به نام او که تنها او حق است و باقی همه جوب!

اولین آزمون آزمایشی مولایی

المپیاد نجوم و اخترفیزیک

تعداد سوالات: ۶ **زمان آزمون: ۲۷۰ دقیقه**

- در این آزمون ۸ صفحه سوال در ۴ برگ (به همراه جلد) به شما تحویل داده شده است که پیش از شروع آزمون از کامل بودن آن اطمینان حاصل کنید.
- استفاده از ماشین حساب مجاز است.
- استفاده از هر گونه یادداشت، اطلس های نجومی و لوازم الکترونیکی ممنوع است.
- پاسخ سوالات را در برگه A4 **سفید**، تمیز و خوش خط با **خودکار آبی و یا مشکی** بنویسید. اسم خود را بالای هر برگه بنویسید. استفاده از غلط گیر غیرمجاز است و در صورت استفاده تقلب محسوب می شود.

محمد امین ثریا

پرشان جوانرود

امیرحسین حاجی محمد رضایی

کسری حاجیان

فاطمه علیمرادی

امیررضا قدیانی

حسین محمدی

محمد مهدی واحدی

ثوابت فیزیکی و نجومی

G	ثابت جهانی گرانش	$۶.۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\ m^{۳}kg^{-۱}s^{-۱}$
σ	ثابت استفان بولتزمن	$۵.۶۷ \times ۱۰^{-۸}\ Wm^{-۲}K^{-۴}$
k_B	ثابت بولتزمن	$۱.۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}\ JK^{-۱}$
h	ثابت پلانک	$۶.۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\ Js$
C	سرعت نور	$۳.۰۰ \times ۱۰^{۸}\ ms^{-۱}$
pc	پارسک	$۳.۰۹ \times ۱۰^{۱۶}\ m$
AU	واحد نجومی	$۱.۵۰ \times ۱۰^{۱۱}\ m$
ly	سال نوری	$۹.۴۶ \times ۱۰^{۱۵}\ m$
$R_\odot$	شعاع خورشید	$۶.۹۹ \times ۱۰^{۸} m$
$M_\odot$	جرم خورشید	$۱.۹۹ \times ۱۰^{۳۰}\ kg$
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	$۳.۸۵ \times ۱۰^{۲۶}\ W$
$M_{bol,\odot}$	قدر مطلق بولومتریک خورشید	$۴.۷۲\ mag$
$m_\odot$	قدر ظاهری خورشید	$-۲۶.۸\ mag$
m_p	جرم پروتون	$۱.۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\ kg$
m_e	جرم الکترون	$۹.۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}\ kg$
e	بار الکترون	$۱.۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\ C$
$M_\oplus$	جرم زمین	$۵.۹۷ \times ۱۰^{۲۴}\ kg$
$R_\oplus$	شعاع زمین	$۶.۳۸ \times ۱۰^{۶}\ m$
ϵ	زاویه تمایل محور زمین	$۲۳.۵°$
ϵ_{pp}	ضریب کارایی همجوشی هیدروژن	۰.۰۰۷
$inch$	اینچ	$۲.۵۴\ cm$
$H.$	پارامتر هابل	$۶۹\ kms^{-۱}Mpc^{-۱}$

۱- (۱۲۵ نمره) اطلاعات استخراج شده از متون و رصد های باستانی حاکی از آن است که در گذشته های دور، خورشید همدمی داشته که همراه خورشید در مداری دایروی به شعاع $R_{\cdot} = ۸.۵۰ kpc$ روی دیسک کهکشان در حال گردش بوده است. پس از یک اتفاق ناگهانی به این ستاره همدم اختلالی در دو راستای شعاعی و عمود بر صفحه دیسک کهکشان وارد می شود. اگر پتانسیل دیسک کهکشان را بتوان به دقت بسیار خوبی با فرم پتانسیل دیسک کازمین (Kuzmin Disk) برابر در نظر گرفت، به سوالات زیر پاسخ دهید.

پتانسیل دیسک کازمین $\Phi(R,z) = \frac{-GM}{\sqrt{R^۲+(a_K+|z|)^۲}}$

M جرم دیسک، R و z مختصه های دستگاه استوانه‌ای هستند.

الف) ثابت کنید چگالی سطحی دیسک کازمین از رابطه زیر محاسبه می‌شود و جرم دیسک برابر M است.

$$\Sigma_k(R) = \frac{a_k}{۲\pi}\frac{M}{(R^۲ + a_k^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

ب) ستاره‌ای را در نظر بگیرید که در حال حرکت روی صفحه‌ی دیسک کهکشان است. شرطی برای شعاع مداری آن R به دست آورید تا در صورتی که اختلالی عمود بر صفحه کهکشان به ستاره وارد شود، ستاره مقید باقی بماند. سپس نشان دهید ستاره حرکتی نوسانی خواهد داشت و دوره تناوب این نوسان را به صورت پارامتری مشخص کنید.

ج) اگر به ستاره همدم در راستای شعاعی اختلال وارد شود، نشان دهید تصویر حرکت همدم نسبت به خورشید روی صفحه کهکشان تقریبا یک بیضی است که خورشید در مرکز آن قرار دارد.

(راهنمایی: یک دستگاه مختصات دکارتی روی خورشید قرار دهید، محور x را در راستای شعاعی و محور y را در راستای حرکت در نظر بگیرید. نشان دهید بیضی حالت های مختلفی می‌تواند داشته باشد (این حالت ها را تعیین کنید) و حالتی را در نظر بگیرید که خورشید منطبق بر مرکز بیضی باشد.)

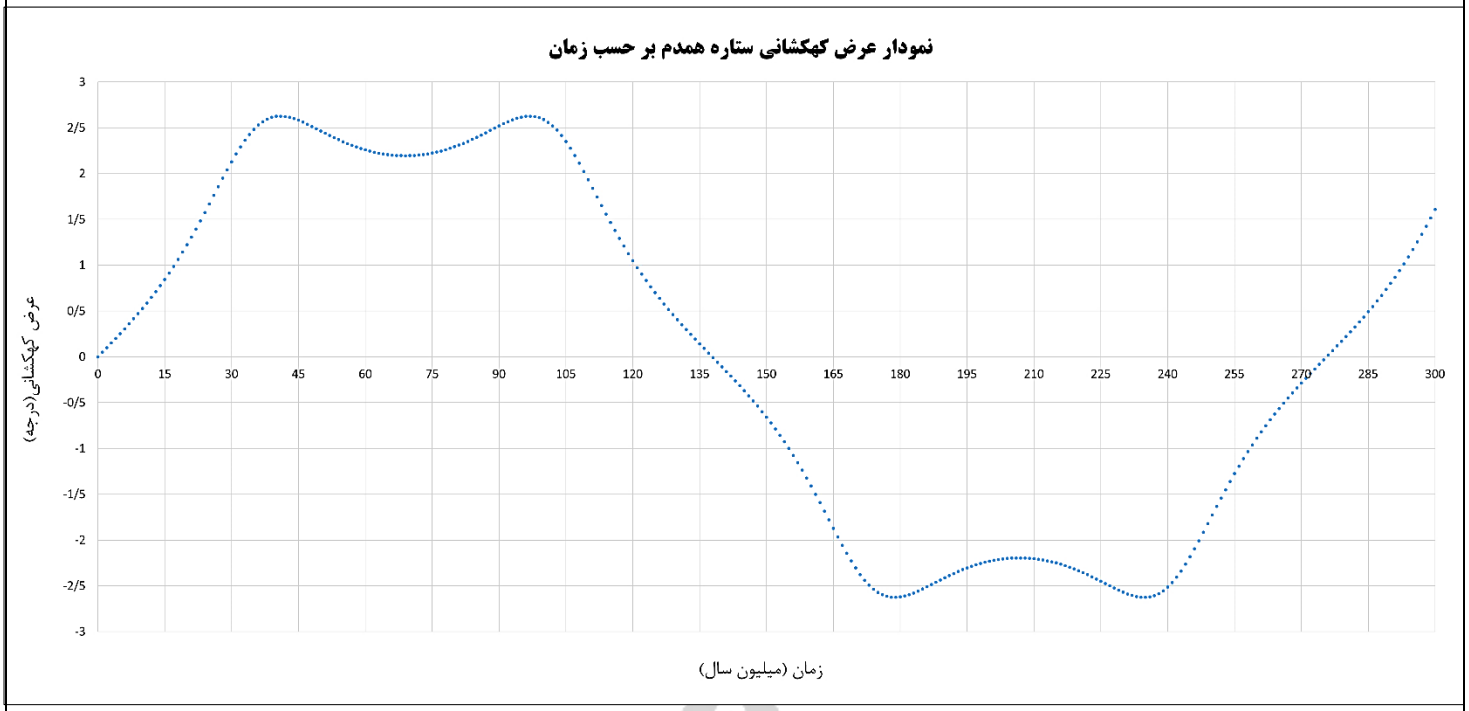
اندازه‌گیری های انجام شده طی این سال ها نشان می‌دهند که دامنه نوسان همدم در راستای شعاعی $X = ۳.۹۶\, pc$ و در راستای عمود بر صفحه کهکشان $Z = ۰.۲۴\, pc$ است.

رصدگران از گذشته‌های بسیار دور مشغول رصد این همدم بوده‌اند، همچنین ماهواره *FATF* مدت زمانی طولانی را صرف اندازه‌گیری عرض کهکشانی همدم خورشید و ستارگانی که مسیری مشابه آن را طی می کنند کرده است. نمودار اول (صفحه بعد) عرض کهکشانی همدم را در زمان های مختلف نشان می‌دهد.

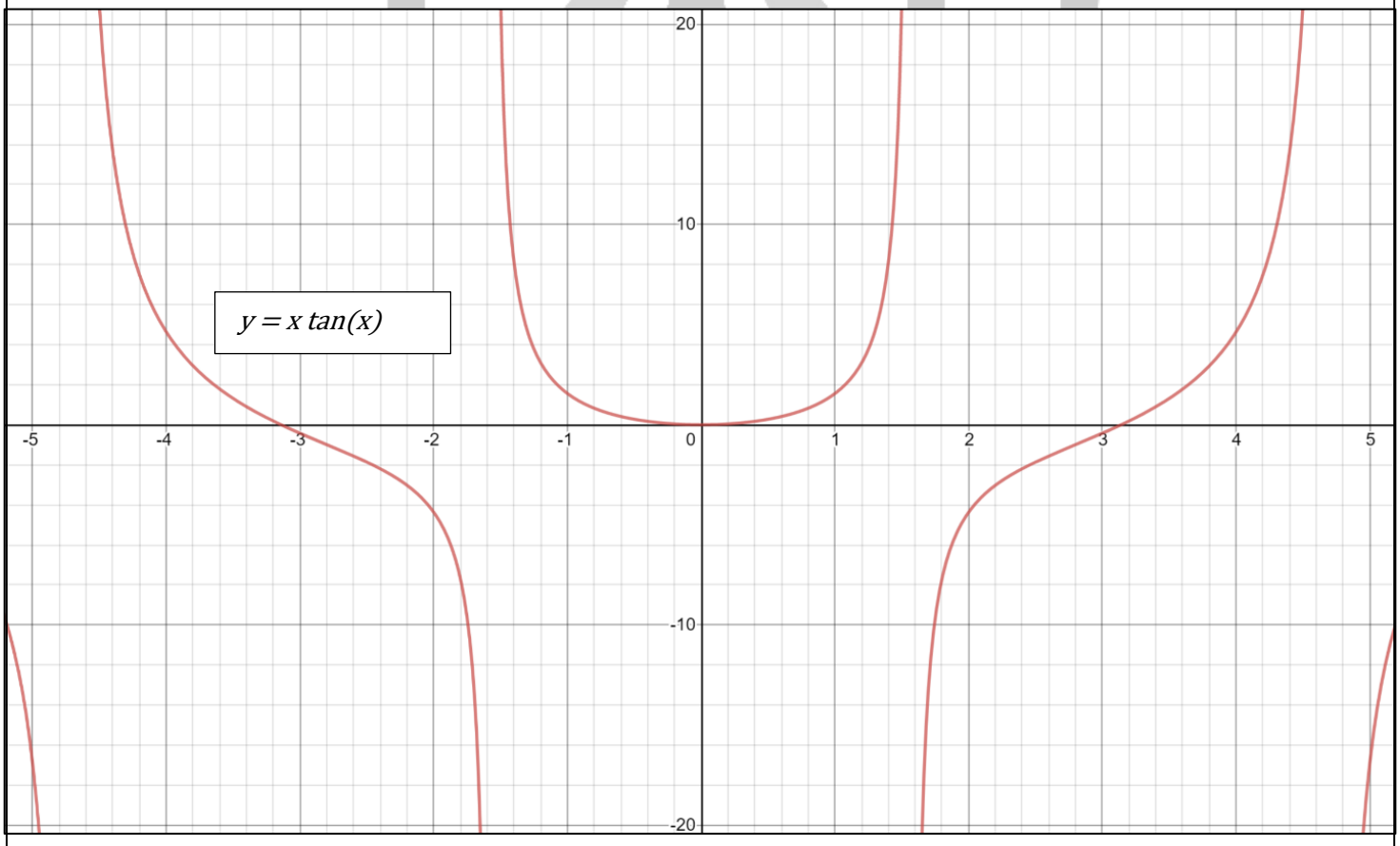
د) با استفاده از نمودار اول، دوره تناوب حرکت اختلالی همدم در دو راستای شعاعی و عمود بر صفحه کهکشان را بدست آورید. در لحظه شروع نمودار اول، ستاره همدم روی نیم قطر اطول بیضی قرار دارد.

(راهنمایی: در این بخش نیاز به حل معادله دارید، برای حل این معادله اولین یا دومین جواب منطقی بدست آمده را به عنوان پاسخ در نظر بگیرید، همچنین می توانید از نمودار دوم برای حل معادله استفاده کنید. پیشنهاد می‌شود جواب هایی که برای معادله بدست می‌آورید را چک کنید.)

ه) مقدار ثابت a_K را تعیین کرده و سپس جرم دیسک کهکشان را بدست آورید.



نمودار اول



نمودار دوم

۲- (۶۵ نمره) در روز انقلاب تابستانی، محمد و مهدی هر دو در مکان های جداگانه‌ای در حال ساخت ساعت آفتابی هستند. محمد در مختصات $(\varphi = ۳۵^\circ N, l = ۵۵^\circ E)$ و مهدی در مختصات $(\varphi = ۳۵^\circ N, l = ۱۰^\circ E)$ می‌باشند. ساعت آفتابی محمد شامل یک شاخص به طول $۵۰cm$ است که به سمت ستاره‌ی قطبی نشانه‌گیری شده است اما ساعت آفتابی مهدی یک تفاوت دارد. او همان شاخص را به سمت ستاره‌ی قطبی گرفته است، منتهی مهدی روی کوهی قرار دارد که موجب شده سرسو جدید او نسبت به سرسو در حالت عادی دارای مختصات $(a = ۶۰^\circ, A = ۱۰۰^\circ E)$ باشد. هر دوی آنها زاویه‌ای به نام α تعریف میکنند که برای محمد این زاویه، زاویه‌ی بین سایه روی زمین و راستای شمال و برای مهدی، زاویه‌ی بین سایه روی کوه و راستای شمال است (زاویه α به سمت غرب افزایش می‌یابد). اگر در یک لحظه زاویه α برای محمد برابر ۴۰° باشد،

الف) زاویه ساعتی خورشید در این لحظه از دید مهدی چقدر است؟

ب) در همان لحظه زاویه α برای ساعت آفتابی مهدی چند درجه است؟

ج) طول سایه‌ی شاخص برای ساعت مهدی چقدر است؟

۳- (۸۵ نمره) یک میز دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای A در حال چرخیدن است. توپی بدون لغزش روی آن می‌غلتد. چگالی جرمی توپ یکنواخت و لختی دورانی آن $I = \frac{۲}{۵}MR^۲$ است.

الف) نشان دهید با هر شرایط اولیه‌ای (بدون لغزش) توپ می‌تواند از دید ناظر لخت بر روی دایره‌ای حرکت کند.

ب) بسامد زاویه‌ای این حرکت دایره‌ای و شعاع این دایره را بیابید.

ج) اگر سرعت اولیه توپ برابر با صفر باشد، مکان توپ چگونه با زمان تغییر میکند؟

د) اگر بخواهیم مرکز دایره بر مرکز میز منطبق شود، سرعت اولیه باید چقدر باشد؟

۴- (۱۴۰ نمره) کیهانی ماده غالب با انحنای مثبت در نظر بگیرید. دو کهکشان ۱ و ۲ با مشخصات زیر توسط ناظر زمینی رصد می شوند:

$$GLX_۱ : \begin{matrix} \alpha_۱ = ۱۲^h ۲۵^m & m_۱ = ۸۶.۷\, mag \\ \delta_۱ = ۱۸.۱۹^\circ \text{ و } & z_۱ = ۲.۸۵ \end{matrix} \qquad GLX_۲ : \begin{matrix} \alpha_۲ = ۱۸^h ۳۱^m & m_۲ = ۸۲.۹\, mag \\ \delta_۲ = ۳۲.۳۵^\circ \text{ و } & z_۲ = ۱.۶۹ \end{matrix}$$

اگر افق ذره ناظر (بیشترین فاصله قابل مشاهده) برابر با $d_{PH} = ۴.۲۰۴\ Gpc$ باشد، به سوالات زیر پاسخ دهید. توجه کنید که فقط روابط ذکر شده در انتهای سوال بدون اثبات پذیرفته می شوند و هر رابطه دیگری را باید ابتدا اثبات و سپس استفاده کنید. به حل معادلات با ماشین حساب نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد. (فرض کنید کهکشان ها در لحظه $t = ۰$ به وجود آمده اند و محدودیتی در آشکارسازی قدر نداریم.)

الف) قرمز گرایی کهکشان ۱ از دید کهکشان ۲ چقدر است؟

ب) ناظری در کهکشان ۱، کهکشان ۲ را از چه قدری می بیند؟

ج) اگر ناظر زمینی پالسی از موجودی هوشمند در کهکشان ۲ دریافت کند، آیا این موجود کهکشان ۱ را دیده است؟ او قدر کهکشان ۱ را چقدر اندازه گیری کرده است؟

روابط کیهان شناسی:

$$H_۰ = ۶۹\ \frac{km}{s.Mpc}$$

$$ds^۲ = -c^۲dt^۲ + a^۲\left(\frac{d\chi^۲}{۱ - k\chi^۲} + \chi^۲(d\theta^۲ + \sin(\theta)^۲\, d\varphi^۲)\right)$$

$$\frac{\dot{a}^۲}{a^۲} = \frac{۸\pi G\rho}{۳} - \frac{kc^۲}{a^۲}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{۴\pi G\rho}{۳}(۱ + ۳w)$$

$$w \equiv \frac{P}{\rho c^۲}$$

$$w_m = ۰$$

$$d_{p\,(t)} \equiv a_{(t)} \int_{t_e}^{t_{obs}} \frac{c\ dt'}{a_{(t')}}$$

$$d_{PH} \equiv \int_{0}^{t_0} \frac{c\ dt}{a_{(t)}}$$

۵- (۸۵ نمره) در این سوال قصد داریم ستارگانی فرضی را بررسی کنیم که استوانه هایی توپر به شعاع R هستند و ارتفاع آنها بی‌نهایت است.

الف) با استفاده از قانون گاوس شتاب گرانشی را در فاصله r از محور استوانه $g(r)$ بدست آورید.

پارامتر $\mu(r)$ را به صورت $\int_0^r 2\pi r\rho(r)\,dr$ تعریف می‌کنیم. همچنین فرض کنید که چگالی ستاره تابع ارتفاع از صفحه مرکزی نیست. همانطور که برای ستارگان کروی قادر هستیم معادله تعادل هیدرواستاتیک را استخراج کنیم، می‌توان برای این نوع از ستارگان نیز معادله تعادل هیدرواستاتیک بدست آوریم.

ب) یک المان استوانه‌ای در فاصله r از محور استوانه در نظر بگیرید. نیروهای وارد بر آن را نوشته و تعادل هیدرواستاتیک را برای این مدل از ستارگان محاسبه کنید.

برای ستارگان کروی که از گاز پلی‌تروپیک تشکیل شده‌اند، می‌توان معادله‌ای به نام معادله لین-امدن بدست آورد که در انتهای سوال پیوست شده. هدف از بدست آوردن معادله ای به فرم لین-امدن، این است که می‌توانیم آن را به صورت عددی حل کنیم.

ج) در این قسمت فرض کنید که این ستارگان از گازی پلی‌تروپیک با نمایه n تشکیل شده‌اند ($P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$). اکنون برای این دسته از ستارگان، معادله‌ای مشابه معادله لین-امدن در ستارگان کروی استخراج کنید.
(راهنمایی: تغییر متغیر هایی مشابه لین-امدن اعمال کنید و آن ها را به وضوح بیان کنید).

د) رابطه‌ای برای $\mu(\xi)$ تنها بر حسب چگالی مرکز ρ_c ، R ، ξ و مشتقات آن بدست آورید، سپس μ را در سطح ستاره بدست آورید. پارامتر های ξ و مشتقات آن و μ در سطح ستاره را با زیروند 1 نمایش دهید. مثلا $\xi(R) = \xi_1$

ه) اثبات کنید که فشار مرکز در این ستارگان به صورت $P_c = A\mu_1\rho_c$ که A تنها برحسب ξ و مشتقات آن و ثوابت فیزیکی است.

معادلات لین امدن برای ستارگان کروی متشکل از گازی پلی‌تروپیک با نمایه n ($P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$) :

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n \quad , \quad \rho = \rho_c\,\theta^n \quad , \quad r = \alpha\,\xi \quad , \quad \alpha^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G}\rho_c^{\frac{1}{n}-1}$$

قانون گاوس برای گرانش:

$$\oint \vec{g}\cdot\overrightarrow{dS} = -4\pi G M_{in}$$ شار عبوری از یک سطح گاوسی

(M_{in} جرم محصور در سطح گاوسی است)

۶- (۱۱۰ نمره) یک ذره تحت گرانش یک جرم مرکزی سنگین در مدار بیضی حرکت می کند، که همانطور که میدانید جرم مرکزی در کانون مدار است و مقدار جرم آن $M = ۱.۴۲۹M_{\odot}$ است. کانون پر را کانون یک و کانون خالی را کانون دو می نامیم. یک دستگاه دکارتی راستگرد به مرکزیت کانون یک، محور x به سمت حضیض و محور y ۹۰° بعد از حضیض در جهت چرخش ذره تعریف می‌کنیم (بر این اساس محور z نیز مشخص می‌شود)؛ و دستگاه قطبی‌ای به مرکزیت کانون یک و مبدأ زاویه از حضیض تعریف می‌کنیم. فاصله هر نقطه مدار از کانون یک را با r نشان می دهیم. نقطه بحرانی در مدار را نقطه‌ای تعریف می‌کنیم که در آن امتداد جهت سرعت مماسی از کانون دو عبور می‌کند. نسبت $\frac{r}{a}$ در این نقطه بحرانی را η می‌نامیم که a نیم قطر اطول مدار است.

الف) شرطی بر روی خروج از مرکز مدار بیابید که مدار نقطه بحرانی داشته باشد.

ب) رابطه خروج از مرکز مدار با η را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

فرض کنید در این سوال مدار نقطه بحرانی دارد و همچنین خروج از مرکز کمترین مقدار ممکن خود است. و می‌دانیم r در نقطه بحرانی برابر $۲.۲۷AU$ است. می خواهیم در $r = ۲.۵۱۶AU$ در حالی که ذره در حال دور شدن از کانون ۱ است ذره را وارد مداری جدید با خروج از مرکز ۰.۳۶ کنیم که صفحه مدار جدید به مدار قبلی عمود است. حضیض مدار جدید در نقطه‌ای با z منفی قرار دارد. نقطه انجام مانور در $\theta = ۶۳^{\circ}$ از حضیض مدار جدید است و در مدار جدید سرعت شعاعی در این نقطه مثبت است.

ج) بردار تغییر سرعتی که برای انجام مانور باید اعمال کنیم و مختصات نقطه اوج مدار ثانویه را در دستگاه دکارتی تعریف شده بیابید.

د) می‌خواهیم از یک پایگاه فضایی در نقطه بحرانی که سرعت شعاعی مثبت دارد در مدار اولیه، یک پالس به صورت موج الکترومغناطیس به پایگاهی دیگر در نقطه اوج مدار ثانویه یا ۲ بفرستیم. حداقل زمان ممکن برای انجام این کار چقدر است؟

ه) از لحظه‌ی مانور، چه مدت زمان طول می‌کشد تا ذره دوباره صفحه‌ی مدار اولیه را قطع کند؛ و در این مدت چند سـ یگنال را می توان از نقطه بحرانی فرستاد و پاسخش را دریافت کرد؟ فرض کنید پایگاه نقطه اوج ۲ پاسخ هر سیگنال را ۲۷ دقیقه بعد از دریافت می‌فرستد و پایگاه یک به محض دریافت پاسخ سیگنال بعدی را مخابره می‌کند.

با آرزوی موفقیت

چهاردهمین تیم ملی المپیاد نجوم و اخترفیزیک