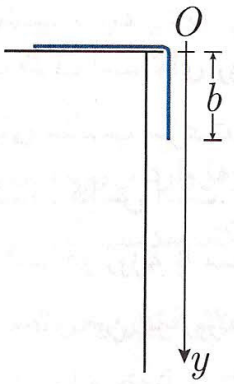
## آزمون نظری — وقت آزمون: ۲۱۰ دقیقه

**۱** طناب یکنواختی به طول $L$ مطابق شکل بر روی میزی قرار دارد. ارتفاع میز بیشتر از طول طناب است. فرض کنید جرم واحد طول طناب $\lambda$ و ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی یکسان باشد. اگر طول قسمت آویزان $b$ باشد طناب در آستانه‌ی لغزش قرار می‌گیرد. طناب از این حالت شروع به حرکت می‌کند. و فاصله‌ی نقطه‌ی انتهای بخش آویخته از $O$ در هر لحظه $y$ است. کمیت‌های زیر را حساب کنید.




الف) نیروی اصطکاک به صورت تابعی از $y$

ب) شتاب انتهای پایینی طناب به صورت تابعی از $y$

ج) انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه به صورت تابعی از $y$. مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را نقطه‌ی $O$ بگیرید.

د) سرعت نقطه‌ی انتهایی طناب

راهنمایی:

۱. انرژی پتانسیل طناب همگنی که به شکل یک پاره‌خط است، برابر است با انرژی پتانسیل جسمی به همان جرم که در مرکز هندسی طناب قرار گرفته باشد.

۲. مساحت سطح زیر نمودار نیرو بر حسب جابه‌جایی برابر است با کاری که نیرو انجام داده است.

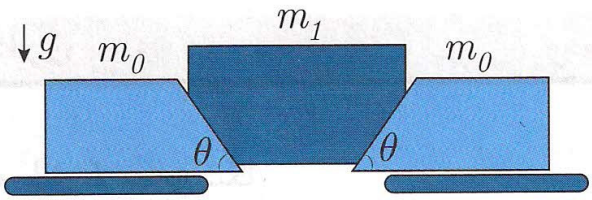
«۱۰ نمره»

**۲** دو جرم مشابه $M_0$ مطابق شکل روی دو سطح افقی قرار دارند. فرض کنید که این جرم‌ها از سطح بلند نمی‌شوند. ضریب اصطکاک ایستایی و جبشی آن‌ها با سطح افقی را $\mu$ بگیرید. جرم $M_1$ را روی آن‌ها قرار می‌دهیم. اصطکاک بین جرم‌های $M_0$ و $M_1$ قابل چشم‌پوشی است.

الف) اگر $M_1$ با شتاب $a$ پایین بیاید، اندازه شتاب جرم‌های $M_0$ چقدر می‌شود؟

ب) با $\mu$ و $M_0$ معین، به اندازه‌ی مقادیر مختلف $\theta$، چه شرطی روی $M_1$ باشد تا دستگاه ساکن بماند؟

ج) فرض کنید جرم $M_1$ حرکت می‌کند شتاب آن را به‌دست آورید.




«۱۰ نمره»

**۳** یک ظرف استوانه‌ای روباز پر از مایع است. روی سطح جانبی استوانه روزنه کوچکی ایجاد می‌کنیم. با تقریب‌های مناسب سرعت خروج مایع از روزنه $v = \sqrt{2gh}$ است که در آن $h$ فاصله روزنه از سطح مایع و $g$ شتاب گرانش است.

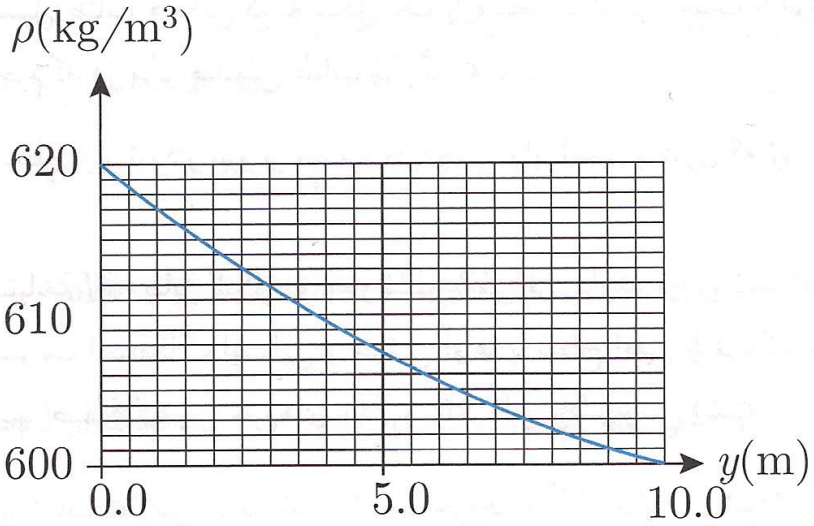
فرض کنید دو روزنه با مساحت‌های یکسان $A$ روی سطح جانبی ظرف و در یک امتداد قائم وجود دارد. فاصله‌های این دو روزنه از سطح مایع به ترتیب $h_1$ و $h_2$ است. برای این‌که با خروج مایع از این روزنه‌ها ارتفاع مایع در ظرف تغییر نکند، مایع وارد ظرف می‌کنیم.

الف) آهنگ ورود مایع به ظرف که مثلاً بر حسب مترمکعب بر ثانیه سنجیده می‌شود، دبی ورودی نام دارد. دبی ورودی مایع، $D$ چقدر باشد تا ارتفاع مایع در ظرف ثابت بماند؟

ب) مایعی که از دو روزنه خارج می‌شود در نقطه‌ای به فاصله افقی $x$ و فاصله قائم $y$ از سطح مایع همدیگر را قطع می‌کنند. $x$ و $y$ را به‌دست آورید.

«۱۰ نمره»

**۴** در یک مخزن روباز تا ارتفاع ده متر، مایعی ریخته‌ایم. محور $y$ را رو به بالا و مبدأ آن را منطبق بر ته مخزن بگیرید. چگالی مایع بر حسب ارتفاع در شکل داده شده است. فشار هوا را $P_0 = 1.0 \times 10^5 \text{Pa}$ و شتاب گرانش را $g = 9.8 \text{m/s}^2$ بگیرید. فشار مایع را در $y = 0$ و $y = 5\text{m}$ پیدا کنید.




«۱۰ نمره»

**۵** اگر یک رشته‌ی فولادی به سطح مقطع $A$ را به نقطه‌ی ثابتی ببندیم و سر دیگر را با نیروی $F$

بکشیم، به نسبت $\sigma = \frac{F}{A}$ تنش کششی می‌گوییم. اگر تنش کششی از مقدار معینی بیشتر شود، رشته می‌برد.

یک مخزن گاز، کره‌ای به شعاع $R = 5.0\text{m}$ است که از ورقه‌های فولادی به ضخامت $t = 2.0\text{cm}$ ساخته شده است. بر طبق استانداردهای جهانی حداکثر تنش کششی مجاز در تأسیسات فولادی $\sigma_{\max} = 1.5 \times 10^8\text{Pa}$ است.

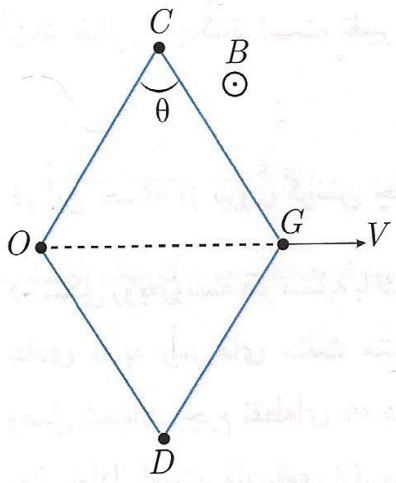
الف) گاز نیم‌کره‌ی بالایی مخزن را در نظر بگیرید. با توجه به تعادل گاز، نیروها وارد بر این قسمت از گاز را بنویسید و از آنجا نیرویی را که گاز بر نیم‌کره‌ی بالایی مخزن وارد می‌کند به‌دست آورید.

ب) اگر فشار گاز مخزن را زیاد کنیم، سرانجام مخزن شکافته می‌شود. حداکثر فشار مجاز گاز چقدر باشد تا تنش کششی در دایره‌ی عظیمه از حداکثر تنش کششی مجاز بیشتر نشود؟

فشار هوا $P_0 = 1.0 \times 10^5\text{Pa}$ است و از نیروی وزن مخزن در برابر نیروهای دیگر چشم‌پوشی کنید.

«۱۰ نمره»

**۶** قاب لوزی شکل روبه‌رو از ۴ میله‌ی رسانا به جرم ناچیز ساخته شده است. طول هر میله $a$ و مقاومت الکتریکی هرکدام $R$ است. قاب در یک میدان مغناطیسی ثابت و قائم قرار دارد. سطح قاب افقی است و اضلاع به هم لولا شده‌اند. لولای رأس $O$ ثابت است و سایر لولاها می‌توانند بدون اصطکاک حرکت کنند. مطابق شکل رأس $G$ را با نیروی $F$ در جهت قطر $OG$ می‌کشیم به طوری که رأس $G$ با سرعت ثابت $v$ حرکت می‌کند. زاویه‌ی $\theta$ از وضعیت $\theta = 60°$ به وضعیت $\theta = 120°$ درمی‌آید. لحظه‌ی $t = 0$ زمان شروع حرکت نقطه $G$ است.




الف) جهت جریان القایی در ضلع $OC$ را در ضمن این حرکت معلوم کنید.

ب) مساحت قاب را بر حسب $t$ حساب کنید.

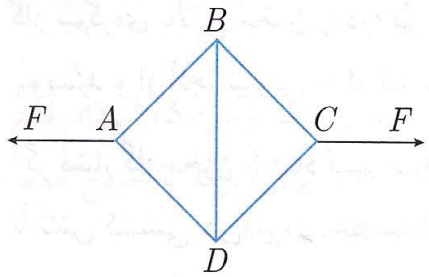
ج) نیروی محرکه‌ی القایی را در لحظه‌ی $t$ حساب کنید.

د) نیروی الکترومغناطیسی وارد بر یک ضلع قاب در لحظه‌ی $t$ را حساب کنید.

ه) با استفاده از پایستگی انرژی، نیروی $F(t)$ را حساب کنید.

«۱۰ نمره»

**۷** اگر نیروی کششی یا فشاری $F$ بر میله‌ای به طول $L$ و سطح مقطع $S$ و در راستای آن وارد شود، طول میله به اندازه $\Delta L$ زیاد و یا کم می‌شود. آزمایش نشان می‌دهد برای $F$ کمتر از یک مقدار معین رابطه‌ی $\gamma \frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{S}$ برقرار است که در آن $\gamma$ یک ضرب ثابت است و مدول یانگ نام دارد. برای یک طناب به طول $L$ و سطح مقطع $S$ نیز که نیروی کششی $F$ بر آن وارد می‌شود، افزایش طول $\Delta L$ طناب از همان رابطه به‌دست می‌آید. مطابق شکل یک کلاف مربع به ضلع $L$ با طنابی به سطح مقطع $S$ ساخته شده و قطر $BD$ یک میله با همان سطح مقطع است. این کلاف روی سطح افقی است و به دو رأس $A$ و $C$ نیروی $F$ در راستای قطر $AC$ وارد می‌شود. مدول یانگ طناب و میله را برابر بگیرید.




از رابطه‌ی $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x$ برای حالتی که $x$ خیلی از ۱ کوچک‌تر است استفاده کنید.

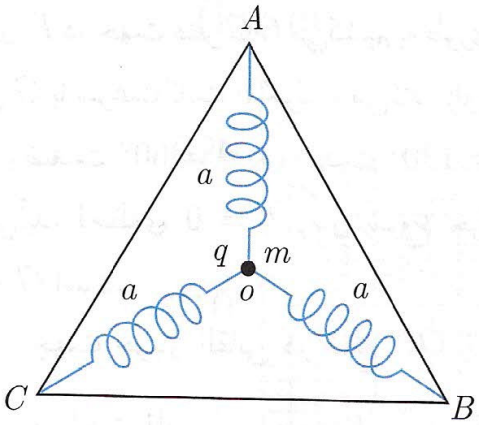
الف) نیروها را در هر ضلع مربع و میله معین کنید. در اینجا از تغییر طول‌ها چشم بپوشید.

ب) با نیروهایی که در بند (الف) حساب کرده‌اید، با فرض این‌که تغییر طول طناب و میله نسبت به طول آن‌ها خیلی کوچک‌تر است، تغییر طول قطر $AC$ را به‌دست آورید.

«۱۰ نمره»

**۸** در این مسئله از نیروی گرانش چشم‌پوشی کنید.

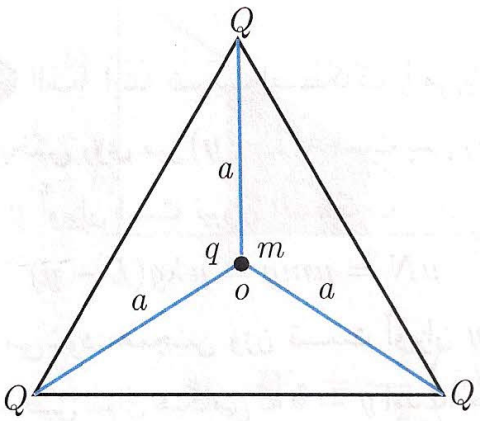
الف) در شکل روبه‌رو، سه فنر مشابه با ضریب $K$ و طول عادی $a$ به رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاعی وصل شده‌اند. جرم نقطه‌ای $m$ در مرکز مثلث در حال تعادل است. فاصله‌ی $O$، مرکز مثلث، از هر رأس $a$ است. جرم $m$ را در امتداد پاره‌خط $OA$ به اندازه‌ی $x$ به رأس $A$ نزدیک می‌کنیم. $\epsilon = \frac{x}{a}$ خیلی کوچک‌تر از ۱ است. با استفاده از تقریب




$$(1+\epsilon)^{\alpha} \simeq 1 + \alpha\epsilon$$

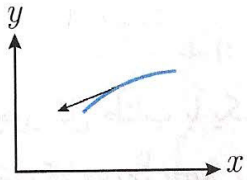
و چشم‌پوشی از جملات از مرتبه $\epsilon^2$ و بالاتر، نیروی بازگرداننده فنرها را محاسبه کنید و با مقایسه این نیروی بازگرداننده با نیروی بازگرداننده یک فنر، بسامد نوسان کم‌دامنه جرم $m$ و حول نقطه $O$ را به‌دست آورید.

ب) بار $q$ به جرم $m$ در مرکز یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارد و از سه بار مشابه $Q$، که با بار $q$ هم‌علامت هستند، به فاصله‌ی $a$ است. بار $q$ را در جهت $OA$ به اندازه‌ی $x$ به باری که در رأس $A$ قرار دارد نزدیک می‌کنیم. $\frac{x}{a}$ خیلی کوچک‌تر از ۱ است. با استفاده از همان تقریب‌های قسمت (الف)، و با این فرض که بار $q$ از صفحه‌ی مثلث خارج نمی‌شود، نیروی بازگرداننده را حساب کنید و بسامد نوسان کم‌دامنه آن را به‌دست آورید.




ج) فرض کنید بار $q$ که در مرکز مثلث است، به اندازه‌ی $y$ در راستای عمود بر صفحه‌ی مثلث جابه‌جا شود. $\frac{y}{a}$ خیلی کوچک‌تر از ۱ است. جهت و اندازه‌ی نیروی وارد بر $q$ را با همان تقریب‌های ذکر شده به‌دست آورید. «۱۰ نمره»

**۹** در یک طناب افقی که با نیروی ثابت $F$ کشیده شده است، موج عرضی $y = A\sin(kx - \omega t)$ منتشر می‌شود. در شکل نیرویی که در یک نقطه، قسمت چپ طناب به قسمت راست آن وارد می‌کند که نشان داده شده است. برای زاویه‌های کوچک $\theta$ داریم $\sin\theta \simeq \tan\theta$.




الف) با توجه به این‌که نیروی $F$ مماس بر طناب و دامنه‌ی موج نسبت به طول موج کوچک است، مؤلفه‌ی $y$ نیروی وارد بر قسمت راست طناب را به‌دست آورید.

ب) مؤلفه‌ی $y$ سرعت طناب را در این نقطه به‌دست آورید.

ج) توانی که قسمت چپ طناب به طرف راست آن می‌فرستد را حساب کنید.

د) با فرض این‌که نقطه‌ی $x = 0$ گره است، موج برهم‌نهی شده را بنویسید. این موج از انتهای بسته‌ی طناب بازتاب می‌کند و در طناب موج ایستاده درست می‌شود.

ه) توانی را که در این موج برهم‌نهی شده از سمت چپ به سمت راست می‌رود به‌دست آورید.

و) توانی را که از گره‌ها و شکم‌ها می‌گذرد حساب کنید.

ز) در یک لحظه‌ی معین، در چه نقاطی، اندازه‌ی توان عبوری بیشینه است؟ «۱۰ نمره»