برخورد کشسان یک میلهٔ صلب با یک قرص ثابت

مهدیه بیگدلو[1]، محمد ابراهیم فولادوند[1]، مهدی نیک عمل[2]

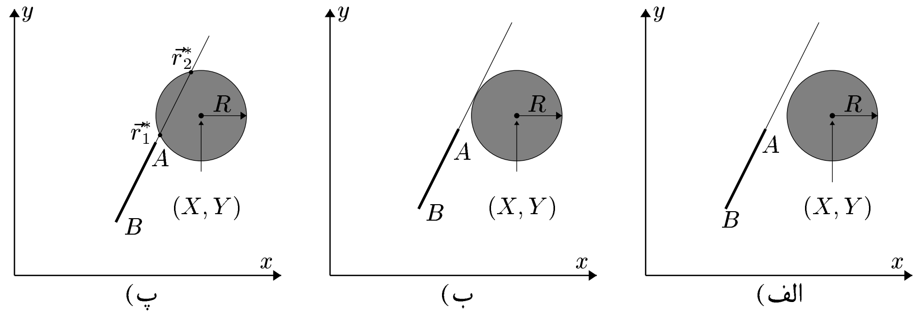
چکیده: برخورد کشسان یک میلهٔ صلب با یک قرص ثابت در صفحه بررسی می‌شود. نخست به کمک روابط سینماتیکی، زمان برخورد میله با قرص و مختصات نقطهٔ برخورد بر حسب شرایط اولیه میله، یعنی مکان و سرعت آن، بدست می آید. سپس از پایستگی تکانهٔ خطی و تکانهٔ زاویه‌ای، سرعت زاویه‌ای میله و سرعت خطی مرکز جرم آن پس از برخورد، بر حسب مقادیر همان کمیت‌ها پیش از برخورد به دست می آید. جرم قرص آنقدر زیاد فرض می‌شود که بتوان از انرژی جنبشی آن پس از برخورد چشم‌پوشی کرد.

1 مقدمه

مسائل برخورد در مکانیک همواره از اهمیت زیادی برخوردار بوده اند. در بیشتر کتابهای دبیرستانی و حتی دانشگاهی از ساختار ذرات برخوردکننده چشم‌پوشی می‌شود و آنها را بصورت ذرات نقطه‌ای فرض می‌کنند. اما برای ارائهٔ یک توصیف بهتر، در نظر گرفتن ساختار داخلی ذرات امری ضروری می‌نماید. در این نوشته قصد داریم با در نظر گرفتن ساختار هندسی برای ذرات، برخورد آنها را با موانع کاملاً صلب مطالعه کنیم. ذرهٔ برخورد کننده را بصورت یک میلهٔ کاملاً صلب به جرم m و طول ℓ می گیریم که با یک قرص بسیار سنگین برخورد می‌کند. در اینجا برای سادگی، مسئله را بصورت دوبعدی در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم در لحظهٔ اول، میله دارای سرعت زاویه‌ای ω باشد و با محور x ها زاویهٔ θ_0 بسازد. همچنین سرعت مرکز جرم میله را با v_x و v_y نشان می‌دهیم. جهت مثبت ω را بصورت گردش حول محور z ها و در جهت پاد ساعتگرد می‌گیریم.

میله در طول حرکت خود که ترکیبی از حرکتهای انتقالی مرکز جرم و دوران حول مرکز جرم است ممکن است به قرص برخورد کند. شعاع قرص را R و مختصات مرکز آنرا (X, Y) در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم جرم قرص M آنچنان زیاد است که پس از برخورد میله با آن، قرص هیچگونه تغییر

[1] گروه فیزیک، دانشگاه زنجان، [2] پژوهشکده علوم نانو، پژوهشگاه دانشهای بنیادی



شکل ۱: شعاع قرص R است. مرکز قرص نقطه‌ی (X, Y) است. وضعیّت نسبی میله و قرص به یکی از این سه شکل است. الف) امتداد میله قرص را قطع نمی‌کند. ب) امتداد میله بر قرص مماس است. پ) امتداد میله قرص را در دو نقطه قطع می‌کند.

مکان قابل ملاحظه‌ای نداشته باشد. نخست باید ببینیم برخورد میله و قرص در چه زمانی رخ می‌دهد و سپس مختصات نقطهٔ برخورد را هم روی میله و هم روی محیط قرص بدست آوریم.

2 سینماتیک برخورد میله با قرص

در لحظهٔ t، امتداد میله با قرص سه حالت می‌تواند داشته باشد: الف) امتداد میله با قرص برخورد نکند (شکل ۱—الف)، ب) امتداد میله بر قرص مماس باشد (شکل ۱—ب)، ج) امتداد میله قرص را در دو نقطهٔ $\vec{r}_1^*$ و $\vec{r}_2^*$ قطع کند (شکل ۱—پ).

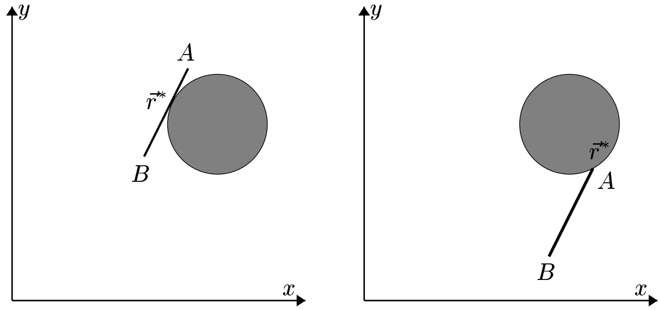
میله در دو حالت می‌تواند با قرص بر خورد کند: یا سر میله با قرص بر خورد می‌کند، یا یکی از نقاط بدنهٔ میله (یعنی یکی از نقاط میانی) با قرص بر خورد می‌کند. این دو حالت در شکل ۲—الف و ۲—ب نشان داده شده‌اند.

مختصات ابتدا و انتهای میله را با $\vec{R}_A$ و $\vec{R}_B$، و مختصات مرکز جرم میله را با $\vec{R}_{\rm cm}$ نشان می‌دهیم. در لحظهٔ t خواهیم داشت:

$$X_A(t) = X_{\rm cm}(t) + \frac{\ell}{2}\cos(\omega t + \theta_0), \tag{1}$$

$$Y_A(t) = Y_{\rm cm}(t) + \frac{\ell}{2}\sin(\omega t + \theta_0), \tag{2}$$

$$X_B(t) = X_{\rm cm}(t) - \frac{\ell}{2}\cos(\omega t + \theta_0), \tag{3}$$



ب)　　　　　　　　　　الف)

شکل ۲: در هنگام برخورد میله با قرص، ممکن است سر میله به قرص بخورد (الف)، یا نقطه‌ای میانی از میله به قرص بخورد (ب). $\vec{r}^*$ نقطه‌ی تماس است.

$$Y_B(t) \ = \ Y_{\rm cm}(t) - \frac{\ell}{2}\sin(\omega t + \theta_0). \tag{4}$$

همچنین معادلهٔ خطی که در امتداد میله قرار دارد طبق رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$y - Y_A(t) = \frac{Y_B(t) - Y_A(t)}{X_B(t) - X_A(t)}\left(x - X_A(t)\right), \tag{5}$$

که با جایگذاری از روابط بالا به صورت زیر ساده می‌شود:

$$y - x\tan(\omega t + \theta_0) + X_{\rm cm}(t)\tan(\omega t + \theta_0) - Y_{\rm cm}(t) = 0. \tag{6}$$

اگر مختصات نقطهٔ برخورد میله با قرص را با $\vec{r}^*$ نشان دهیم، شرط لازم برای برخورد این است که فاصلهٔ $\vec{r}^*$ تا مرکز قرص برابر شعاع قرص، یعنی R باشد. پس داریم:

$$(x^* - X)^2 + (y^* - Y)^2 = R^2. \tag{7}$$

از طرفی x^* و y^* باید در معادلهٔ خط میله نیز صدق کنند، یعنی

$$y^* - x^*\tan(\omega t + \theta_0) + X_{\rm cm}(t)\tan(\omega t + \theta_0) - Y_{\rm cm}(t) = 0. \tag{8}$$

با جایگذاری y^* از این معادله در معادلهٔ (7) به معادلهٔ درجهٔ دوم زیر برای x^* می‌رسیم:

$$\begin{aligned}&\left\{X^2 + [Y_{\rm cm}(t) - X_{\rm cm}(t)\tan(\omega t + \theta_0)]^2 + Y^2 - 2Y\,[Y_{\rm cm}(t) - X_{\rm cm}(t)\tan(\omega t + \theta_0)] - R^2\right\}\\ &-2\,x^*\left\{X + \tan(\omega t + \theta_0)\,[X_{\rm cm}(t)\tan(\omega t + \theta_0) - Y_{\rm cm}(t)] + Y\tan(\omega t + \theta_0)\right\}\\ &+x^{*2}\left\{1 + \tan^2(\omega t + \theta_0)\right\} = 0\end{aligned} \tag{9}$$

که مبین آن هست:

$$\Delta' = R^2\ \left[1+\tan^2(\omega t+\theta_0)\right] - \left[(X-X_{\rm cm})\tan(\omega t+\theta_0)-(Y-Y_{\rm cm})\right]^2 . \qquad (10)$$

در این جا

$$X_{\rm cm}(t) = X_{\rm cm}(0)+v_x\, t, \qquad Y_{\rm cm}(t) = Y_{\rm cm}(0)+v_y\, t. \qquad (11)$$

معادلهٔ (9) بسته به آنکه مبین آن منفی، صفر یا مثبت باشد دارای صفر، یک و یا دو ریشه خواهد بود. در حالت مبین صفر، یک ریشهٔ مضاعف خواهیم داشت که آنرا با x^* نشان می‌دهیم. هنگامی که دو ریشه داشته باشیم نقاط برخورد امتداد میله با محیط قرص دو نقطهٔ $\vec{r}^*_+ = (x^*_+, y^*_+)$ و $\vec{r}^*_- = (x^*_-, y^*_-)$ هستند. برخورد از پهلو هنگامی رخ می‌دهد که دو شرط زیر همزمان بر قرار باشند:

الف) مبین معادلهٔ (9) صفر شود (یا بعبارت دیگر راستای میله بر قرص مماس باشد.)

ب) فاصلهٔ نقطهٔ برخورد (x^*, y^*) تا مرکز جرم میله کمتر از $\frac{\ell}{2}$ باشد.

برخورد از سر هنگامی رخ می‌دهد که دو شرط زیر همزمان بر قرار باشند:

الف) مبین معادلهٔ (9) مثبت باشد (که راستای میله قرص را در دو نقطه قطع کند).

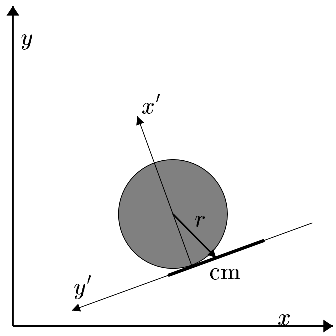
ب) کمترین فاصلهٔ نقاط قطع از مرکز جرم میله دقیقاً برابر $\frac{\ell}{2}$ باشد.

چون نمی‌دانیم برخورد از سر خواهد بود یا از پهلو، بنا بر این زمانهای هر یک از چنین بر خوردهائی را پیدا می‌کنیم. زمان واقعی برخورد، کوچکترین این زمانها خواهد بود. برای یافتن زمان برخورد از پهلو، مبین معادلهٔ (9) را برابر صفر قرار می‌دهیم. بخاطر غیر خطی بودن این معادله، تعداد ریشه‌های آن بیش از یک است. این ریشه‌ها را بترتیب افزایشی با t_1^* و t_2^* و t_3^* و... نشان می‌دهیم $(t_1^* < t_2^* < t_3^* < \ldots)$.

به ازای هر ریشه t_i^*، مختصات نقطهٔ برخورد را که از معادلهٔ (9) بدست می آید با $\vec{r}_i^*$ نشان می‌دهیم. اگر فاصلهٔ $\vec{r}_i^*$ از مرکز جرم میله کمتر از $\frac{\ell}{2}$ باشد، آن وقت کوچکترین t_i^* را بعنوان نخستین زمان برخورد از پهلو در نظر می گیریم و آن را با t_A^* نشان می‌دهیم. سپس کوچکترین زمان برخورد از سر را نیز بدست می‌آوریم. این زمان را با t_B^* نشان می‌دهیم و مقدار آن از حل معادلهٔ زیر به دست می‌آید.

$$d(\vec{r}^*(t), \vec{R}_{\rm cm}(t)) = \frac{\ell}{2}. \qquad (12)$$

منظور از $d(\vec{r}^*(t), \vec{R}_{\rm cm}(t))$ عبارتست از کمترین فاصله نقاط برخورد امتداد میله با قرص از مرکز جرم میله.



شکل ۳: cm مرکز جرم میله است. دستگاه $x'y'$ راستگرد است. نیرویی که میله به قرص وارد می‌کند در امتداد محور x' است. r فاصله‌ی مرکزجرم میله از مرکز قرص است.

$$d(\vec{r^*}(t), \vec{R}_{\rm cm}(t)) = \min\left\{d(\vec{r}^*_+(t),\ \vec{R}_{\rm cm}(t)),\ \ d(\vec{r}^*_-(t),\ \vec{R}_{\rm cm}(t))\right\}, \tag{13}$$

که در آن منظور از $d(\vec{r}^*_\pm(t), \vec{R}_{\rm cm}(t))$ فاصلهٔ نقاط قطع از مرکز جرم میله در لحظه t است. زمان اصلی برخورد یعنی t^* کمینهٔ t^*_A و t^*_B خواهد بود.

$$t^* = \min\{t^*_A,\ t^*_B\}. \tag{14}$$

با یافتن t^*، براحتی می‌توان مختصات نقطهٔ برخورد یعنی $\vec{r}^*$ را از روی معادلهای (8) و (9) پیدا کرد.

3 دینامیک برخورد میله با قرص

اینک که مختصات نقطهٔ برخورد میله با قرص را پیدا کردیم، به خود مسئله برخورد می‌پردازیم. هدف پیدا کردن سرعت مرکز جرم میله و سرعت زاویه‌ای دوران میله حول محور عمود بر مرکز جرم پس از برخورد است. سرعت خطی مرکز جرم میله پیش و پس از برخورد را به ترتیب با $\vec{v}$ و $\vec{v}'$ نشان می‌دهیم. همچنین سرعت زاویه‌ای میله را، پیش و پس از برخورد با ω و ω' نشان می‌دهیم. وقتی میله و قرص برخورد می‌کنند نیرو در امتداد خط واصل بین مرکز قرص و نقطهٔ برخورد (یعنی راستای x' در شکل ۳) اعمال می‌شود. بنا بر این مؤلفهٔ سرعت موازی با این راستا تغییر می‌کند و مؤلفهٔ سرعت در امتداد عمود بر این راستا ثابت می‌ماند. سرعت میله را به عنوان یک بردار می‌توان به صورت جمع مؤلفه‌های موازی و عمود بر راستای اعمال نیروی برخوردی نوشت.

$$\vec{v} = v_{\parallel}\hat{x}' + v_{\perp}\hat{y}' \tag{15}$$

$$\vec{v'} = v'_{\parallel}\hat{x}' + v'_{\perp}\hat{y}' \tag{16}$$

مطابق آنچه گفته شد رابطهٔ $v'_{\perp} = v_{\perp}$ برقرار است. همان طور که در شکل (۳) نشان داده شده $\hat{x}'$ در راستای پادموازی با جهت اعمال نیرو بر میله، و در جهت خط واصل نقطهٔ تماس با مرکز قرص است؛ و $\hat{y}'$ در راستای عمود بر آن چنان انتخاب می‌شود تا دستگاه راستگرد باشد یعنی $\hat{x}' \times \hat{y}' = \hat{k}$.

اصل پایستگی انرژی با توجه به چشم‌پوشی کردن از جمله $\frac{1}{2}MV'^2$ که با فرض بسیار سنگین بودن قرص معقول بنظر می‌رسد بصورت زیر در می آید.

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}I\omega'^2 + \frac{1}{2}mv'^2. \tag{17}$$

با توجه به این که $v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2$ و $v_{\perp} = v'_{\perp}$، رابطه بالا بصورت زیر ساده می‌شود.

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 = \frac{1}{2}I\omega'^2 + \frac{1}{2}mv'^2_{\parallel}. \tag{18}$$

پایستگی تکانهٔ خطی را نیز در دستگاه $x' - y'$ می‌نویسیم.

$$m\vec{v} = M\vec{V'} + m\vec{v'}, \tag{19}$$

که در آن منظور از $\vec{V}'$ سرعت مرکز جرم قرص پس از برخورد است. پیش از برخورد $\vec{V} = 0$ فرض شده است.

$$m\left(v_{\parallel}\hat{x}' + v_{\perp}\hat{y}'\right) = M\left(V'_{\parallel}\hat{x}' + V'_{\perp}\hat{y}'\right) + m\left(v'_{\parallel}\hat{x}' + v'_{\perp}\hat{y}'\right). \tag{20}$$

از برابری مؤلفه‌ها روابط زیر بدست می آیند.

$$MV'_{\perp} = 0 \qquad \rightarrow \qquad V'_{\perp} = 0, \tag{21}$$

$$mv_{\parallel} = MV'_{\parallel} + mv'_{\parallel}. \tag{22}$$

اینک پایستگی تکانهٔ زاویه ای را نسبت به محور عمود بر صفحهٔ xy و گذرنده از مرکز جرم قرص می‌نویسیم.

$$\left(m\vec{r} \times \vec{v}\right)_z + I\omega = \left(m\vec{r} \times \vec{v'}\right)_z + I\omega', \tag{23}$$

که در آن منظور از $\vec{r}$ بردار واصل بین مرکز قرص و مرکز جرم میله است. با انجام ضرب‌های خارجی خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
m\left[\left(r_\parallel \hat{x}' + r_\perp \hat{y}'\right) \times \left(v_\parallel \hat{x}' + v_\perp \hat{y}'\right)\right]_z + I\omega \;&=\; m\left[\left(r_\parallel \hat{x}' + r_\perp \hat{y}'\right) \times \left(v'_\parallel \hat{x}' + v_\perp \hat{y}'\right)\right]_z + I\omega', \\
m\left(r_\parallel v_\perp - r_\perp v_\parallel\right) + I\omega \;&=\; m\left(r_\parallel v_\perp - r_\perp v'_\parallel\right) + I\omega', \\
I\omega - m r_\perp v_\parallel \;&=\; I\omega' - m r_\perp v'_\parallel. \qquad (24)
\end{aligned}$$

از معادلات (18) و (24) مجهولات اصلی یعنی $v'_\parallel$ و ω' را پیدا می‌کنیم. از معادله (24) داریم:

$$\begin{aligned}
I\omega' \;&=\; I\omega + m r_\perp \left(v'_\parallel - v_\parallel\right) \\
\omega' \;&=\; \omega + \frac{m r_\perp}{I}\left(v'_\parallel - v_\parallel\right). \qquad (25)
\end{aligned}$$

این معادله را در معادلهٔ (18) جایگذاری می‌کنیم تا معادلهٔ درجهٔ دو زیر برای $v'_\parallel$ بدست آید.

$$v'^2_\parallel \left(1 + \frac{m r_\perp^2}{I}\right) + v'_\parallel \left(2\omega r_\perp - \frac{2 m r_\perp^2 v_\parallel}{I}\right) + \frac{m r_\perp^2 v_\parallel^2}{I} - v_\parallel^2 - 2\omega r_\perp v_\parallel = 0. \qquad (26)$$

جوابهای این معادله عبارتند از:

$$v'^{(1)}_\parallel \;=\; v_\parallel, \qquad (27)$$

$$v'^{(2)}_\parallel \;=\; \frac{\frac{m r_\perp^2 v_\parallel}{I} - 2\omega r_\perp - v_\parallel}{1 + \frac{m r_\perp^2}{I}}. \qquad (28)$$

از میان ایندو جواب دومی قابل قبول است.

$$v'_\parallel = \frac{v_\parallel \left(\frac{m r_\perp^2}{I} - 1\right) - 2\omega r_\perp}{1 + \frac{m r_\perp^2}{I}}. \qquad (29)$$

با جایگذاری این جواب در (25) خواهیم داشت:

$$\omega' = \omega - \frac{2 m r_\perp \left(v_\parallel + \omega r_\perp\right)}{I + m r_\perp^2}. \qquad (30)$$

اینک هر دو مؤلفهٔ موازی و عمود $\vec{v}'$ و نیز ω' را بر حسب کمیات پیش از برخورد پیدا کردیم، ولی در دستگاه مختصات لحظه‌ای $x'y'$ که در شکل (۳) نشان داده شده است. در واقع باید بتوانیم $\vec{v}'$ و ω' را در دستگاه ساکن xy بنویسیم.

چون مسئله دو بعدی است مقدار ω' در دستگاه xy تفاوتی با مقدارش در دستگاه $x'y'$ ندارد. در مورد بردار $\vec{v}'$، با توجه به نحوهٔ تبدیل بردارها داریم:

$$\vec{v'} = \begin{pmatrix} v'_\parallel \\ v'_\perp \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix}, \tag{31}$$

که در آن $R(\theta)$ ماتریس دوران بین دستگاه دوران یافته $x'y'$ و دستگاه ساکن xy است.

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{32}$$

با توجه به شکل (۳) داریم:

$$\sin\theta = \frac{Y - y^*}{R}, \qquad \cos\theta = \frac{X - x^*}{R}. \tag{33}$$

بنا بر این مؤلفه‌های دکارتی سرعت مرکز جرم در دستگاه ساکن xy پس از برخورد عبارت خواهند بود از

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = R^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} v'_\parallel \\ v'_\perp \end{pmatrix} = R(-\theta) \begin{pmatrix} v'_\parallel \\ v'_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_\parallel \\ v'_\perp \end{pmatrix}. \tag{34}$$

با جایگذاری $v'_\parallel$ از رابطهٔ (29) و با توجه به $v'_\perp = v_\perp$ خواهیم داشت:

$$v'_x = \left(\frac{X - x^*}{R}\right) \frac{v_\parallel \left(\frac{mr_\perp^2}{I} - 1\right) - 2\omega r_\perp}{1 + \frac{mr_\perp^2}{I}} - \frac{Y - y^*}{R} v_\perp, \tag{35}$$

$$v'_y = \left(\frac{Y - y^*}{R}\right) \frac{v_\parallel \left(\frac{mr_\perp^2}{I} - 1\right) - 2\omega r_\perp}{1 + \frac{mr_\perp^2}{I}} + \frac{X - x^*}{R} v_\perp. \tag{36}$$

تنها چیزی که باقی می‌ماند اینست که $r_\perp$ و $v_\parallel$ در طرف‌های دوم این دو معادله را بر حسب کمیات پیش از برخورد در دستگاه ساکن xy بنویسیم. با توجه به تبدیل بردارها داریم:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_\parallel \\ v_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \tag{37}$$

که بر طبق آن خواهیم داشت:

$$v_\parallel = \frac{X - x^*}{R} v_x + \frac{Y - y^*}{R} v_y. \tag{38}$$

با توجه به روابط $r_\perp = \vec{r} \cdot \hat{y}'$ و $\vec{r} = \vec{R}_{\rm cm} - \vec{R}_{\rm disk}$ و $\hat{y}' = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$، اینک $r_\perp$ را برحسب کمیات پیش از برخورد حساب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} r_\perp &= \frac{(X - x^*)(Y_{\rm cm} - Y)}{R} - \frac{(Y - y^*)(X_{\rm cm} - X)}{R} \\ &= \frac{1}{R}\left[Y_{\rm cm}X - X_{\rm cm}Y + x^*Y - y^*X + X_{\rm cm}y^* - Y_{\rm cm}x^*\right] \end{aligned} \tag{39}$$

توجه داریم که در رابطهٔ بالا X_{cm} و Y_{cm} باید در لحظهٔ برخورد یعنی در t^* حساب شوند.

$$X_{\mathrm{cm}} \;=\; X_{\mathrm{cm}}(t^*) = X_{\mathrm{cm}}(0) + t^* v_x \tag{40}$$

$$Y_{\mathrm{cm}} \;=\; Y_{\mathrm{cm}}(t^*) = Y_{\mathrm{cm}}(0) + t^* v_y \tag{41}$$

با جایگذاری $r_\perp$ و $v_\parallel$ از روابط (38) و (39)، در روابط (30)، (35) و (36) سرعت زاویه‌ای میله و نیز سرعت خطی مرکز جرم آن بر حسب کمیات پیش از برخورد بدست می آیند.

در پایان می‌خواهیم کمی هم راجع به گسترهٔ اعتبار نتایج بدست آمده بحث کنیم. پیش فرض ما در تمامی محاسبات این بود که جرم قرص بسیار زیاد است. در اینجا می‌خواهیم این فرض را بصورت کمّی بیان کنیم. در واقع در نتیجهٔ این فرض، ما از انرژی جنبشی قرص پس از برخورد چشم پوشی کردیم (رابطهٔ 17 را ببینید). یعنی در واقع فرض ما این بوده است که

$$\frac{1}{2}MV'^2 \ll \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \tag{42}$$

اگر M را بسیار بزرگ بگیریم در آنصورت رابطهٔ (21) که می‌گوید $V'_\perp = 0$، باید به صورت $mv_\perp - mv'_\perp = MV'_\perp$ تصحیح شود. مقدار تصحیح‌شده بسیار کوچک خواهد بود بنا بر این سهم عمدهٔ انرژی جنبشی قرص در جملهٔ $\frac{1}{2}MV_\parallel'^2$ است. پس با تقریب خوبی شرط اعتبار نتایج بصورت زیر در می آید:

$$\frac{1}{2}MV_\parallel'^2 \ll \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \tag{43}$$

حال با جایگذاری $V'_\parallel$ از رابطهٔ (22) خواهیم داشت:

$$V_\parallel'^2 = \left(\frac{m(v_\parallel - v'_\parallel)}{M}\right)^2 \ll \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right), \tag{44}$$

که بصورت زیر در می آید:

$$\left|v_\parallel - v'_\parallel\right| \ll \frac{\sqrt{M\left(I\omega^2 + mv^2\right)}}{m}. \tag{45}$$

از طرفی طبق رابطهٔ (29) خواهیم داشت:

$$\left|v'_\parallel - v_\parallel\right| = \frac{2\left|v_\parallel + \omega r_\perp\right|}{1 + \frac{mr_\perp^2}{I}}. \tag{46}$$

که با جایگذاری در رابطهٔ (45)، شرط اعتبار نتایج بصورت زیر در می آید:

$$2\frac{\left|v_\parallel + \omega r_\perp\right|}{1+\frac{m r_\perp^2}{I}} \ll \frac{\sqrt{M\left(I\omega^2+mv^2\right)}}{m}. \tag{47}$$

برحسب جرم قرص، شرط بالا بصورت زیر در می‌آید:

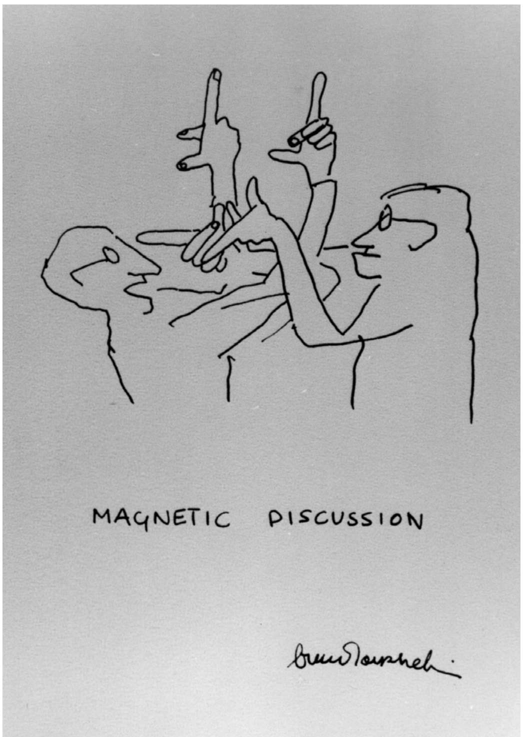
$$M \gg \frac{4m^2(v_\parallel+\omega r_\perp)^2}{(I\omega^2+mv^2)\left(1+\frac{m r_\perp^2}{I}\right)^2}, \tag{48}$$

که همان شرط اصلی اعتبار نتایج بدست آمده را نشان می‌دهد.

برای دست‌یابی به درکی شهودی‌تر، نرم‌افزاری نوشته ایم که برخورد یک میله با یک قرص را شبیه‌سازی می‌کند. این نرم‌افزار را می‌توانید در `http://nano.ipm.ac.ir/~neek` بیابید و از آن استفاده کنید.

سپاسگذاری:

از امیر حسین فتح الهی به خاطر راهنمایی‌های ارزشمند و نیز بازخوانی متن نوشته تشکر می‌کنیم.



Bruno Touschek (1921 - 1978), accelerator physicist
© 2002 Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (Italy)