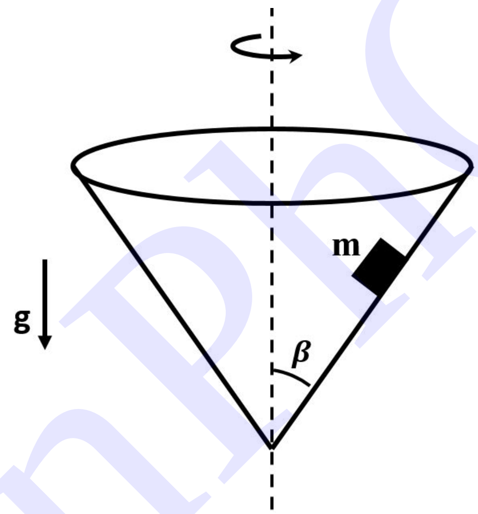
توضیح ضروری: در این آزمون هر مسئله شامل بخش‌های توضیحی است که فرض‌های مسئله را توضیح می‌دهند. این بخش‌ها با **حروف سیاه** نگاشته شده‌اند. خواسته‌های مسئله که با نشانه‌های آ، ب، پ و ... مشخص می‌شوند با حروف معمولی نگاشته شده‌اند.

مسئله ۱

آ) عبارت شتاب در مختصات قطبی کروی (r, θ, ϕ) را بر حسب این مختصات، مشتقات آنها و بردارهای یکه $\hat{e}_r$، $\hat{e}_\theta$ و $\hat{e}_\phi$ به دست آورید. ۲ نمره

جسم کوچکی به جرم m روی بدنه قیفی به زاویه رأس β قرار دارد. شتاب گرانش در راستای محور تقارن قیف و رو به راس قیف است. قیف با سرعت زاویه‌ای متغیر حول محور تقارن خود می‌چرخد. شتاب گرانش g و ضریب اصکاک جنبشی و ایستایی جسم با سطح قیف μ است.



ب) کلی‌ترین حالتی که در آن جسم m ممکن است نسبت به قیف حرکت داشته باشد یا نداشته باشد در نظر بگیرید و معادلات حرکت جسم را بر حسب نیروهای عمودی سطح و اصطکاک بنویسید. ۲ نمره

پ) برای حالت خاصی که جسم نسبت به سطح قیف ساکن است و قیف با شتاب زاویه‌ای ثابت α حول محور خود می‌چرخد، نیروهای اصطکاک و عمودی سطح را بیابید. ۱ نمره

ت) اگر قیف در لحظه $t = 0$ از حال سکون شروع به حرکت کرده باشد، سرعت زاویه‌ای به چه مقداری برسد تا جسم نسبت به قیف شروع به حرکت کند. ۲.۵ نمره

ث) معادلات حرکت بخش (ب) را برای اصطکاک جنبشی باز نویسی کنید. ۲.۵ نمره

ج) آیا می توانید فرض ساده کننده‌ای پیشنهاد دهید که به کمک آن بتوان معادلات بخش (د) را به طور تحلیلی یا اختلالی حل کرد؟ (این قسمت نمره تفضیلی یا ارفاقی دارد و جزو بارم مسئله نیست. بنابراین خواهشمند است بیش از ده دقیقه روی آن وقت نگذارید) ۱ نمره

مسئله ۲

ماهواره ای به جرم m در مدار دایره‌ای به شعاع r_1 دور زمین می‌چرخد. می‌خواهیم این ماهواره را به مدار دایره‌ای با شعاع بزرگتر r_2 منتقل کنیم. برای این کار دو روش را با هم مقایسه می‌کنیم. در روش نخست در نقطه‌ای از مدار موتور جت ماهواره (مشابه موشک) گازهایی را با سرعت u نسبت به ماهواره در راستای شعاعی به طرف زمین خارج می‌کند. این کار در مدت بسیار کوتاهی انجام می‌شود، طوری که ماهواره در طی آن جابه‌جایی محسوسی ندارد. مقدار جرم خارج شده در این مرحله را δm_1 بگیرید.

آ) مقدار δm_1 را چنان بگیرید که ماهواره در فاصله r_2 از مرکز زمین در نقطه اوج مسیر باشد. ۳ نمره

سپس در این لحظه موتور جت ماهواره مجددا روشن شده و مقدار جرم δm_2 را این بار در راستای حرکت ماهواره با همان سرعت u نسبت به ماهواره خارج می‌کند.

ب) مقدار δm_2 را چنان تعیین کنید که ماهواره در مدار دایره‌ای به شعاع r_2 ادامه مسیر دهد. خروج جرم باید در جهت حرکت ماهواره باشد یا در خلاف جهت آن؟ ۱.۵ نمره

پ) به ازای داده‌های عددی زیر $r_1 = 8/0 \times 10^3 km, \qquad r_2 = 1/0 \times 10^4 km$

$m = 2/0 \times 10^3 kg \quad g = 10 ms^{-2} \quad u = 7/2 \times 10^4 ms^{-1} \quad R = 6/4 \times 10^3 km$

مقدار $\delta m = \delta m_1 + \delta m_2$ را حساب کنید. ۰.۵ نمره

مسیر ماهواره یک بیضی است که در مختصات قطبی با معادله $r = r_0/(1 - \epsilon \cos\theta)$ توصیف می شود. در این رابطه θ زاویه شعاع حامل ماهواره با شعاع حامل نقطه اوج است و $r_0 = l^2/GMm^2$، که در آن l تکانه زاویه‌ای ماهواره است و ϵ خروج از مرکز بیضی نام دارد.

ت) زاویه میان شعاع‌های حامل دو نقطه‌ای که موتور روشن می‌شود را حساب کنید. (با استفاده از داده‌های مسئله و r_0 می‌توانید ϵ را حساب کنید و نیازی به فرمول صریح آن نیست.) ۱.۵ نمره

در روش دوم در یک نقطه از مدار ابتدا موتور جت ماهواره جرم $\delta m'_1$ را در راستای حرکت ماهواره با همان سرعت u نسبت به ماهواره، خارج می‌کند.

ث) مقدار $\delta m'_1$ چقدر باشد که ماهواره در نقطه اوج مسیر منحرف شده در فاصله r_2 از مرکز زمین باشد. خروج جرم باید در جهت حرکت ماهواره باشد یا در خلاف جهت آن؟ ۱.۵ نمره

در این نقطه مجددا موتور جت ماهواره جرم $\delta m'_2$ را در راستای حرکت ماهواره با همان سرعت u نسبت به ماهواره خارج می‌کند.

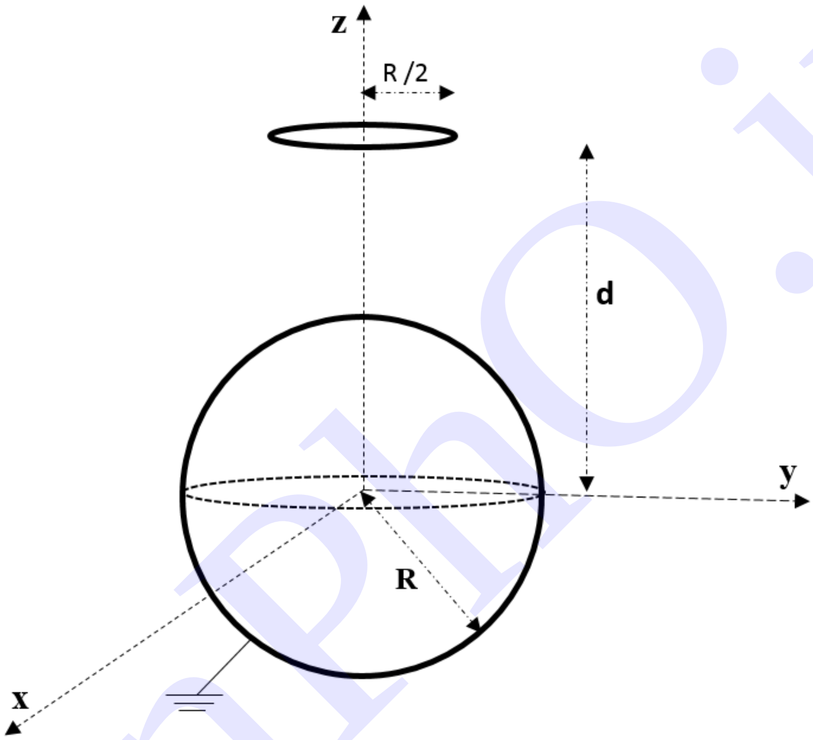
ج) مقدار $\delta m'_2$ را چنان تعیین کنید که ماهواره در مدار دایره‌ای به شعاع r_2 ادامه مسیر دهد. خروج جرم باید در جهت حرکت ماهواره باشد یا در خلاف جهت آن؟ ۱ نمره

چ) مقدار $\delta m' = \delta m'_1 + \delta m'_2$ را با استفاده از داده های بخش پ حساب کنید. در کدام روش سوخت کمتری مصرف می‌شود؟ ۰.۵ نمره

ح) زاویه میان شعاع‌های حامل دو نقطه‌ای که موتور روشن می‌شود در این حالت چیست؟ ۰.۵ نمره

مسئله ۳:

مطابق شکل کره‌ای رسانا به شعاع R به زمین وصل شده است. حلقه‌ای به شعاع $\frac{R}{2}$ و بار کل Q که به‌طور یکنواخت در حلقه توزیع شده است، در خارج از کره قرار دارد به‌طوری که فاصله مرکز حلقه از مرکز کره برابر $\mathbf{d}$ است و $\mathbf{d} > \mathbf{R}$ است. خطی که مرکز کره را به مرکز حلقه وصل می کند محور تقارن حلقه است.



الف) محل و مشخصات هندسی بار تصویری حلقه نسبت به کره را پیدا کنید.   ۲ نمره

ب) چگالی بار تصویری و مقدار بار تصویری را به دست آورید. ۱ نمره

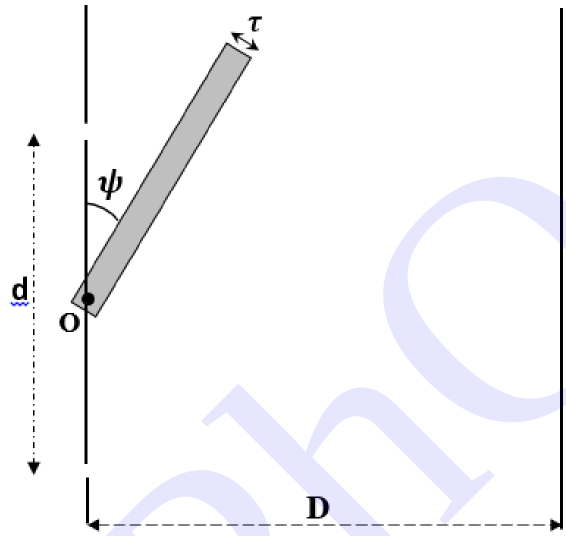
پ) گشتاور دو قطبی الکتریکی و تانسور چهار قطبی سیستم معادل (حلقه و تصویر آن) را نسبت به دستگاه مختصات مشخص شده در شکل به دست آورید. ۴.۵ نمره

ت) پتانسیل الکتریکی در فواصل $r \gg d$ را تا مرتبه چهار قطبی الکتریکی بنویسید. ۲.۵ نمره

مسئله ۴:

دو شکاف یانگ با فاصله d از هم قرار گرفته‌اند. فاصله این دو شکاف تا پرده برابر D است. در وسط این دو شکاف، تیغه متوازی‌السطوحی با ضخامت τ و ضریب شکست n در نقطه O لولا شده به طوریکه زاویه بین امتداد تیغه و خط واصل بین دو شکاف ψ است.

فرض کنید که $d \ll D$ ، $\lambda \ll \tau < d$ و $\psi < \pi/2$



پرتوی را در نظر بگیرید که از روزنه بالایی عمود بر پرده خارج می شود

الف) تغییر راه نوری را برای این پرتو نسبت به حالتی که تیغه وجود ندارد، حساب کنید ۳.۵ نمره

ب) برای این پرتو، وجود تیغه باعث تغییر فاصله موثر دو شکاف خواهد شد. این فاصله را حساب کنید. ۲.۵ نمره

حال فرض کنید تیغه با سرعت زاویه ای $\beta = \frac{d\psi}{dt}$ حول محوری که عمود بر صفحه شکل است و از نقطه O می گذرد، می چرخد.

پ) برای فریزهایی که تقریبا مقابل روزنه‌ها تشکیل می‌شوند، سرعت و جهت حرکت فریزها (بالا یا پایین) را بیابید ۴ نمره

مسئله ۵

یک کیلوگرم هوا در دمای ۳۰۰ کلوین و فشار یک اتمسفر قرار دارد. ابتدا در فشار ثابت، دمای آن چهار برابر می‌شود. سپس در دمای ثابت، حجم آن به حجم اولیه می‌رسد و در مرحله آخر در حجم ثابت حالت اولیه خود را باز می‌یابد. هوا را گاز کامل با جرم مولی $M = ۲۹\ \frac{g}{mol}$ در نظر بگیرید. ظرفیت گرمایی هوا در حجم ثابت و فشار ثابت به ترتیب $C_V = ۰/۷۲\frac{kJ}{kgK}$ و $C_P = ۱/۰۰\frac{kJ}{kgK}$ است. ثابت جهانی گازها را $۸/۳\frac{J}{mol\ K}$ و $\ln ۲$ را ۰/۶۹ بگیرید.

الف) مختصات (T,P,V) را برای ابتدا و انتهای هر فرآیند محاسبه کنید. ۲.۵ نمره

ب) منحنی چرخه فوق را در نمودار فشار- حجم (P-V) رسم کنید. ۱.۵ نمره

پ) کار و گرمای مبادله شده و تغییرات انرژی داخلی را در هر فرایند محاسبه کنید. ۴.۵ نمره

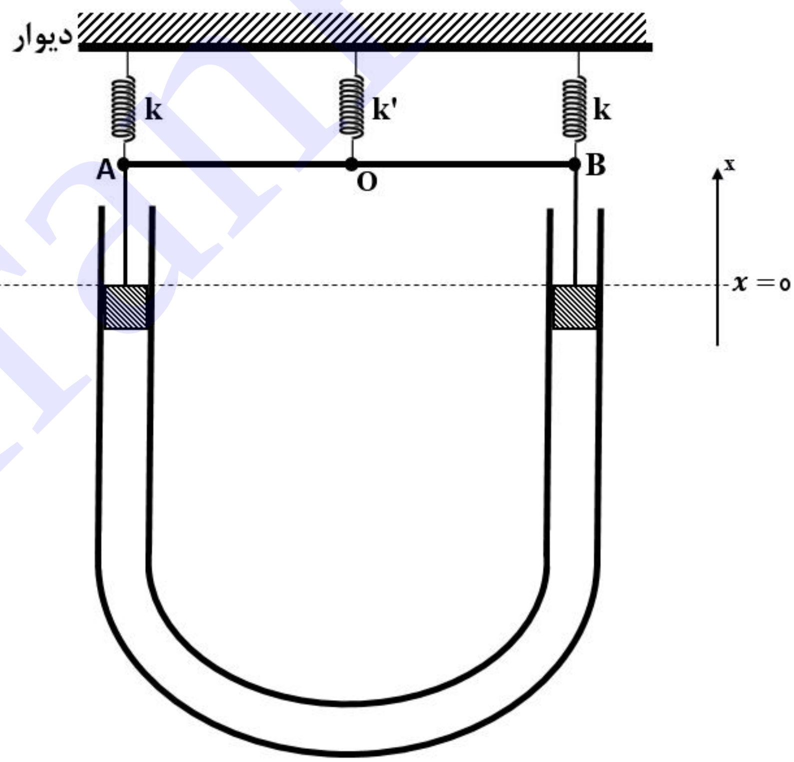
قانون دوم ترمودینامیک بر مبنای مفهوم یک متغیر حالت موسوم به آنتروپی (S) استوار است که معیاری از بی نظمی در یک سیستم است. طبق تعریف تغییرات دیفرانسیلی آنتروپی به صورت نسبت تغییرات دیفرانسیلی گرما به دما بیان می شود ($dS = \frac{dQ}{T}$).

ت) اگر در سیستم فوق، آنتروپی اولیه $S = ۰/۱۰\ \frac{kJ}{kgK}$ فرض شود در این صورت این کمیت را برای سایر نقاط چرخه مورد نظر حساب کنید. ۱.۵ نمره

توضیح ضروری: در این آزمون هر مسئله شامل بخش‌های توضیحی است که فرض‌های مسئله را توضیح می‌دهند. این بخش‌ها با **حروف سیاه** نگاشته شده‌اند. خواسته‌های مسئله که با نشانه‌های آ، ب، پ و ... مشخص می‌شوند با حروف معمولی نگاشته شده اند.

مسئله ۱

دستگاه شکل مقابل روی یک میز افقی چینش شده و تصویر از بالاست. در این دستگاه جرم هر کدام از پیستون‌ها m است. میله بدون جرم AB با سه فنر به دیواره ثابتی متصل است. ضریب فنرهای کناری که به نقاط A و B متصل‌اند k و ضریب فنری که در نقطه O وسط AB به دیواره متصل است k' است. در نقاط A و B میله توسط دو لولای کوچک به دستک‌های بدون جرم پیستون‌ها متصل است. در حالت تعادل کلیه فنرها طول عادی خود را دارند و فشار گاز درون محفظه U ـ شکل همان $p_\circ$ فشار هوای بیرون است. چون میله AB بدون جرم است می‌توان برای آن شرط تعادل اهرم را در هر لحظه معتبر دانست. حجم گاز درون محفظه در حالت تعادل V و سطح مقطع پیستون‌ها S است. فرض کنید نوسان دستگاه سریع است و طی آن گاز درون محفظه فرصت تبادل گرما با محیط ندارد. یادآوریی می شود در انبساط یا انقباض بی‌در رو گاز کامل کمیت pV^γ ثابت است که در آن $\gamma = C_p/C_V$ ضریب اتمیسیته نام دارد. جابه‌جایی پیستون‌ها از موضع تعادل را با x_1 و x_2 نشان دهید.



آ) با فرض کوچک بودن جا به جایی ها در مقایسه با طول لوله U ـ شکل، معادله حرکت هر کدام از پیستون ها را بنویسید. ۳ نمره

ب) حل معادلات حرکت را به صورت $x_۱ = a_۱ \cos(\omega t + \phi)$ و $x_۲ = a_۲ \cos(\omega t + \phi)$ حدس می زنیم. این حل را در معادلات حرکت قرار دهید. به این ترتیب دو جواب متمایز ω' و ω'' برای ω به دست می آید. به ازای هر یک از این بسامدها نسبت $a_۱/a_۲$ را به دست آورید. کلی ترین حل معادلات را به صورت ترکیب خطی این دو نوع حل بنویسید. به این ترتیب چهار ثابت اولیه خواهید داشت که شامل دامنه کلی و فاز هر کدام از دو مد نوسانی (حلهای متناظر با دو بسامد به دست آمده) هستند. ۳ نمره

پ) فرض کنید در لحظه $t = ۰$ پیستون ۱ را به اندازه A بالا بکشیم و پیستون ۲ را در موضع تعادل نگه داریم. سپس دستگاه را از حال سکون از این پیکربندی رها کنیم. عبارت دقیق $x_۱(t)$ و $x_۲(t)$ را بر حسب داده های مسئله به دست آورید. ۱ نمره

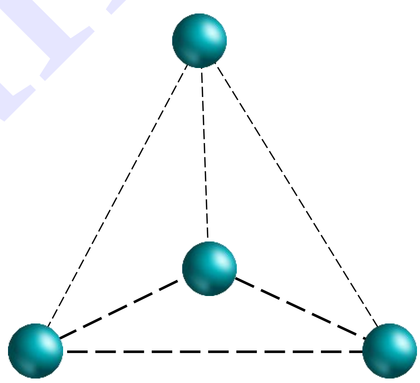
ت)در چه صورتی ω' و ω'' به هم نزدیک هستند؟ برای این حالت نمودار کیفی $x_۱(t)$ و $x_۲(t)$ را مانند شکل زیر طوری بکشید که محور زمان آنها مشابه باشد. (پاسخ خود را در پاسخ نامه ارائه دهید. شکل زیر صرفا برای راهنمایی است.) ۳ نمره

مسئله ۲: این سوال از دو بخش مجزا از هم تشکیل شده است.

۲-۱) الکتروفور وسیله‌ای برای تولید الکتریسیته ساکن است. این وسیله دارای یک صفحه رسانا است که بار الکتریکی در آن تولید می‌شود. اگر رسانایی در تماس با این صفحه قرار بگیرد بار از الکتروفور به رسانا منتقل می شود.

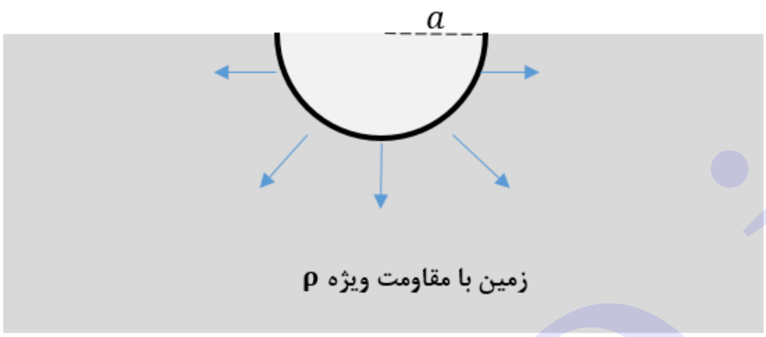
فرض کنید در ابتدا صفحه رسانای یک الکتروفور دارای بار Q باشد. کره رسانایی با صفحه الکتروفور تماس داده شده و به مقدار q بار الکتریکی از الکتروفور به کره رسانا منتقل می‌شود. سپس کره رسانا را از الکتروفور جدا می‌کنیم. الکتروفور مجددا به کار می‌افتد تا بار روی صفحه آن به مقدار اولیه Q برسد. کره رسانا برای بار دوم با الکتروفور تماس داده می شود و فرآیند قبل تکرار می شود. اگر این فرآیند بینهایت بار تکرار شود در نهایت چه مقدار بار بر روی کره رسانا جمع خواهد شد؟   ۳.۵ نمره

۲-۲) چهار رسانای کروی مشابه طوری در فضا ثابت شده‌اند که در رئوس یک چهار وجهی منتظم می‌باشند . در ابتدا همه رساناها بدون بار هستند. روی یکی از رساناها بار Q قرار می‌دهیم به طوری که پتانسیل آن V باشد. حال این رسانا را به طور لحظه‌ای به ترتیب به هرکدام از سه رسانای دیگر متصل کرده و جدا می کنیم. در انتها این رسانا را به زمین وصل می‌کنیم و می‌بینیم که بار آن $-Q_0$ می شود. ضرایب القا C_{ij} را برحسب Q_0، Q و V به دست آورید. ۶.۵ نمره

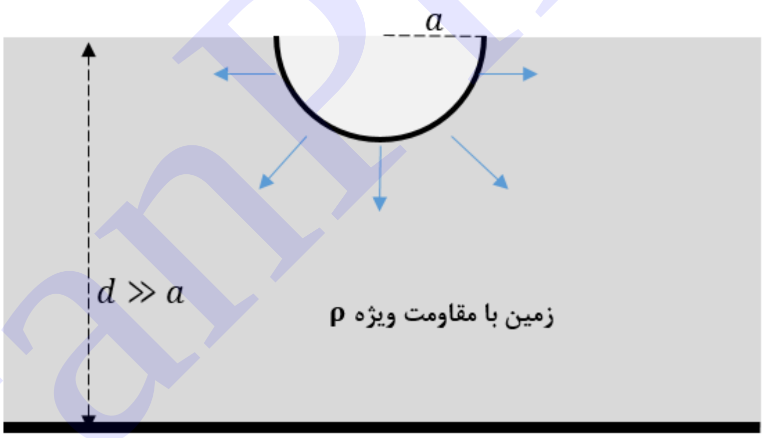


مسئله ۳

الف) مطابق شکل یک الکترود رسانا به شکل نیمکره به شعاع a داخل زمین قرار گرفته است. جریان I از طریق الکترود به طور همسانگرد وارد زمین می شود. اگر زمین را یک محیط اهمی همسانگرد با مقاومت ویژه ρ در نظر بگیریم، مقاومت الکتریکی این سیستم را محاسبه کنید.۳ نمره



ب) فرض کنید که در عمق d از سطح زمین $(d \gg a)$ یک صفحه نامتناهی موازی با سطح زمین قرار گرفته باشد، در این حالت مقاومت سیستم را محاسبه کنید. (می توانید از رابطه $RC = \frac{\epsilon}{\sigma}$ در محیط های اهمی استفاده کنید) ۷ نمره



مسئله ۴: این سوال از دو بخش مجزا از هم تشکیل شده است.

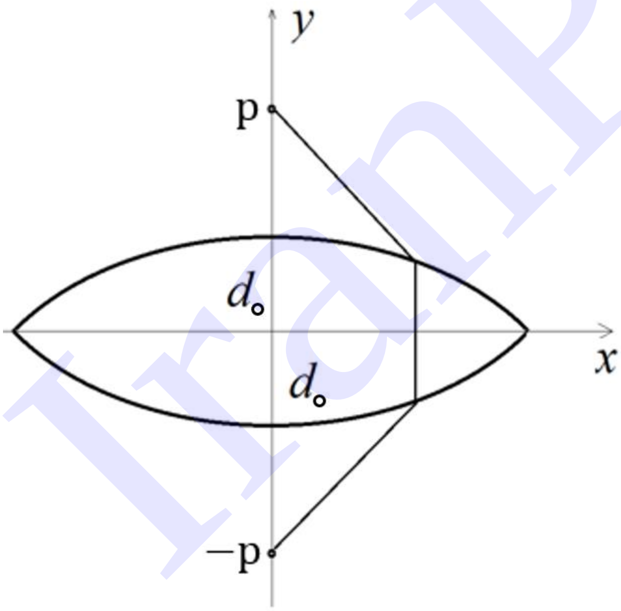
۴-۱): ضریب شکست شیشه وابسته به رنگ است. می‌توان این وابستگی را با رابطه کوشی به صورت $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$ بیان کرد که در آن λ طول موج و A و B اعداد ثابت هستند. یک عدسی نازک همگرا با ضخامت ناچیز و قطر D از این شیشه می‌سازیم. چشم انسان طول موجهای بین دو نور بنفش با طول موج λ_V و قرمز با طول موج λ_R را می‌بینند. یک چشمه نقطه‌ای نور سفید که شامل همه طول موجهای بین λ_R و λ_V است را در فاصله P از عدسی قرار می دهیم به طوری که $p > f_R > f_V$ که f_R و f_V به ترتیب فاصله کانونی برای رنگ قرمز و بنفش هستند. در این صورت، پرده را در هر جایی قرار دهیم، حداکثر تصویر یک رنگ در روی پرده به صورت نقطه خواهد بود و وجود بقیه رنگها باعث حاشیه دار شدن تصویر می‌شود. این موضوع باعث می‌شود تصویر یک نقطه، یک دایره رنگی شود.

الف) اندازه قطر دایره‌ی رنگی تصویر این نقطه‌ی سفید را بر حسب فاصله‌ی عدسی نازک با پرده، q، بیابید. ۲ نمره

ب) فاصله پرده تا عدسی چقدر باشد تا قطر دایره رنگی تصویر کمینه شود. ۱.۵ نمره

پ) در این فاصله (قسمت ب) تصویر کدام طول موج، کاملا به صورت یک نقطه است؟ ۱.۵ نمره

۴-۲):



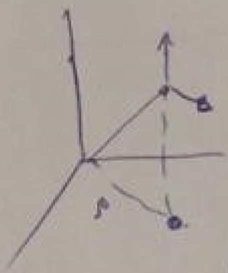
می‌خواهیم از شیشه‌ای با ضریب شکست n، یک عدسی (غیر کروی) برای همگرا کردن نورهای متصاعد شده از نقطه $(x_o, y_o, z_o) = (0, -p, 0)$ در نقطه $(x_i, y_i, z_i) = (0, p, 0)$ بسازیم. این عدسی در مرکز دارای ضخامت $2d_0$ می‌باشد. برای سادگی می‌توانید این عدسی را نسبت به صفحه xz متقارن بگیرید. (واضح است که این عدسی حول محور y متقارن است.)

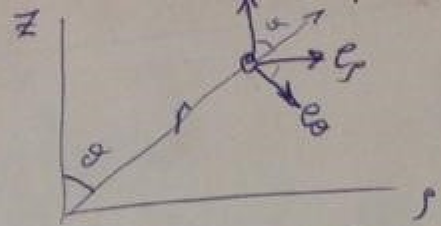
الف) با استفاده از اصل فرما، رابطه‌ای برای نیم ضخامت این عدسی بر حسب فاصله تا محور y بیابید. (اگر $\rho = \sqrt{x^2 + z^2}$ باشد $d(\rho)$ چقدر است؟ ۳.۵ نمره
واضح است که $d(0) = d_0$)

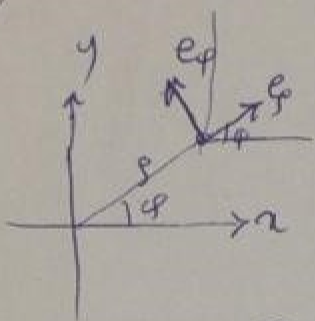
ب) قطر این عدسی چقدر است؟ (در این سوال هیچ تقریبی وجود ندارد.) ۱.۵ نمره

۱- الف

مسئله ۱ آمانیل
۴۰ نمره سمپ ۹۹







$$e_r = e_z \cos\theta + e_\rho \sin\theta$$
$$e_\theta = -e_z \sin\theta + e_\rho \cos\theta$$
$$e_\rho = \cos\varphi\, e_x + \sin\varphi\, e_y$$
$$e_\varphi = -\sin\varphi\, e_x + \cos\varphi\, e_y$$

$$\Rightarrow \quad e_r = \sin\theta\cos\varphi\, e_x + \sin\theta\sin\varphi\, e_y + \cos\theta\, e_z$$
$$e_\theta = \cos\theta\cos\varphi\, e_x + \cos\theta\sin\varphi\, e_y - \sin\theta\, e_z$$
$$e_\varphi = -\sin\varphi\, e_x + \cos\varphi\, e_y$$

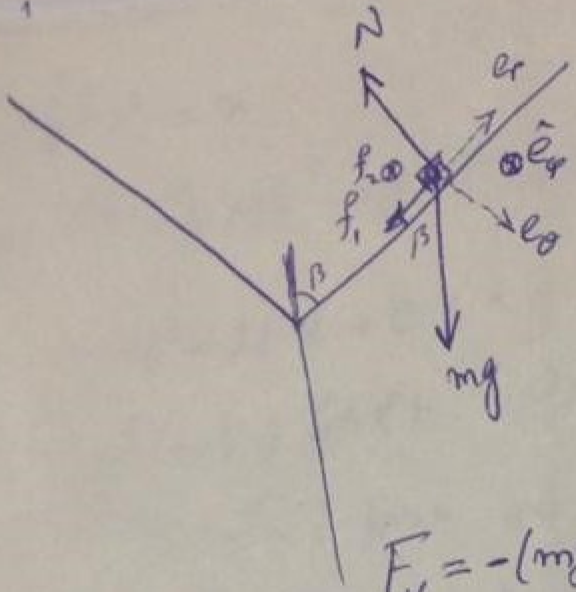
$$\frac{de_r}{dt} = \dot\theta\, e_\theta + \dot\varphi \sin\theta\, \hat e_\varphi$$
$$\frac{de_\theta}{dt} = -\dot\theta\, e_r + \dot\varphi\cos\theta\, \hat e_\varphi$$
$$\frac{de_\varphi}{dt} = -\dot\varphi\left(\sin\theta\, \hat e_r + \cos\theta\, \hat e_\theta\right)$$

$$\vec r = r\hat e_r \Rightarrow \vec v = \dot r \hat e_r + r(\dot\theta e_\theta + \dot\varphi \sin\theta\, e_\varphi)$$

$$\vec a = \ddot r e_r + \dot r(\dot\theta e_\theta + \dot\varphi\sin\theta\, e_\varphi) + \dot r(\dot\theta e_\theta + \dot\varphi \sin\theta\, e_\varphi) + r\ddot\theta e_\theta$$
$$+ r\dot\theta(-\dot\theta e_r + \dot\varphi\cos\theta\, e_\varphi) + r\ddot\varphi \sin\theta\, e_\varphi + r\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\, e_\varphi$$
$$+ r\dot\varphi\sin\theta(-\dot\varphi\sin\theta\, e_r - \dot\varphi\cos\theta\, e_\theta)$$

$$\vec a = (\ddot r - r\dot\theta^2 - r\dot\varphi^2\sin^2\theta)\hat e_r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta - r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta)\hat e_\theta$$
$$+ (2\dot r\dot\varphi\sin\theta + 2r\dot\theta\dot\varphi\cos\theta + r\ddot\varphi\sin\theta)\hat e_\varphi$$

ب -



[۲]

$\theta = \beta =$ ثابت

$$\vec N = -N\hat e_\theta$$

$$m\vec g = -mg\cos\beta\,\hat e_r + mg\sin\beta\,\hat e_\theta$$

$$\vec f_1 = -f_1\hat e_r \quad , \quad \vec f_2 = f_2\hat e_\varphi$$

$$F_{net} = -(mg\cos\beta + f_1)\hat e_r + (mg\sin\beta - N)\hat e_\theta + f_2\hat e_\varphi$$

$$\theta = \beta \Rightarrow \dot\theta = 0 \,,\; \ddot\theta = 0 \Rightarrow \begin{aligned} & m(\ddot r - r\dot\varphi^2\sin^2\beta) = -(mg\cos\beta + f_1) \\ & m(-r\dot\varphi^2\sin\beta\cos\beta) = mg\sin\beta - N \\ & m(2\dot r\dot\varphi\sin\beta + r\ddot\varphi\sin\beta) = f_2 \end{aligned}$$

$\dot\varphi$ و $\ddot\varphi$ مربوط به ذره‌اند که فرضمان با حال قیف یکی است

پ - وقتی ذره از حرکت قیف تبعیت کند [۱]

$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 \,,\; \ddot\varphi = \alpha \quad \dot\varphi = \alpha t$

فرض کنید در فاصله r_0 از نوک قیف قرار داشته باشد، یعنی: $r = r_0$: ثابت

$$\begin{cases} m r_0(\alpha t)^2\sin^2\beta = mg\cos\beta + f_1 \\ m r_0(\alpha t)^2\sin\beta\cos\beta = N - mg\sin\beta \\ m r_0\alpha\sin\beta = f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = m(r_0\alpha^2t^2\sin^2\beta - g\cos\beta) \\ f_2 = m r_0\alpha\sin\beta \\ N = m(r_0\alpha^2t^2\sin\beta\cos\beta + g\sin\beta) \end{cases}$$

ت [۲.۵]

$$f \leq \mu N \Rightarrow f_1^2 + f_2^2 \leq \mu^2 N^2$$

$$(r_0\alpha^2t^2\sin^2\beta - g\cos\beta)^2 + (r_0\alpha\sin\beta)^2 \leq \mu^2(r_0\alpha^2t^2\sin\beta\cos\beta + g\sin\beta)^2$$

فرض کنیم در حالت حدی به ازای $\omega_f = \alpha t_0$ شروع به حرکت کند

$$r_0^2\omega_f^4\sin^2\beta(\sin^2\beta - \mu^2\cos^2\beta) - 2g r_0\omega_f^2\sin^2\beta\cos\beta(1+\mu^2) + g^2(\cos^2\beta - \mu^2\sin^2\beta) + r_0^2\alpha^2\sin^2\beta = 0$$

$$r_0\omega^2\sin\beta = x$$

$$f(x) = (\sin^2\beta-\mu^2\cos^2\beta)x^2-2gx\sin\beta\cos\beta(1+\mu^2)+g^2(\cos^2\beta-\mu^2\sin^2\beta)+r_0^2\alpha^2\sin^2\beta \le 0$$

$$ax^2-2b'x+c\le 0$$

علامت b همواره منفی است. برای $\tan\beta<\mu$ (زاویه کوچک راس، نزدیک به حالت قائم) علامت a منفی و برای $\tan\beta>\mu$ (نزدیک به حالت تخت) a مثبت است.

علامت c برای زاویه‌های β کوچک ($\mu<\cot\beta$) حتماً مثبت است.
برای μ بزرگ و α کوچک c می‌تواند منفی شود.

واما Δ':

$$\Delta' = b'^2-ac = g^2(1+\mu^2)^2\sin^2\beta\cos^2\beta - g^2(\sin^2\beta-\mu^2\cos^2\beta)(\cos^2\beta-\mu^2\sin^2\beta) - r_0^2\alpha^2\sin^2\beta(\sin^2\beta-\mu^2\cos^2\beta)$$

$$= +g^2\mu^2 - r_0^2\alpha^2\sin^2\beta(\sin^2\beta-\mu^2\cos^2\beta)$$

$$= (g^2+r_0^2\alpha^2\sin^2\beta\cos^2\beta)\mu^2 - r_0^2\alpha^2\sin^2\beta$$

اگر $\Delta'<0$ باشد $f(x)$ همیشه تک علامت است

$$\Delta'<0 \Rightarrow \mu^2 < \underbrace{\frac{r_0^2\alpha^2\sin^2\beta}{g^2+r_0^2\alpha^2\sin^2\beta\cos^2\beta} < \tan^2\beta}_{\text{یعنی}}$$

در این حالت لزوماً $a>0$ و $f(x)$ همواره مثبت است که نامطلوب است.

بنابراین حالتی که همواره شرط سرنخوردن برقرار باشد هرگز اتفاق نمی‌افتد.

و اگر اصطکاک اندک باشد، یعنی $\frac{r_0\alpha\sin\beta}{\sqrt{g^2+r_0^2\alpha^2\sin^2\beta\cos^2\beta}} > \mu$ باشد، هرکاری کنیم به ازای تمام پیامدها جسم روی تیغه سر می‌خورد. (خلاف فرض مسئله)

می‌رویم سراغ حالتهای $\Delta'>0$، که در آن دو ریشه داریم

در حالت دو ریشه علامت $f(x)$ بین دو ریشه مخالف a و خارج آنها موافق a است.

- برای $a>0$ ($\tan\beta>\mu$)، $-\frac{b}{2a}>0$ جمع دو ریشه مثبت است.

• اگر $c>0$ حاصل‌ضرب دو ریشه مثبت است ← دو ریشه مثبت که یکی ω_{min} و دیگری ω_{max}ها است. بین دو ریشه $f(x)<0$ که مطلوب است (سر نمی‌خورد)

در این حال به ازای

$$\omega=\omega_{max}=\frac{g(1+\mu^2)\sin\beta\cos\beta+\sqrt{(g^2+r_0^2\alpha^2\sin^2\beta\cos^2\beta)(\mu^2-\ldots\sin^2\beta)}}{\sin^2\beta-\mu^2\cos^2\beta}$$

جسم شروع به سر خوردن می‌کند و به سمت بیرون یعنی rهای بزرگتر به حرکت در می‌آید.

در این حالت به ازای ω کم رو به پایین سر می‌خورد. که صورت مسئله فرض کرده اینطور نیست.

• اگر $c<0$ حاصل ضرب ریشه‌ها منفی است. یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی داریم. در این حالت به ازای $0<\omega<\omega_{max}$ جسم سر نمی‌خورد. این منافاتی با فرض صورت مسئله (که در $t=0$ یعنی $\omega=0$ جسم نسبت به قیف ساکن است) ندارد. ω_{max} همان مقدار بالایی است

- برای $a<0$ (که لزوماً $\Delta>0$ است) که متناظر است با زاویه‌های کوچک ($\tan\beta<\mu$). در این حالت $-\frac{b}{2a}<0$ است و جمع دو ریشه منفی است.

بسته به علامت c دو حالت پیش می‌آید. خارج از دو ریشه $f<0$ مطلوب است.

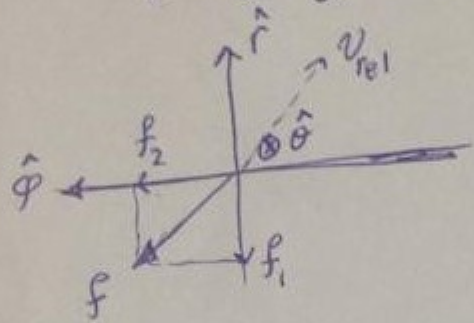
• $c>0$ حاصل ضرب ریشه‌ها منفی است، یعنی یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی داریم. ناحیه بزرگتر از ریشه مثبت مطلوب است. یعنی از ریشه بزرگتر ω_{min}ها است و ω_{max} نداریم. البته صورت مسئله تلویحاً فرض کرده که ω_{min} نداریم. این حالت در صورتی است که

$$\tan^2\beta<\mu^2<\cot^2\beta+\frac{r_0^2\alpha^2}{g^2}$$

• $c<0$ دو ریشه منفی داریم و μ^2 از هر دو $\tan^2\beta$ و $\cot^2\beta+\frac{r_0^2\alpha^2}{g^2}$ بزرگتر است. همه ωهای مثبت $f(x)$ منفی است و مطلوب است. ω_{max} هم نداریم.

– معادلات همان معادلات بخش ب-t است که باید f_1 و f_2 را در آن تعیین کنیم

اگر به طور موضعی در محل ذره محورهای $\hat r$ و $\hat\varphi$ را رسم کنیم این طوریه



$$\vec v_{rel} = \dot r\,\hat e_r + \overbrace{(\alpha t+\dot\varphi)}^{r\sin\beta}\,\hat e_\varphi$$

دلیل: قبل از راه افتادن f را به سمت پایین ($-\hat e_r$) گرفتیم تا از تمایل به پرت شدن در سرعت‌های بزرگ جلوگیری کند. انتظار این است که به محض شروع به حرکت، ذره در جهت شعاع‌های بزرگتر به حرکت درآید. در جهت $\hat e_\varphi$ هم باشد بگردش قیف در جهت $\hat e_\varphi$ هنگامی که نیروی f_2 دیگر نتواند جسم را با قیف همراه کند، جسم از قیف عقب می‌افتد و $\dot\varphi<\alpha t$ در نتیجه جسم نسبت به قیف در جهت $-\hat e_\varphi$ حرکت می‌کند

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\dot r}{\alpha t-\dot\varphi}\ ,\quad \sqrt{f_1^2+f_2^2}=\mu N \Rightarrow$$

$$f_1 = -\mu N\frac{\dot r}{\sqrt{\dot r^2 + r^2(\alpha t-\dot\varphi)^2\sin^2\beta}}\ ,\quad f_2 = \mu N\frac{\alpha t-\dot\varphi}{\sqrt{\dot r^2 + r^2(\alpha t-\dot\varphi)^2\sin^2\beta}}$$

جهت f_1 و f_2 همان است که در معادلات بخش ب نوشتیم

$$m(\ddot r - r\dot\varphi^2\sin^2\beta) = -mg\cos\beta - \mu N\frac{\dot r}{\sqrt{\dot r^2 + r^2(\alpha t-\dot\varphi)^2\sin^2\beta}}$$

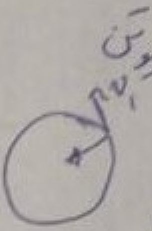
$$mr\dot\varphi^2\sin\beta\cos\beta = N - mg\sin\beta$$

$$m(2\dot r\dot\varphi\sin\beta + r\ddot\varphi\sin\beta) = \mu N\frac{\alpha t-\dot\varphi}{\sqrt{\dot r^2 + r^2(\alpha t-\dot\varphi)^2\sin^2\beta}}$$

دور اول

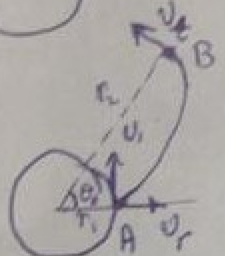
حل مسئله آزمون تابستان ۹۹

آ) از برابری سرعت در مدار دایره‌ای به شعاع r_1 با استفاده از قانون نیوتن



$$m\frac{v_1^2}{r_1} = m\frac{GM}{r_1^2} \Rightarrow v_1^2 = \frac{GM}{r_1} = \frac{gR^2}{r_1} \leftarrow mg = m\frac{GM}{R^2}$$

۳



با پایستگی تکانه زاویه‌ای

با پایستگی انرژی:

$$\begin{cases} m r_1 v_1 = m r_2 v_t \\ \frac{1}{2}m(v_1^2+v_r^2) - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}m v_t^2 - \frac{GMm}{r_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_t = \frac{r_1}{r_2}v_1 \Rightarrow v_t = \frac{r_1 R}{r_2}\sqrt{\frac{g}{r_1}} \Rightarrow \boxed{v_t = \frac{R}{r_2}\sqrt{g r_1}}$$

$$\frac{GM}{r_1} + v_r^2 - \frac{2GM}{r_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}\left(\frac{GM}{r_1}\right) - \frac{2GM}{r_2} \Rightarrow v_r^2 = \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} - \frac{2r_1}{r_2}\right)\frac{GM}{r_1}$$

$$\boxed{v_r = \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\sqrt{\frac{gR^2}{r_1}}}$$

در نقطه A موتور جت ماهواره باید سرعت شعاعی v_r را به ماهواره بدهد

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt} \Rightarrow v_r - 0 = -u \ln\left(\frac{m-\delta m}{m}\right)$$

$$1 - \frac{\delta m}{m} = e^{-\frac{v_r}{u}} \Rightarrow \boxed{\delta m_1 = m\left(1 - e^{-\frac{v_r}{u}}\right)}$$

ب - در نقطه B باید سرعت از $v_t = \frac{R r_1}{r_2}\sqrt{\frac{g}{r_1}}$ برسد به $v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} = R\sqrt{\frac{g}{r_2}}$

۴

از همان فرمول موشک و با فرض اینکه جرم تقریبا m است

$$\delta v = v_2 - v_t = -u \ln\frac{m - \delta m_2}{m} \Rightarrow 1 - \frac{\delta m_2}{m} = e^{-\frac{\delta v}{u}} \Rightarrow \delta m_2 = m\left(1 - e^{-\frac{\delta v}{u}}\right)$$

با فرض کوچک بودن δv در برابر u داریم

$$\delta m_1 \simeq m\left(\frac{v_r}{u}\right), \quad \delta m_2 = m\left(\frac{\delta v}{u}\right)$$

$$\delta m = \delta m_1 + \delta m_2 = m\frac{v_r + v_2 - v_t}{u} \qquad v_2 - v_t = R\sqrt{\frac{g}{r_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right)$$

$$\boxed{\delta m = \frac{m}{u}R\sqrt{\frac{g}{r_2}}\left(1 + \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} - 2\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right)}$$

همه جرم در جهت حرکت باید باشد تا سرعت آن را بالا ببرد.

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{6.4\times10^{6}\times\sqrt{\frac{10\,m\,s^{-2}}{1\times10^{7}m}}}{7.2\times10^{4}}\left(1+\sqrt{\frac{5}{4}}-2\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$$

$$= \frac{6.4\times10^{6}\times10^{-3}\,m/s}{7.2\times10^{4}\,m/s}\left(1+\frac{\sqrt5}{2}-\frac{4\sqrt5}{5}\right) = \frac{8}{9}\times10^{-1}\times\left(1-\frac{3\sqrt5}{10}\right)$$

$$= \frac{8}{9}\times10^{-1}\times\frac{3.27}{10} \simeq 2.9\times10^{-2} \Rightarrow \delta m = 2.9\times10^{-2}\times2\times10^{3} = 58\,kg$$

ب) 1,5

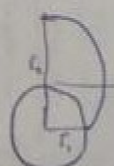
$$r_0 = \frac{\ell^2}{GMm^2} = \frac{(mr_1v_1)^2}{GMm^2} = \frac{r_1^2}{GM}v_1^2 = \frac{r_1^2}{GM}\frac{GM}{r_1} = r_1$$

منظور می شه رادیه ج در شکل صفحه قبل است. برای ε می شه

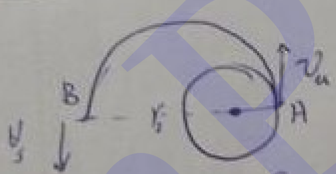
$$r_2 = \frac{r_0}{1-\epsilon} = \frac{r_1}{1-\epsilon} \Rightarrow \epsilon = 1-\frac{r_1}{r_2}$$

$$r_1 = \frac{r_0}{1-\epsilon\cos\theta_0} = \frac{r_1}{1-\epsilon\cos\theta_0} \Rightarrow \cos\theta_0 = 0 \quad \boxed{\theta_0 = \frac{\pi}{2}}$$

به جای محاسبه ε هم احتیاج نمی بود شکل ابعادی می شه



ث. پس از کار موتور سرعت از v_1 به v_u رسیده است. اگر سرعت در اوج v_s باشد 1,5



$$\begin{cases} mr_1v_u = mr_2v_s \\ \frac12 mv_u^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac12 mv_s^2 - \frac{GMm}{r_2}\end{cases}$$

$$v_s = \frac{r_1}{r_2}v_u \Rightarrow v_u^2 - \frac{2GM}{r_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}v_u^2 - \frac{2GM}{r_2} \Rightarrow \left(1-\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)v_u^2 = \frac{2gR^2}{r_1}\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{r_1}{r_2}\right)v_u^2 = \frac{2gR^2}{r_1} \Rightarrow v_u = \sqrt{2gR}\sqrt{\frac{Rr_2}{(r_1+r_2)r_1}}$$

$$\delta v_1 = v_u - v_1 = v_u - \sqrt{\frac{gR^2}{r_1}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}}-1\right)$$ مرحله دوم در جهت ... ماهواره

$$\delta m_1' = m\left(1-e^{-\frac{\delta v_1}{u}}\right) \Rightarrow \delta m_1' \simeq m\frac{\delta v_1}{u}$$

ج) در نقطه B باید سرعت از v_s برسد به v_2 خروج از مدار ... 1

$$v_s = \frac{r_1}{r_2}v_u = \frac{r_1}{r_2}\sqrt{\frac{gR^2}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}}\right) = \sqrt{\frac{gR^2}{r_2}}\left(\sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r_2}} \qquad \delta v_2' = v_2 - v_s = \sqrt{\frac{gR^2}{r_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right)$$

$$\delta m_2' = m\left(1-e^{-\frac{\delta v_2'}{u}}\right) \simeq m\frac{\delta v_2'}{u}$$

$$\delta m = \delta m_1' + \delta m_2' = \frac{m}{u}\left(\delta v_1' + \delta v_2'\right)$$

$$= \frac{m}{u}\left[\sqrt{\frac{gR^2}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}}-1\right) + \sqrt{\frac{gR^2}{r_2}}\left(1-\sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right)\right]$$

$$= \frac{mR\sqrt{g}}{u}\left[\sqrt{\frac{2r_2}{(r_1+r_2)r_1}} - \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} - \sqrt{\frac{2r_1}{r_2(r_1+r_2)}}\right]$$

$$= \frac{mR\sqrt{g}}{u}\left[\sqrt{\frac{2r_2}{r_1(r_1+r_2)}}\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right) - \frac{1}{\sqrt{r_1}}\left(1-\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right)\right]$$

$$= \frac{mR\sqrt{g}}{u\sqrt{r_1}}\left(1-\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right)\left[\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}}\left(1+\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right) - 1\right]$$

$$= \frac{mR\sqrt{g}}{u\sqrt{r_2}}\left[\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right]$$

$$= \frac{mR\sqrt{2g}}{u\sqrt{r_1+r_2}}\left(1-\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right) = \frac{m\sqrt{gR}}{u}\sqrt{\frac{2R}{r_1+r_2}}\left(1-\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right)$$

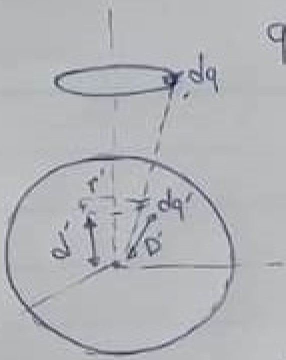
$$= \frac{\sqrt{10\times 6.4\times 10^6}\ \mathrm{m/s}}{7.2\times 10^4\ \mathrm{m/s}} = \frac{8.0\times 10^3}{7.2\times 10^4} = \frac{1}{9}$$

$$\delta m = \frac{1}{9}m\sqrt{\frac{6.4\times 10^6\ \mathrm{m}\times 2}{18\times 10^6\ \mathrm{m}}}\left[\sqrt{\frac{10}{18}} - \sqrt{\frac{8}{18}}\right] \simeq 14.8\ \mathrm{kg}$$

۲- زاویه بین ۱ و ۲، حضیض = ۳۴

• سوال ۳ (روز اول)

الف) می‌دانیم بار تصویر یک بار نقطه q که در فاصله D از مرکز یک کره قرار دارد برابر است با



$$q' = -\frac{R}{D}q$$

و در سمت آن در فاصله‌ی $D' = R^2/D$ قرار دارد. در حلقه مورد نظر فاصله‌ی
همه المان‌های بار از مرکز کره $D = \sqrt{R^2/4 + d^2}$ می‌باشد
بنابراین اگر المان dq از حلقه را در نظر بگیریم داریم:

$$dq' = -\frac{R}{D}\,dq \qquad D' = \frac{R^2}{D}$$

با توجه به D' برای همه المان‌ها یکسان است بنابراین تصویر هم یک حلقه است.

$$\text{تشابه} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{r'}{R/2} = \dfrac{D'}{D} = \dfrac{R^2}{D^2} \rightarrow r' = \dfrac{R^3}{2D^2} = \dfrac{2R^3}{R^2+4d^2} \\[2ex] \dfrac{d'}{d} = \dfrac{D'}{D} = \dfrac{R^2}{D^2} \rightarrow d' = d\left(\dfrac{R^2}{D^2}\right) = \dfrac{4R^2}{R^2+4d^2}\,d \end{cases}$$

بنابراین تصویر حلقه‌ای به شعاع r' می‌باشد که هم‌راستای حلقه اول است و در فاصله d' از مرکز کره قرار دارد

ب)

$$Q' = \int dq' = \int -\frac{R}{D}\,dq = -\frac{R}{D}Q = -\frac{2R}{\sqrt{R^2+4d^2}}Q$$

$$\lambda' = \frac{Q'}{2\pi R'} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-2RQ}{\sqrt{R^2+4d^2}}\right)\left(\frac{R^2+4d^2}{2R^3}\right) = \frac{-Q\sqrt{R^2+4d^2}}{2\pi R^2}$$

$$\Rightarrow \lambda' = -\frac{\lambda}{R}\sqrt{R^2+4d^2}$$

(2)

ب)

$$\vec{P}=\int \vec{r}\,dq=\int_{\text{حلقه}} \vec{r}\,dq+\int_{\text{حلقه تصویر}} \vec{r}\,dq$$

برای دو حلقه مولفه‌ی مختلف x و y صفر و روی محور z

$$\Rightarrow P=\int_0^{2\pi}\left(\frac{R}{2}\cos\theta,\ \frac{R}{2}\sin\theta,\ d\right)\cdot dq$$

$$=\left(\frac{R}{2}\int_0^{2\pi}\cancel{\cos\theta}\,dq\right)\hat{i}+\left(\frac{R}{2}\int_0^{2\pi}\cancel{\sin\theta}\,dq\right)\hat{j}+\left(d\int_0^{2\pi}dq\right)\hat{k}$$

$$=dQ\,\hat{k}$$

به همین ترتیب برای حلقه تصویر $\vec{P}=d'Q'\hat{k}$

$$\Rightarrow \vec{P}=(dQ+d'Q')\hat{k}=\left(Qd+\left(\frac{-2RQ}{\sqrt{R^2+4d^2}}\right)\left(\frac{4R^2}{R^2+4d^2}\right)\right)\hat{k}$$

$$=Qd\left(1-\frac{8R^3}{(R^2+4d^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\hat{k}$$

$$Q_{ij}=\int x_i x_j\,dq \quad , \quad dq=\lambda\,dl=\lambda R\,d\theta$$

برای حلقه با $\frac{R}{2}$, Q $\Rightarrow Q_{xx}=\int x^2 dq=\int \frac{R^2}{4}\cos^2\theta\,dq$

$$=\frac{R^2}{4}\int\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)dq=\frac{R^2}{8}\int_0(1+\cos 2\theta)\,\lambda R\,d\theta$$

$$=\lambda R^3/8\left(\int_0^{2\pi}d\theta+\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\,d\theta\right)=2\pi\lambda\,R^3/8=\frac{R^2}{8}Q$$

$$Q_{yy}=\frac{R^2}{8}Q$$ با توجه به تقارن بین x و y

$$Q_{zz} = \int z^2\, dq = \int d^2\, dq = d^2 \int dq = d^2 Q$$

$$Q_{xz} = \int xz\, dq = \int \left(\frac{R}{2}\cos\theta\right)(d)(\lambda R\, d\theta) = \lambda \frac{R^2}{2} d \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta}_{=0}$$

به همین ترتیب $Q_{yz} = 0$

$$Q_{xy} = \int \left(\frac{R}{2}\sin\theta\right)\left(\frac{R}{2}\cos\theta\right) \lambda R\, d\theta = \lambda \frac{R^3}{4} \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = 0$$

بنابراین Q_{ij} تنها مولفه های قطری دارد.

$$[Q_{ij}] = [Q_{ij}]_{\text{حلقه}} + [Q_{ij}]_{\text{تصویر}} = Q\begin{pmatrix} R^2/8 & & 0 \\ & R^2/8 & \\ 0 & & d^2 \end{pmatrix} + Q'\begin{pmatrix} r'^2/2 & & \\ & r'^2/2 & \\ & & d'^2 \end{pmatrix}$$

$$= Q\begin{pmatrix} R^2/8 & & 0 \\ & R^2/8 & \\ 0 & & d^2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{2RQ}{\sqrt{R^2+4d^2}}\right)\begin{pmatrix} \frac{2R^6}{(R^2+4d^2)^2} & & \\ & \frac{2R^6}{(R^2+4d^2)^2} & \\ & & \frac{16R^4d^2}{(R^2+4d^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{Q}{8}\begin{pmatrix} R^2 & & 0 \\ & R^2 & \\ 0 & & 8d^2 \end{pmatrix} - \frac{4R^5 Q}{(R^2+4d^2)^{5/2}}\begin{pmatrix} R^2 & & \\ & R^2 & \\ & & 8d^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{Q}{8}\left(1 - \frac{32R^5}{(R^2+4d^2)^{5/2}}\right)\begin{pmatrix} R^2 & & 0 \\ & R^2 & \\ 0 & & 8d^2 \end{pmatrix}$$

ت)

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^5}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right)Q_{ij}\right)$$

جمله اول تک قطبی $V^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q+Q'}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\left(Q - \frac{2RQ}{\sqrt{R^2+4d^2}}\right)$

جمله ۲ قطبی $V^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}(\vec{p}\cdot\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(Qd + Q'd'\right)\hat{k}\cdot r$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qd}{r^2}\left(1 - \frac{8R^3}{(R^2+4d^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\cos\theta$$

جمله ۴ قطبی $V^{(4)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r^5}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right)Q_{ij}$

چون Q_{ij} قطری است داریم

$$V^{(4)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r^5}\left(\sum_{i=1}^{3}(3x_i^2 - r^2)Q_{ii}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r^5}\left\{(3x^2-r^2)Q_{xx} + (3y^2-r^2)Q_{yy} + (3z^2-r^2)Q_{zz}\right)$$

$$Q_{xx} = Q_{yy} \Rightarrow V^{(4)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r^5}\left\{\left(3\underbrace{\cancel{(x^2+y^2)}}^{r^2-z^2} - 2r^2\right)Q_{xx} + (3z^2-r^2)Q_{zz}\right\}$$

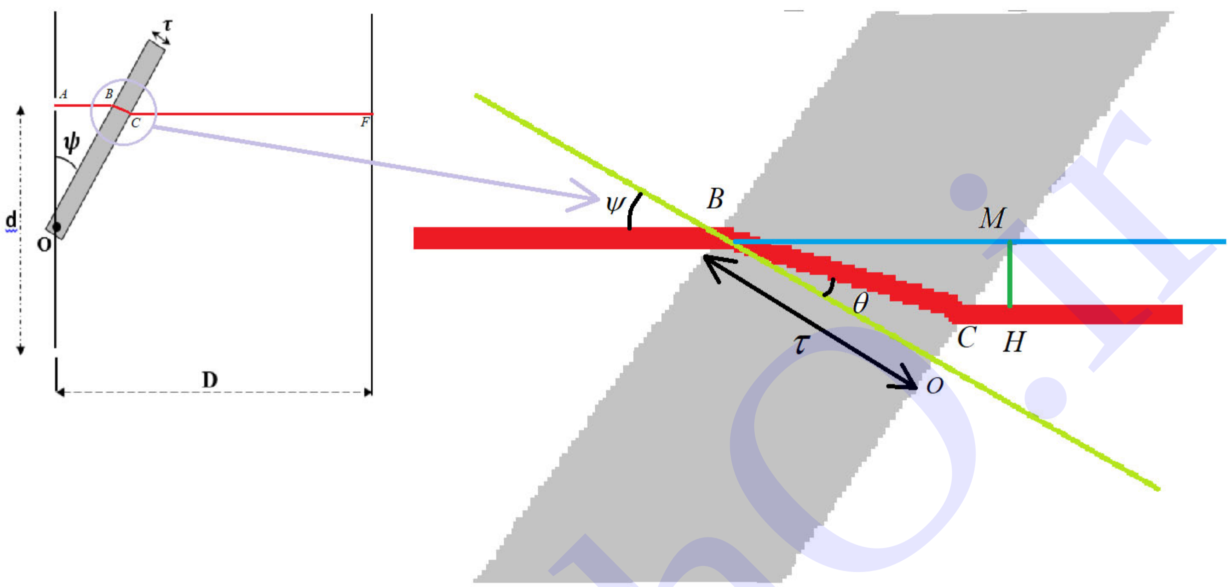
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r^5}\left\{(r^2-3z^2)Q_{xx} + (3z^2-r^2)Q_{zz}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r^5}(r^2-3z^2)(Q_{xx}-Q_{zz})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r^5}(r^2-3z^2)\frac{Q}{8}\left(1 - \frac{32R^5}{(R^2+4d^2)^{5/2}}\right)(R^2-8d^2)$$

امتحان روز اول،

سوال ۴)



الف)

تغییر راه نوری برابر است با $\Delta L=\overline{AB}+\overline{CF}+n\,\overline{BC}-D=n\,\overline{BC}+\overline{CH}-\overline{BM}$ حال برای حساب کردن آن باید مقداری هندسه بکار ببریم.

از قانون اسنل دکارت می‌دانیم، $\frac{\sin\psi}{\sin\theta}=n$.

$$\overline{BC}=\frac{\tau}{\cos\theta}\quad,\ \overline{BM}=\frac{\tau}{\cos\psi}\ ,\ \overline{CH}=\overline{CM}\sin\psi\,,$$

$$\overline{CM}=\overline{OM}-\overline{OC}=\tau(\tan\psi-\tan\theta)\Rightarrow$$

$$\overline{CH}=\tau\sin\psi\,(\tan\psi-\tan\theta)=\tau\sin^2\psi\left(\frac{1}{\cos\psi}-\frac{1}{n\ \cos\theta}\right)$$

$$\begin{aligned}\Delta L&=\tau\left(\frac{n}{\cos\theta}-\frac{\sin^2\psi}{n\ \cos\theta}+\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}-\frac{1}{\cos\psi}\right)\\&=\tau\left(n\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)-\left(\frac{1-\sin^2\psi}{\cos\psi}\right)\right)=\tau(n\cos\theta-\cos\psi)\\&=\tau\left(\sqrt{n^2-\sin^2\psi}-\cos\psi\right)\end{aligned}$$

ب) پرتو به اندازه‌ی

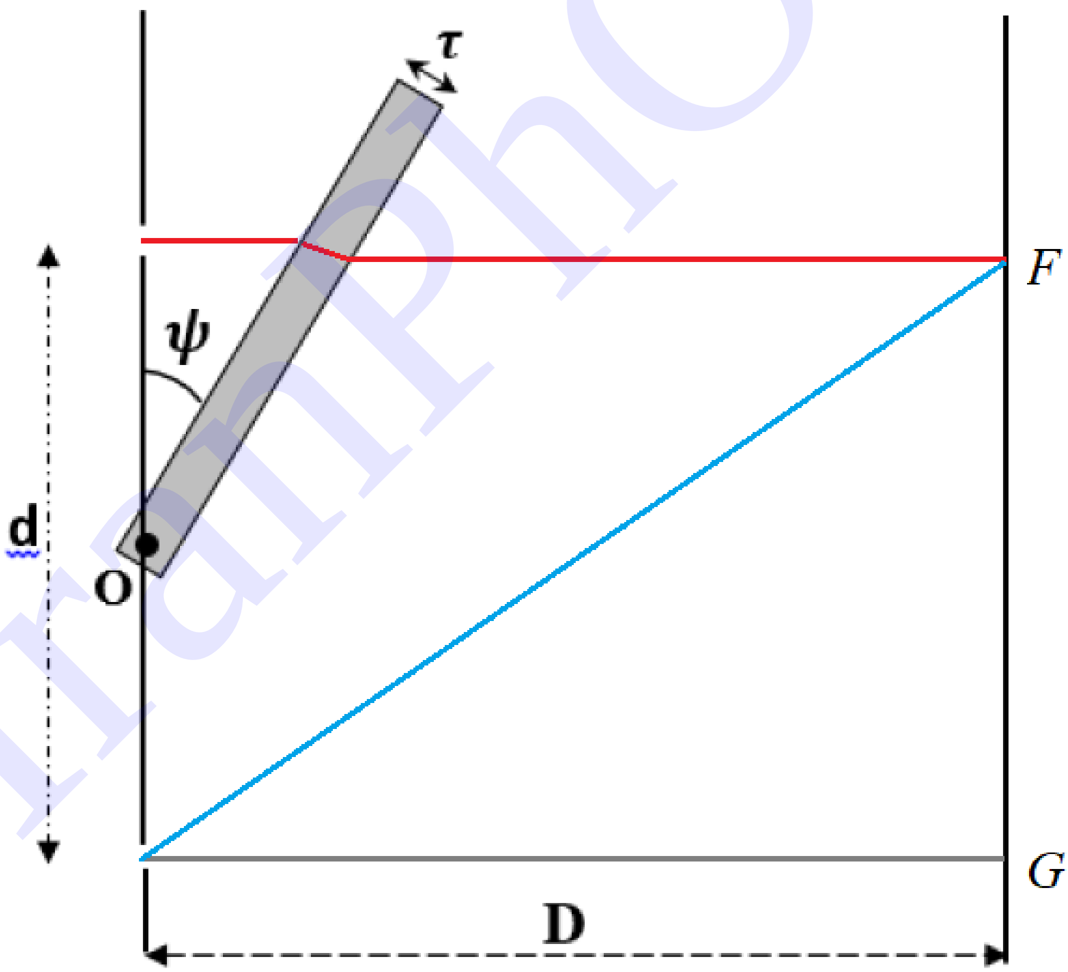
$$\boxed{\Delta L(\psi) = \tau\left(\sqrt{n^2 - \sin^2\psi} - \cos\psi\right)}$$

$$\overline{MH} = \overline{CM}\cos\psi = \tau\sin\psi\left(1 - \frac{\cos\psi}{\sqrt{n^2 - \sin^2\psi}}\right) \Rightarrow d_{eff} = d - \overline{MH}$$

در نتیجه فاصله موثر برابر است با:

$$\boxed{d_{eff} = d - \tau\sin\psi\left(1 - \frac{\cos\psi}{\sqrt{n^2 - \sin^2\psi}}\right)}$$

پ)



ما چون سرعت فریزها را در نقطه‌ی F می‌خواهیم، اول باید یک نقطه بسیار نزدیک F در نظر بگیریم آنرا همراه فریزها حرکت دهیم، و سپس آن نقطه را روی نقطه‌ی F قرار می‌دهیم. ما فاصله‌ی این نقطه را تا نقطه‌ی G با y نشان می‌دهیم. برای بدست آوردن نتیجه، در انتها باید، $y = \overline{GF} = d_{eff}$ قرار دهیم.

از آنجا که نقطه‌ای که می‌خواهیم محاسبات را برای آن انجام دهیم، بسیار نزدیک به نقطه‌ی F است، راه نوری پرتوی بالایی برابر $L_1 = D + \Delta L(\psi)$ می‌شود و راه نوری پرتوی پایینی برابر است با:

$$L_2 = \sqrt{D^2 + y^2} = D\sqrt{1 + \frac{y^2}{D^2}} \overset{y \cong d_{eff} < d \ll D}{\cong} D + \frac{y^2}{2D}$$

در نتیجه اختلاف راه نوری دو پرتو در نزدیک نقطه‌ی F برابر است با:

$$\delta L = L_1 - L_2 = \Delta L(\psi) - \frac{y^2}{2D}$$

اگر با فریز همراه باشیم، یعنی مثلا همراه بیشینه یا کمینه حرکت کنیم، باید فاز و در نتیجه اختلاف راه نوری دو پرتو ثابت باشد. یعنی $\frac{d\delta L}{dt} = 0$ پس برای نقطه‌ی F: $\frac{d}{dt}\big(\Delta L(\psi)\big) - \frac{y}{D}\frac{dy}{dt} = 0$ و $\frac{dy}{dt}$ سرعت فریز است.

در نتیجه سرعت فریز در نقطه‌ی F (v_F) برابر است با:

$$v_F = \frac{D}{d_{eff}}\frac{d}{dt}\big(\Delta L(\psi)\big) = \frac{D}{d_{eff}}\tau \sin\psi\left(1 - \frac{\cos\psi}{\sqrt{n^2 - \sin^2\psi}}\right)\frac{d\psi}{dt}$$

$$\boxed{v_F = \frac{D\tau\sin\psi\left(۱ - \frac{\cos\psi}{\sqrt{n^۲ - \sin^۲\psi}}\right)\beta}{d - \tau\sin\psi\left(۱ - \frac{\cos\psi}{\sqrt{n^۲ - \sin^۲\psi}}\right)}}$$

از آنجا که $\frac{\cos\psi}{\sqrt{n^۲-\sin^۲\psi}} < ۱$ است و β مثبت است، و از $d > \tau$ نتیجه می‌شود که d_{eff} مثبت است، در نتیجه v_F مثبت است یعنی سرعت فریزها رو به بالا است.

سوال پنجم آزمون ۱:

الف)

نقطه ۱ $\begin{cases} T_1 = 300k \\ P_1 = 1atm = 10^5\ pa \\ V_1 = ? \end{cases}$

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT \Rightarrow V_1 = \frac{m}{M}\frac{RT_1}{P_1} = \frac{1000}{29} \times \frac{8.3 \times 300}{10^5} = 0.86\ m^3$$

نقطه ۲ $\begin{cases} T_2 = 4T_1 = 1200k \\ P_2 = P_1 \\ V_2 = ? \end{cases}$

$$\frac{\cancel{P_1} V_1}{T_1} = \frac{\cancel{P_2} V_2}{T_2} \Rightarrow V_2 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)V_1 = 3.44\ m^3$$

نقطه ۳ $\begin{cases} V_3 = V_1 = ? \\ T_3 = T_2 = 1200k \\ P_3 = ? \end{cases}$

$$\frac{P_2 V_2}{\cancel{T_2}} = \frac{P_3 V_3}{\cancel{T_3}} \Rightarrow P_3 = P_2\left(\frac{V_2}{V_3}\right) = 4P_2 = 4\ atm$$

	نقطه ①	نقطه ②	نقطه ③
P(atm)	1	1	4
V(m³)	0.86	3.44	0.86
T(k)	300	1200	1200

مجموعاً قسمت الف (۲,۵ نمره)

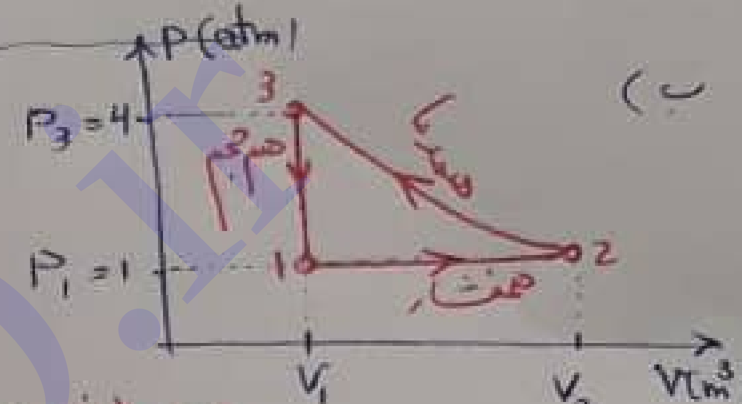
ب)

$$Q_{1\to 2} = mC_p(T_2 - T_1) = 1(1)(1200 - 300) = 900\ kJ$$

$$W_{1\to 2} = P_1(V_2 - V_1) = 3P_1V_1 = 258\ kJ$$

$$\Delta U_{1\to 2} = Q_{1\to 2} - W_{1\to 2} = 642\ kJ$$

۰,۵ نمره



(۱,۵ نمره)

$$Q_{2\to 3} = W_{2\to 3} = \int P dV = \frac{mRT_2}{M}\int_{V_2}^{V_3}\frac{dV}{V} = \frac{1000}{29} \times 8.3 \times 1200 \underbrace{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}_{-2\ln 2} = -473.96\ kJ$$

$\Delta U_{2\to 3} = 0$ هم‌دما

۰,۵ نمره

$$\Delta U_{3\to 1} = Q_{3\to 1} = mC_v(T_1 - T_3) = 1(0.72)(300 - 1200) = -648\ kJ$$

$W_{3\to 1} = 0$

۰,۵ نمره

ج)

$$dS = \frac{dQ}{T} \Rightarrow \Delta S = C_p\int\frac{dT}{T} \Rightarrow S_2 = S_1 + C_p\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 1.48\ kJ/kgk$$

C_p با واحد kJ/kgk

۰,۵ نمره

$$S_3 = S_2 + \frac{m}{M}R\frac{\cancel{T}}{\cancel{T}}\int_{V_2}^{V_3}\frac{dV}{V} = 1.48 + \frac{1000}{29}(8.3)\ln\left(\frac{1}{4}\right) = 1.87\ kJ/kgk$$

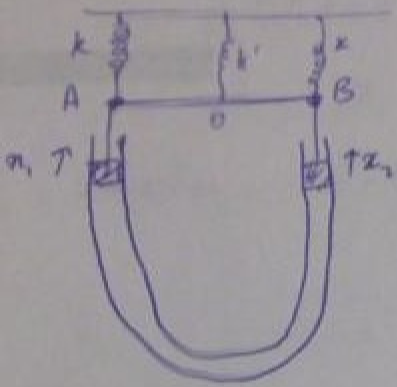
(۱)

$$S_1 = S_3 + C_v\int_{T_3}^{T_1}\frac{dT}{T} = S_3 + 0.72\ln\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow S_3 = 0.1 + 0.72(2\ln 2) = 1.09\ kJ/kgk$$

0.72 با واحد kJ/kgk

اختلاف به واسطه این است که $C_p - C_v \neq nR$ که به واسطه عدد اولیه و تقریب‌های بکار رفته در ... رخ داده ...

حل مسئله دوم فاینال چهل نوزده ۹۹



۵

آ - از طرف میله AB روی هر کدام از
رانشگ ها نیروی $-\frac{1}{2}k'x_0$ وارد می شود
(طبق شرط تعادل اهرم و صفر بودن جمع
نیروهایی که به میله وارد می شود. به جای
شرط تعادل اهرم می شود از برابری گشتاورها
یاد کرد). چون $x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ نسبت برابر

$$m\ddot{x}_1=-kx_1-\frac{1}{4}k'(x_1+x_2)+F_1$$
$$m\ddot{x}_2=-kx_2-\frac{1}{4}k'(x_1+x_2)+F_2$$

پیشنهاد: از یک نمره برای ضریب $-\frac{1}{4}k'$ و دو نمره برای ضریب $\frac{\gamma P_0 S}{V}$ و بقیه برای کل حل باشد

که F_1 و F_2 نیروی وارد شده از طرف گاز بر پیستون ست

$$F_1=F_2=PS-P_0S \quad . \quad PV^{\gamma}=P_0V_0^{\gamma}$$

طول لوله :

$$\Rightarrow PS^{\gamma}\ell^{\gamma}=P_0S^{\gamma}\ell_0^{\gamma} \qquad \ell=\ell_0+x_1+x_2$$

$$\Rightarrow P\left(1+\frac{x_1+x_2}{\ell_0}\right)^{\gamma}=P_0 \Rightarrow P\left(1+\gamma\frac{x_1+x_2}{\ell_0}\right)\simeq P_0$$

$$P=P_0\left(1-\gamma\frac{x_1+x_2}{\ell_0}\right) \Rightarrow P-P_0\simeq\frac{-\gamma P_0}{\ell_0}(x_1+x_2)$$

$$P-P_0=-\frac{\gamma P_0 S}{V_0}(x_1+x_2)$$

$$m\ddot{x}_1=-kx_1-\left(\frac{1}{4}k'+\frac{\gamma P_0 S^2}{V_0}\right)(x_1+x_2)$$
$$m\ddot{x}_2=-kx_2-\left(\frac{1}{4}k'+\frac{\gamma P_0 S^2}{V_0}\right)(x_1+x_2)$$

با فرض $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ و $\Omega^2=\frac{1}{m}\left(\frac{k'}{4}+\frac{\gamma P_0 S}{V_0}\right)$ داریم

$$\begin{cases}\ddot{x}_1+\omega_0^2x_1+\Omega^2(x_1+x_2)=0\\ \ddot{x}_2+\omega_0^2x_2+\Omega^2(x_1+x_2)=0\end{cases}$$

ـ ب ـ

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad x_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

۲

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2) a_1 + \Omega^2 a_2 = 0 \\ \Omega^2 a_1 + (-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2) a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{-\Omega^2}{\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2} = \frac{-(-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2)}{\Omega^2}$$

$$(\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2)^2 - \Omega^4 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + \Omega^2 \pm \Omega^2$$

$$\omega'^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{-\Omega^2}{-\Omega^2} = 1$$

$$\omega''^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{-\Omega^2}{\Omega^2} = -1$$

$$x_1 = a \cos(\omega' t + \varphi) + b \cos(\omega'' t + \varphi')$$

$$x_2 = a \cos(\omega' t + \varphi) - b \cos(\omega'' t + \varphi')$$

ب ۲

$$\dot{x}_1 = -a\omega' \sin(\omega' t + \varphi) - \omega'' b \sin(\omega'' t + \varphi')$$

$$\dot{x}_2 = -a\omega' \sin(\omega' t + \varphi) + \omega'' b \sin(\omega'' t + \varphi')$$

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \;,\; \begin{matrix} x_1(0) = A \\ x_2(0) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -a\omega' \sin\varphi - b\omega'' \sin\varphi' = 0 \\ -a\omega' \sin\varphi + b\omega'' \sin\varphi' = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi' = 0 \qquad \begin{matrix} A = a + b \\ 0 = a - b \end{matrix} \Rightarrow a = b = \frac{A}{2}$$

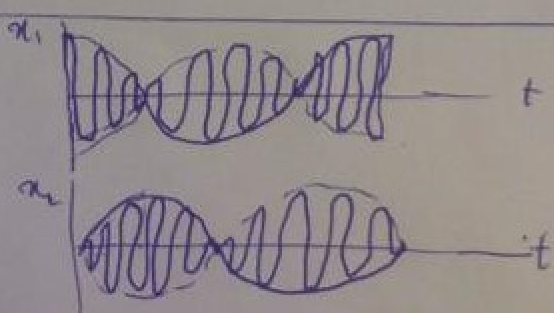
$$\begin{cases} x_1 = \frac{A}{2}(\cos\omega' t + \cos\omega'' t) = A \cos\left(\frac{\omega' - \omega''}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega' + \omega''}{2} t\right) \\ x_2 = \frac{A}{2}(\cos\omega' t - \cos\omega'' t) = -A \sin\left(\frac{\omega' - \omega''}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega' + \omega''}{2} t\right) \end{cases}$$

پ ۱

$$\omega'' - \omega' << \omega'' \Rightarrow$$

$$\Omega^2 << \omega_0^2 \Rightarrow$$

$$k' << k, \quad \frac{P_0 S^2}{V} << k$$



(1)

سؤال ۲ - راند دوم :

الف) در تماس کامل بین کره و الکترودها، با توجه به اینکه کره و صفحه الکترودها هم‌پتانسیل می‌شوند

$$V_1 = V_2 \Rightarrow P_{11} q_1 + P_{12} q_2 = P_{21} q_1 + P_{22} q_2$$

$$\Rightarrow P_{11} q + (Q-q) P_{12} = P_{21} q + (Q-q) P_{22}$$

$$\Rightarrow q (P_{11} - P_{12} - P_{21} + P_{22}) = Q (P_{22} - P_{12})$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{q} = \frac{P_{11} - P_{12} + P_{22} - P_{21}}{P_{22} - P_{12}} = \frac{P_{11} - P_{12}}{P_{22} - P_{12}} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{P_{11} - P_{12}}{P_{22} - P_{12}} = \frac{Q}{q} - 1 \qquad (1)$$

فرض کنید در مرحله n ام بار q_n روی کره جمع شود.

$$\Rightarrow V_1^{(n)} = V_2^{(n)} \Rightarrow P_{11} q_n + P_{12} (Q + q_{n-1} - q_n) = P_{21} q_n + P_{22} (Q + q_{n-1} - q_n)$$

$$\Rightarrow \frac{P_{11} - P_{12}}{P_{22} - P_{12}} = \frac{Q + q_{n-1}}{q_n} \qquad (2)$$

$$(2),(1) \Rightarrow \frac{Q + q_{n-1}}{q_n} = \frac{Q}{q} - 1 \Rightarrow q_n = q + \frac{q}{Q} q_{k-1}$$

بار کل جمع شده $= q + \frac{q^2}{Q} + \frac{q^3}{Q^2} + \dots \Rightarrow q \left(1 + \frac{q}{Q} + \frac{q^2}{Q^2} + \dots \right)$

$$= q \frac{1}{1 - \frac{q}{Q}} = \frac{qQ}{Q - q}$$

سؤال ۲ (مرحله دوم) ۲

ب) با توجه به اینکه کره‌ها مشابه‌اند، فاصله بین هر ۲ تای آن‌ها نیز یکسان است داریم.

$$\begin{cases} P_{11} = P_{22} = P_{33} = P_{44} = P \\ P_{12} = P_{13} = P_{14} = P_{23} = P_{24} = P_{34} = P' \end{cases}$$

وقتی کره (۱) و (۲) را به هم متصل می‌کنیم هم پتانسیل می‌شوند

$$V_1 = V_2 \Rightarrow P_{11} q_1 + P_{12} q_2 + P_{13} q_3 + P_{14} q_4 = P_{21} q_1 + P_{22} q_2 + P_{23} q_3 + P_{24} q_4$$

$$q_3 = q_4 = 0 \Rightarrow P_{11} q_1 + P_{12} q_2 = P_{21} q_1 + P_{22} q_2$$

$$\Rightarrow P q_1 + P' q_2 = P' q_1 + P q_2 \Rightarrow q_1 (P - P') = q_2 (P - P')$$

$$\Rightarrow q_1 = q_2 \quad \& \quad \underbrace{q_1 + q_2 = Q}_{\text{کل بار}} \Rightarrow \boxed{q_1 = q_2 = \frac{Q}{2}}$$

بنابراین در حالت تعادل بار با وجود اتصال به طور مساوی بین ۲ کره توزیع می‌شود

پس بعد از اتصال به کره‌های ۳، ۴ بار هرکدام از کره‌ها به صورت زیر می‌شود.

$$Q_2 = \frac{Q}{2} \qquad Q_3 = \frac{Q}{4} \qquad Q_4 = \frac{Q}{8}$$

وقتی کره (۱) را به زمین وصل می‌کنیم $V_1 = 0$

$$\Rightarrow 0 = P Q_1^* + P' \frac{Q}{2} + P' \frac{Q}{4} + P' Q/8$$

$$\Rightarrow P Q_1^* = - P' \frac{7Q}{8} \Rightarrow Q_1^* = - Q_0 = - \frac{P'}{P} \left(\frac{7Q}{8} \right)$$

لذا ظرفیت برای تک کره داریم: $V = P_{11} Q$ و در حالتی تولید داریم.

$$V = PQ \Rightarrow P = V/Q \Rightarrow P' = \frac{8Q_0 P}{7Q} = \frac{8VQ_0}{7Q^2}$$

برای به دست آوردن ضرایب ظرفیت، القا می‌دانیم.

$$[P] = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots \\ P_{21} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \qquad [C] = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots \\ C_{21} & \cdots & \end{pmatrix}$$

$$[P][C] = I$$

با توجه به تقارن داریم

$$= C_{13} = C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{23} = C' \ , \ C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_{44} = C$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} P & P' & P' & P' \\ P' & P & P' & P' \\ P' & P' & P & P' \\ P' & P' & P' & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & C' & C' & C' \\ C' & C & C' & C' \\ C' & C' & C & C' \\ C' & C' & C' & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow PC + 3P'C' = 1 \ , \ PC' + P'C + 2P'C' = 0$$

$$\begin{cases} PC + 3P'C' = 1 \\ P'C + (P + 2P')C' = 0 \end{cases} \Rightarrow C = \frac{P + 2P'}{P(P - 3P')} \ , \ C' = \frac{-P'}{P(P - 3P')}$$

جایگذاری شود

$$C' = \frac{56 Q_0 Q^2}{V(24Q_0 + 7Q)(8Q_0 - 7Q)}$$

سوال سوم آزمون روز دوم

An earthing electrode has been made out of a perfectly conducting metal hemisphere of radius R_e, and it has been buried in soil with its flat face flush with the earth surface. If the soil is assumed to be isotropic with constant resistivity ρ, show that the resistance between the electrode and the earth is given by

$$\frac{\rho}{2\pi R_e}.$$

Sol. See Fig. 4.15. Symmetry considerations indicate that the current in the electrode will be purely radial. Let us now consider an imaginary hemispherical shell of radius r and thickness δr, concentric with the metal hemisphere. The current through this surface would be the same as that leaving the metal electrode.

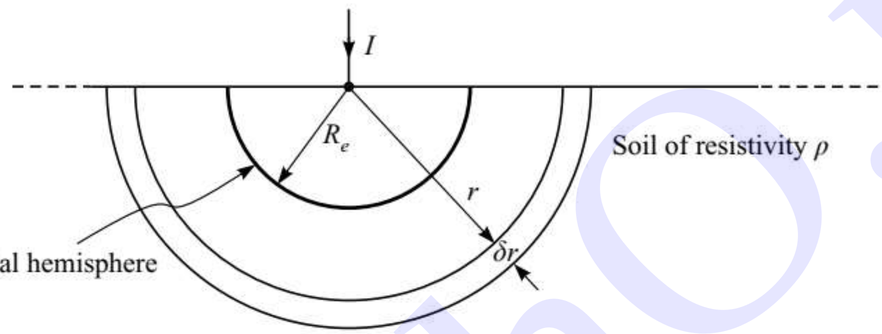


Fig. 4.15 An earthing electrode buried flush with the surface of the earth.

∴ The current density over this surface is

$$J_r = \frac{I}{2\pi r^2} = \frac{E_r}{\rho}$$

∴ $$E_r = \left(\frac{\rho I}{2\pi}\right)\frac{1}{r^2}$$

Hence, the potential of the hemisphere will be

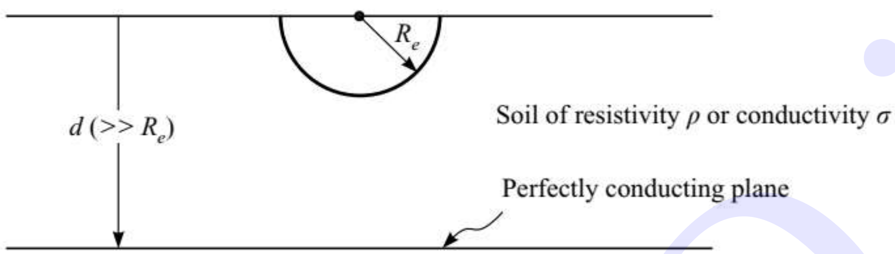
$$V = -\int_{\infty}^{R_e} E_r dr = \frac{\rho I}{2\pi R_e}$$

∴ Resistance, $R = \dfrac{V}{I} = \dfrac{\rho}{2\pi R_e}$

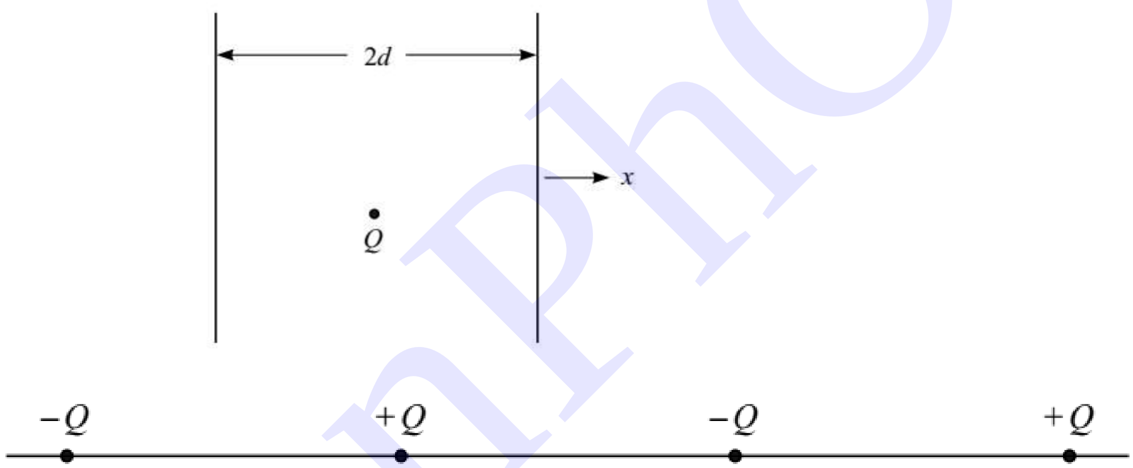
If in Problem 4.16, there is now a perfectly conducting plane parallel to the outer surface at a depth d ($d >> R_e$) and extending to infinity, find the resistance of the system.

Sol. See Fig. 4.16. We solve this problem by solving the problem of capacitance of a sphere of radius R, positioned centrally between the two earthed parallel planes, which are $2d$ apart.

$$\therefore \qquad E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2d-x)^2} - \frac{1}{(2d+x)^2} + \frac{1}{(4d-x)^2} - \frac{1}{(4d+x)^2} + \cdots\right\}$$



(a) Hemisphere and the conducting plane



(b) Image system

دقت کنید که معادل قرار دادن یک نیم کره با یک بار نقطه ای کاملا غلط است. بسیاری از شرکت کنندگان در آزمون بر اساس چنین استدلال غلطی سوال را حل کرده بودند

Hence,

$$\text{P.D., } V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\frac{1}{x}+\frac{1}{2d-x}+\frac{1}{2d+x}-\frac{1}{4d-x}-\frac{1}{4d+x}+\cdots\right\}_R^d$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{R}\right)+\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{2d-R}\right)+\left(\frac{1}{3d}-\frac{1}{2d+R}\right)-\left(\frac{1}{5d}-\frac{1}{4d+R}\right)+\cdots\right\}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{R}-\frac{1}{2d-R}-\frac{1}{2d+R}+\frac{1}{4d+R}+\frac{1}{4d-R}+\cdots\right\}$$

$$\simeq \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{R}-\frac{1}{d}+\frac{1}{2d}-\frac{1}{3d}+\frac{1}{4d}+\cdots\right\}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left\{1-\frac{R}{d}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)\right\}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left\{1-\frac{R}{d}\ln 2\right\}$$

$\therefore$ $$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_e}{\left(1-\frac{R_e}{d}\ln 2\right)},$$ R_e here is the radius of the hemisphere.

Now, $CR_1 = \varepsilon\rho = \dfrac{\varepsilon}{\sigma}$, where ε and σ are constants and R_1 is the resistance of the system.

$\therefore$ $$R_1 = \frac{\varepsilon_0}{\sigma C}$$

But in the present problem,

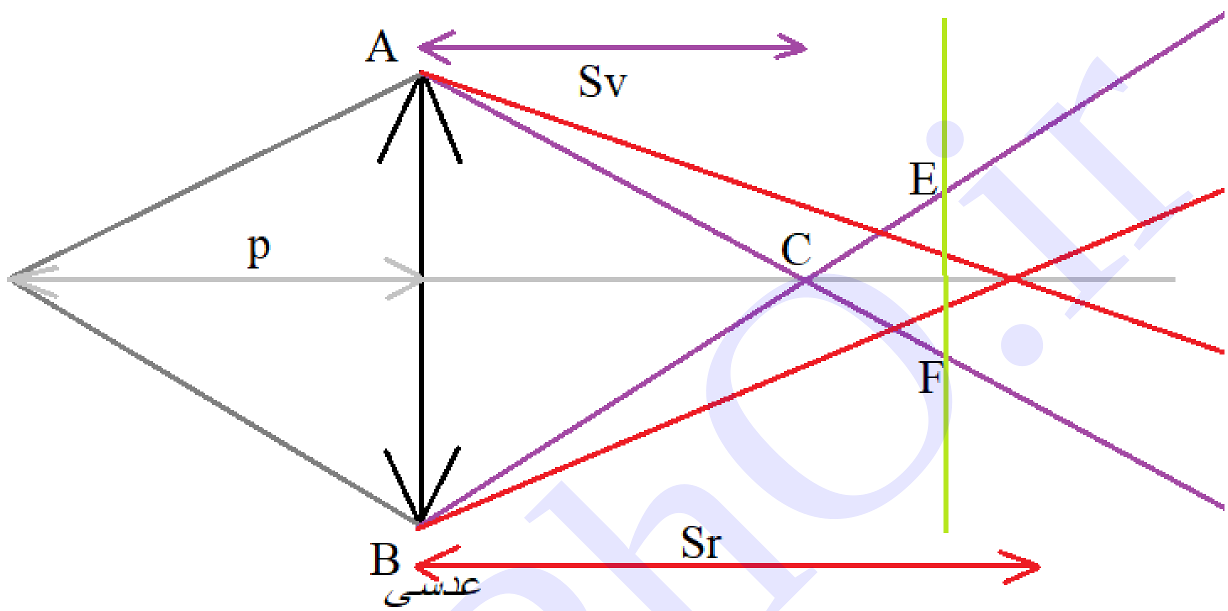
$$R_1 = \frac{2\varepsilon_0}{\sigma C}$$

because in the original problem, we have the hemisphere only and not the complete sphere.

$\therefore$ $$\text{Resistance, } R_1 = \frac{1}{2\pi\sigma R_e}\left(1-\frac{R_e}{d}\ln 2\right)$$

امتحان روز دوم،

سوال ۴) ۴-۱)



از رابطه‌ی گوس در عدسی‌های نازک می‌دانیم: $\frac{1}{f_r}=\frac{1}{S_r}+\frac{1}{p}$ و $\frac{1}{f_V}=\frac{1}{S_V}+\frac{1}{p}$ دایره‌ی رنگی ایجاد شده در انتها به یکی از دو رنگ قرمز یا بنفش (چون بیشترین و کمترین ضریب شکست را دارند) منتهی می‌شود پس برای بدست آوردن قطر دایره‌ی رنگی کافی است قطر دو دایره‌ی بنفش، d_V، و قرمز، d_r، را محاسبه کرد و بیشترین این دو، قطر دایره‌ی رنگی است.

اول مثلا قطر دایره‌ی بنفش را محاسبه می‌کنیم. اگر $q > S_V$ باشد، از تشابه مثلث‌های ABC و FECداریم:

$$\frac{d_V}{D}=\frac{q-S_V}{S_V}=\frac{q}{S_V}-1=q\left(\frac{1}{f_V}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$$

و اگر $q < S_V$ باشد، از تشابه مثلث‌های ABC و FECداریم:

$$\frac{d_V}{D}=\frac{S_V-q}{S_V}=1-\frac{q}{S_V}=-q\left(\frac{1}{f_V}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$$

این دو رابطه را می‌توان با استفاده از تابع قدر مطلق، به صورت: $d_V = q\,D\left|\left(\frac{1}{f_V}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right|$ نوشت و برای دایره‌ی قرمز داریم: $d_r = q\,D\left|\left(\frac{1}{f_r}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right|$. در نتیجه قطر دایره‌ی رنگی، d، بیشینه‌ی این دو قطر است: (جواب قسمت الف)

$$d = Max(d_V, d_r) = q\,D\,Max\left(\left|\left(\frac{1}{f_V}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right|,\left|\left(\frac{1}{f_r}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right|\right)$$

ب) در حالتی قطر دایره‌ی رنگی کمینه است که قطر دایره‌های قرمز و بنفش با هم برابر شوند، در نتیجه:

$$\left|\left(\frac{1}{f_V}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{f_r}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right|$$

و از آنجا که فاصله‌ی کانونی قرمز و بنفش با هم برابر نیست، پس در این تساوی جمله‌ی داخل قدر مطلق برای یکی از این دو رنگ (رنگ بنفش) مثبت و برای دیگری (رنگ قرمز) منفی است. در نتیجه:

$$\left(\frac{1}{f_V}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) = -\left(\frac{1}{f_r}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_r}+\frac{1}{f_V}\right)-\frac{1}{p} \Rightarrow q = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_r}+\frac{1}{f_V}\right)-\frac{1}{p}}$$

پ) برای اینکه تصویر یک طول موج با فاصله‌ی کانونی f_O در همین نقطه باشد، داریم: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f_O}$ که ما در بالا بدست آوردیم: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_r}+\frac{1}{f_V}\right)$ در نتیجه داریم: $\frac{1}{f_O}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_r}+\frac{1}{f_V}\right)$. از آنجا که از فرمول عدسی سازان داریم، $\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ که R_1 و R_2 شعاع انحنای دو سطح عدسی است، (که R برای سطوح محدب (برآمده) مثبت و برای سطوح مقعر (فرو رفته) منفی است.) در نتیجه:

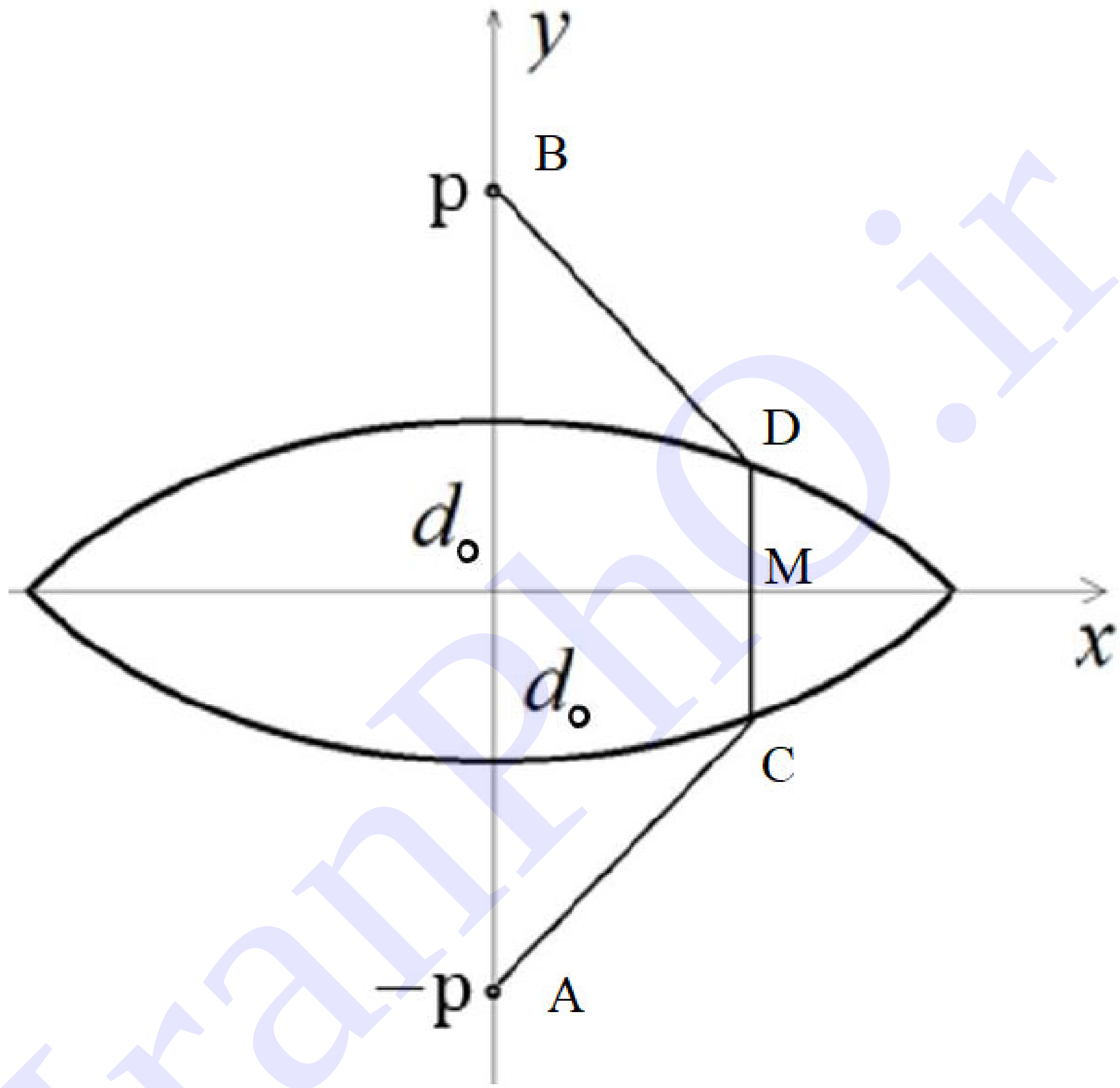
$$(n_O-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{(n_V-1)+(n_r-1)}{2}\right) \Rightarrow n_O = \frac{n_V+n_r}{2}$$

با استفاده از فرمول کوشی داریم:

$$A+\frac{B}{{\lambda_O}^2} = A + B\frac{1}{2}\left(\frac{1}{{\lambda_V}^2}+\frac{1}{{\lambda_r}^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{{\lambda_O}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{{\lambda_V}^2}+\frac{1}{{\lambda_r}^2}\right) = \frac{{\lambda_V}^2+{\lambda_r}^2}{2{\lambda_V}^2{\lambda_r}^2}$$

پس: $\lambda_O = \frac{\lambda_V\lambda_r}{\sqrt{\frac{{\lambda_V}^2+{\lambda_r}^2}{2}}}$

(۴-۲



از اصل فرما، اگر بخواهیم تمام نورها که از نقطه‌ی A به این عدسی می‌رسند، در نقطه‌ی B همگرا شوند، باید تمام این نورها، راه نوری برابری بین دو نقطه‌ی A و B را طی کنند. به علت تقارن، راه نوری از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی M نصف راه نوری از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B است. در سوال گفته که $\overline{CM} = d(\rho)$ در نتیجه:

راه نوری .O.P.L برابر است با:

$$O.P.L. = 2\left(\overline{AC} + n\,d(\rho)\right) = 2\left(\sqrt{\left(p - d(\rho)\right)^2 + \rho^2} + n\,d(\rho)\right)$$
$$= 2(p - d_0 + n\,d_0)$$

در نتیجه: $\sqrt{\left(p - d(\rho)\right)^2 + \rho^2} = \left(p - d_0 + n\left(d_0 - d(\rho)\right)\right)$ دو طرف را به توان دو می‌رسانیم، در نتیجه:

$$p^2 + d(\rho)^2 - 2pd(\rho) + \rho^2 = p^2 + \left((n-1)d_0\right)^2 + n^2 d(\rho)^2 + 2p(n-1)d_0 - 2nd(\rho)(p + (n-1)d_0)$$

با ساده سازی و مرتب کردن داریم:

$$(n^2 - 1)d(\rho)^2 - 2(n-1)(n\,d_0 + p)d(\rho) + ((p + (n-1)d_0)^2 - p^2 - \rho^2) = 0$$

در نتیجه با حل این معادله داریم:

$$d(\rho) = \frac{(n-1)(n\,d_0 + p) \pm \sqrt{(n-1)^2(n\,d_0 + p)^2 + \left(\rho^2 - (n-1)^2 {d_0}^2 - 2p(n-1)d_0\right)(n^2 - 1)}}{(n^2 - 1)}$$

تعداد جوابها دو تا شده است که یکی از این دو غیر قابل قبول است. برای پیدا کردن جواب قابل قبول، $d(\rho = 0)$ را بدست می‌آوریم، بعد از ساده سازی داریم:

$$d(0) = \frac{(n-1)(n\,d_0 + p) \pm \sqrt{(n-1)^2(p - d_0)^2}}{(n^2 - 1)}$$

از آنجا که $n > 1$ و $p > d_0$ پس داریم:

$$d(0) = \frac{(n-1)(n\,d_0 + p) \pm (n-1)(p - d_0)}{(n^2 - 1)}$$

که برای علامت مثبت پشت رادیکال برابر $\frac{2p + d_0(n-1)}{(n+1)}$ که غیر قابل قبول است و با علامت منفی پشت رادیکال d_0 می‌شود. پس:

$$d(\rho) = \frac{(n-1)(n\,d_0 + p) - \sqrt{(n-1)^2(n\,d_0 + p)^2 + \left(\rho^2 - (n-1)^2 {d_0}^2 - 2p(n-1)d_0\right)(n^2 - 1)}}{(n^2 - 1)}$$

ب) برای بدست آوردن جواب این قسمت دو کار می‌توان انجام داد یکی این است که $d(\rho) = 0$ را حل کنیم، که به ما حل $\left(R^2 - (n-1)^2 {d_0}^2 - 2p(n-1)d_0\right) = 0$ را می‌دهد (که بسیار ساده است) و روش دیگر این است که از برابر بودن راه نوری نور گذرنده از انتها و نور گذرنده از وسط استفاده کنیم. در نتیجه داریم:

$$\sqrt{R^2 + p^2} = p + (n-1)d_0 \Rightarrow R = \sqrt{(p + (n-1)d_0)^2 - p^2}$$
$$= \sqrt{(2p + (n-1)d_0)(n-1)d_0}$$

و قطر دو برابر شعاع، $2R$، است.