a و b مقادیر ثابت هستند. مطلوب است اندازه و جهت بردار شدت میدان الکتریکی.

سطوح هم پتانسیل در هر یک از حالات زیر چه شکلی دارند؟

الف) $a > ۰$ و $b > ۰$ ب) $a < ۰$ و $b < ۰$

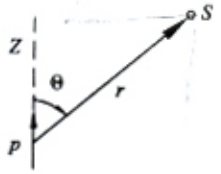
۳۸) بار q به صورت یکنواخت بر روی حجم یک کره به شعاع R توزیع شده است. با فرض اینکه ضریب گذردهی برابر یک باشد مطلوب است پتانسیل الکتریکی:

الف) در مرکز کره

ب) در داخل کره و به صورت تابعی از فاصله r تا مرکز کره

۳۹) نشان دهید پتانسیل ایجاد شده توسط یک دو قطبی با گشتاور الکتریکی $\vec{P}$ از رابطه $\phi = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۳}$ بدست می‌آید که $\vec{r}$ بردار شعاعی است. با استفاده از این رابطه اندازه بردار میدان الکتریکی را به صورت تابعی از r و θ بیابید.

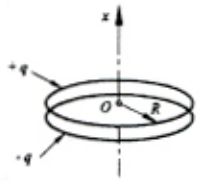
۴۰) یک دو قطبی نقطه‌ای با گشتاور الکتریکی $\vec{P}$ در مبداء و در جهت مثبت محور z قرار داده شده است. مؤلفه‌های E_z و $E_\perp$ (در صفحه عمود بر محور z در نقطهٔ s) از بردار میدان الکتریکی را بیابید. در چه نقطه‌ای $\vec{E}$ بر $\vec{P}$ عمود خواهد بود؟



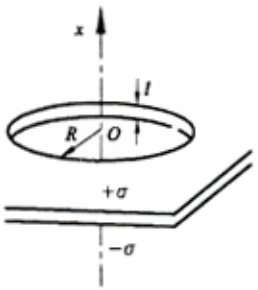
۴۱) یک دو قطبی نقطه‌ای با گشتاور $\vec{P}$ در داخل میدان خارجی و یکنواخت $\vec{E}$ قرار داده شده است. به طوری $\vec{P} \uparrow\uparrow \vec{E}$. در این شرایط یکی از سطوح هم پتانسیل که دو قطبی را در بر می‌گیرد، به صورت یک کره است. شعاع این کره را بیابید.

۴۲) دو ریسمان نازک و موازی هم، دارای چگالی طولی یکنواخت به ترتیب λ و $-\lambda$ می باشند. فاصله این دو ریسمان از یکدیگر برابر L است. مطلوب است محاسبه پتانسیل الکتریکی و اندازه شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله r که $r >> L$ و تحت زاویه θ نسبت به بردار $\vec{L}$ قرار دارد. (مطابق شکل)

۴۳) دو حلقه هم محور، هر یک به شعاع R که از سیم نازک درست شده‌اند، به فاصله کم L ($L << R$) از هم قرار دارند و به ترتیب دارای بارهای q و $-q$ می‌باشند. پتانسیل و اندازه میدان الکتریکی را روی محور این سیستم به صورت تابعی از مختصات x مطابق شکل بیابید. نمودار تقریبی توابع بدست آمده را رسم کنید. این توابع را در حالت $|x| >> R$ بررسی نمایید.



۴۴) دو صفحه بی‌نهایت بزرگ به فاصله L از یکدیگر به ترتیب با چگالی سطحی σ و $-\sigma$ به صورت یکنواخت باردار شده‌اند. (مطابق شکل) دو سوراخ هم محور به شعاع R در آنها موجود است به طوری که $L << R$. اگر مبدأ O و محور x را مطابق شکل در نظر بگیریم، مطلوب است پتانسیل و مؤلفه E_x میدان الکتریکی روی محور سیستم به صورت تابعی از x نمودار تقریبی $\phi(x)$ را رسم کنید.



۴۵) یک خازن الکتریکی با صفحات نازک دایروی شکل هر یک به شعاع R به فاصله L $(L << R)$ از هم قرار دارند و به ترتیب با چگالی سطحی σ و $-\sigma$ به صورت یکنواخت باردار شده‌اند. پتانسیل الکتریکی و اندازه میدان الکتریکی را روی محور خازن به صورت تابعی از فاصله x از صفحات به (شرطی که $x >> l$) بیابید. عبارت به دست آمده را برای حالت $x >> R$ بررسی کنید.

۴۶) یک دو قطبی با گشتاور الکتریکی $\vec{P}$ در فاصله r از یک ریسمان بسیار بلند که با چگالی خطی یکنواخت λ باردار شده است، قرار دارد. نیروی $\vec{F}$ وارد بر دو قطبی را بیابید اگر راستای بردار $\vec{P}$

الف) در راستای ریسمان باشد.

ب) در راستای بردار شعاعی $\vec{r}$ باشد.

۴۷) نیروی برهم کنش دو مولکول آب را بیابید، اگر فاصله آنها $L = ۱۰$ nm و بردار گشتاور الکتریکی آنها در راستای یک خط باشد. گشتاور هر مولکول برابر $P = ۰/۶۲ \times ۱۰^{-۲۹}$c.m است.

۴۸) پتانسیل الکتریکی $\phi\ (x\ ,\ y)$ مربوط به میدان الکتروستاتیک $\vec{E} = a\ (y\hat{i} + x\hat{j})$ را بیابید به‌طوری که a یک ثابت و $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهای یکه محورهای x و y باشند.

۴۹) پتانسیل الکتریکی $\phi\ (x\ ,\ y)$ مربوط به میدان الکتروستاتیک $\vec{E} = ۲axy\hat{i} + a\ (x^۲ - y^۲)\ \hat{j}$ را بیابید به‌طوری که a یک ثابت و $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهای یکه محورهای x و y باشند.

۵۰) پتانسیل الکتریکی $\phi\ (x\ ,\ y)$ مربوط به میدان الکتروستاتیک $\vec{E} = ay\hat{i} + (ax + bz)\ \hat{j} + by\hat{k}$ را که a و b مقادیر ثابت و $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ بردارهای یک محورهای x و y و z باشند، بیابید.

۵۱) پتانسیل الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا تنها به مختصه x بستگی دارد و از رابطه $\phi = -ax^۳ + b$ تبعیت می‌کند که a و b مقادیر ثابت هستند. مطلوب است توزیع بار حجمی $\rho\ (x)$

۵۲) یک توزیع بار حجمی یکنواخت فضای بین دو صفحه بسیار بزرگ موازی را که به فاصلهٔ d از هم قرار دارند، پر می کند. اختلاف پتانسیل بین این صفحات برابر $\Delta\ \phi$ است. به ازای چه مقداری از چگالی حجمی ρ شدت میدان الکتریکی در نزدیکی یکی از صفحات برابر صفر می‌شود؟ در اینصورت شدت میدان الکتریکی نزدیک صفحه دیگر چقدر خواهد بود؟

۵۳) پتانسیل الکتریکی درداخل یک توپ باردار فقط به فاصله r تا مرکز به صورت $\phi = ar^۲ + b$ بستگی دارد که a و b مقادیر ثابت‌اند. توزیع بار حجمی $\rho\ (r)$ را در داخل توپ بیابید.