

تمرینهای فصل آنالیز فوریه

-۱

سری فوریه توابع زیر را بنویسید

$$(i) f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}, f(x+2) = f(x)$$

$$(ii) f(x) = \sinh x, \quad -\pi < x < \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

$$(iii) f(x) = \sin^2 x, \quad -\pi < x < \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

$$(iv) f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad -\pi < x < \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

-۲

سری فوریه کسینوسی توابع متناوب زیر را بنویسید

$$(i) f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2-x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$(ii) f(x) = (x-1)^2, \quad 0 < x < 1$$

-۳

انتگرال فوریه تابع زیر را بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

-۴

تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{برای } x \text{ های دیگر} \end{cases}$ را به صورت انتگرال فوریه بنویسید و با استفاده از آن ثابت کنید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

-۵

تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ را بدست آورید و با استفاده از اتحاد پارسوال نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x \cos x - \sin x)^2}{x^6} dx = \frac{\pi}{15}$$

-۶

تبدیل فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ را بنویسید و با استفاده از آن نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x \cos \alpha x dx}{x^2 - 1} = \begin{cases} 0, & |\alpha| < \pi \\ -\frac{\pi}{4}, & |\alpha| = \pi \\ \frac{\pi}{4}, & |\alpha| > \pi \end{cases}$$

-۷

سری فوریه تابع $f(x) = x^2$, $-l < x < l$ را بیابید و با توجه به آن مقادیر هر یک از سریهای عددی $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots$ و $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ را به دست آورید.

-۸

صورت مختلط سری فوریه تابع $f(x) = \cosh x$ و $-\pi < x < \pi$ را به دست آورید.

-۹

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & ; x > \pi \end{cases}$$

تابع

را به صورت یک انتگرال سینوسی فوریه بنویسید و با توجه به آن انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \pi x}{x} \sin \pi x \, dx$$

را محاسبه کنید.