

ابتدا کردم به نام کردگار  
آن خداوندی که هستی ذات اوست

خالق هفت و شش و پنج و چهار  
هر دو عالم مصحف آیات اوست

وصلت نامه - فریدون عطار نیشابوری

## آزمون تئوری پنجم (الگوریتم) - دسته‌ی دوم<sup>۱</sup>

سه‌شنبه ۲۱ آبان ۱۳۹۲ - چهار ساعت

پرسش نخست: جای‌گشت زوج

یک عمل ترانهش در یک جای‌گشت عبارت است از انتخاب دو عنصر متمایز و جابه‌جا کردن آن‌ها. می‌دانیم که هر جای‌گشت دلخواه را می‌توان به صورت ترکیبی از ترانهش‌ها نوشت. یک جای‌گشت را زوج می‌گوییم هرگاه بتوان آن را به صورت ترکیبی از تعداد زوجی ترانهش نوشت.

یک جای‌گشت را کوچک‌تر از یک جای‌گشت دیگر می‌نامیم هرگاه در ترتیب لغت‌نامه‌ای قبل از آن ظاهر شود. به شما دو جای‌گشت از اعداد طبیعی ۱ تا  $n$  داده شده است. شما باید تعداد جای‌گشت‌های زوجی که از جای‌گشت اول بزرگ‌تر و از جای‌گشت دوم کوچک‌تر هستند را بیابید. الگوریتمی چندجمله‌ای ارائه دهید که این کار را انجام دهد.

پرسش دوم: تابع‌های پوشا

الگوریتمی از  $O(n^3)$  ارائه دهید که دو عدد طبیعی  $n$  و  $k$  را بگیرد و تعداد توابع پوشا از یک مجموعه‌ی  $n$  عنصری به یک مجموعه‌ی  $k$  عنصری را بیابد.

پرسش سوم: معدن طلا

کشور دور  $n$  شهر مهم دارد. هر شهر مهم برای خودش مستقل است و توسط یک شهردار اداره می‌شود. شهردار شهر شماره‌ی ۱ پادشاه دور است. هم‌چنین هر یک از شهرها یک حوزه‌ی نفوذ دارد که به شکل یک دایره به مرکز آن شهر می‌باشد. می‌دانیم که هر نقطه از کشور در حوزه‌ی نفوذ دست‌کم یک شهر قرار گرفته است و این حوزه‌ها ممکن است اشتراک داشته باشند.

به تازگی در  $n$  نقطه از این کشور معدن طلا یافت شده است. همه‌ی معادن به یک میزان طلا دارند. پادشاه باید مالکیت هر یک از معادن طلا را به یکی از شهرهایی که آن معدن در حوزه‌ی نفوذ آن قرار دارد بسپارد. از آن‌جایی که طلای بیشتر به معنای قدرت بیشتر است، پادشاه مایل است مالکیت‌ها را طوری تعیین کند که هیچ شهری بیشتر از شهر ۱ درآمد نداشته باشد.

الگوریتمی از  $O(n^2)$  ارائه دهید که با گرفتن مختصات شهرها و معادن و شعاع حوزه‌ی نفوذ هر شهر، تعیین کند که چنین کاری ممکن است یا خیر.

پرسش چهارم: فروشنده‌ی دوره‌گرد

منبع: COCI

فروشنده‌ی دوره‌گردی می‌خواهد از  $n$  شهر که با اعداد ۱ تا  $n$  شماره‌گذاری شده‌اند بازدید کند. او از هر شهر درست یک بار می‌گذرد و برای رفتن از شهری به شهر دیگر از هواپیمایی دورایرفلات استفاده می‌کند. او هم‌چنین مایل است طوری از شهرها بازدید کند که به ازای هر شهر مانند  $k$ ، یا همه‌ی شهرهای با شماره‌ی کم‌تر از  $k$  را قبل از شهر  $k$  ببیند یا همه‌ی این شهرها را بعد از شهر  $k$  ببیند.

الگوریتمی از  $O(n^2)$  ارائه دهید که با گرفتن هزینه‌ی پرواز بین هر دو شهر، کم‌ترین هزینه‌ی لازم برای بازدید از همه‌ی شهرها را بیابد.

پیروز باشید - امیر گهرشادی

۰ خداوند اعداد طبیعی را آفرید، بقیه‌اش کار انسان‌هاست! - لئوپولد کرونکر

۱ در این آزمون نگران بزرگ شدن یا دقت اعداد نباشید و فرض کنید چهار عمل اصلی را می‌توان در زمان ثابت انجام داد.