باسمه‌تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نظری اول

پنج شنبه ۵ تیر ۱۳۹۳ — وقت: ۵ ساعت

مسأله اول. دنباله‌ی کم‌اختلاف .... ۲۵ امتیاز

می‌دانیم ۲^n عدد باینری به طول n داریم. $e(m)$ را جایگاه اولین رقم ۱ ازسمت راست عدد m در مبنای ۲ فرض کنید. برای مثال $e(۳) = ۱$ و $e(۱۲) = ۳$. ثابت کنید خروجی الگوریتم زیر دنباله‌ی $w_۱, w_۲, \ldots, w_{۲^n-۱}$ است که w_j دنباله‌ای n کاراکتری و باینری است و ثابت کنید به ازای هر a, b متفاوت، w_a و w_b متفاوت اند.

۱. $w_. = (۰۰۰ \ldots ۰)$ (تعداد صفرها nتا)

۲. $k = ۱$

۳. j را برابر با $e(k)$ قرار بده.

۴. در دنباله $w_{k-۱}$، a_j (رقمی که در مکان jام از راست قرار دارد) را با $(۱ - a_j)$ عوض کن و آن را w_k نام‌گذاری کن.

۵. به مقدار k یکی اضافه کن.

۶. اگر $k < ۲^n$ به خط ۳ برو.

۷. پایان.

مسأله دوم. جعبه‌های جادویی .... ۲۵ امتیاز

به ازای هر عدد طبیعی i یک جعبه با شماره‌ی i در نظر بگیرید. در ابتدا فرض کنید در جعبه‌ی iام a_i توپ قرار دارد که برای حداکثر n جعبه تعداد توپ‌ها بزرگ‌تر از صفر است. در هر گام می‌توانیم یک جعبه‌ی دلخواه را انتخاب کنیم و اگر تعداد توپ‌های این جعبه برابر با $k(k > ۰)$ بود، آن k توپ را به جعبه‌ی شماره‌ی k منتقل کنیم. ثابت کنید حداکثر بعد از $۲n - ۱$ بار تکرار این عمل به جایی می‌رسیم که تعداد توپ‌های هر جعبه برابر با صفر و یا شماره‌ی آن جعبه است.

مسأله سوم. مرتب‌سازی جبلی .... ۵۰ امتیاز

یک جایگشت دلخواه از اعداد n ,...,۱,۲ را می‌خواهیم با عمل "وارون‌ساز" مرتب کنیم. عمل وارون‌ساز به عملی می‌گوییم که در طی آن یک زیر دنباله از جایگشت انتخاب می‌کنیم و اعضای آن را وارون می‌کنیم. فرض کنید $f(n)$ کمترین تعداد عمل وارون‌ساز لازم برای یک جایگشت دلخواه از n ,...,۱,۲ باشد. مثلا برای جایگشت ۲ ,۴ ,۱ ,۵ ,۳ این عدد برابر ۲ است. زیرا کافیست در گام اول زیر دنباله‌ی ۱ ,۳ را انتخاب کنیم و به جایگشت ۲ ,۴ ,۳ ,۵ ,۱ برسیم و در گام دوم زیردنباله‌ی ۲ ,۴ ,۵ را انتخاب کنیم و به جایگشت مرتب شده برسیم.

الف) ثابت کنید $f(n) = \Omega(lgn)$

ب) ثابت کنید $f(n) = O(\sqrt{n})$