



نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

علی شکیبا

دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان

ali.shakiba@vru.ac.ir

فصل ۳: زبان‌های منظم و گرامرهای منظم

زبان‌های منظم و اتوماتا

- زبان $L \subseteq \Sigma^*$ را **منظم** گویند هرگاه پذیرنده‌ای متناهی مانند M وجود داشته باشد که $L(M) = L$ باشد.
- پذیرنده‌ی متناهی می‌تواند یک DFA یا یک NFA باشد.
- آیا روش **مختصرتر** برای توصیف زبان‌های منظم وجود دارد؟

عبارت منظم

- یک عبارت منظم؛ ترکیبی از نمادهای Σ ، پرانتزها و عملگرهای $+$ ، $*$ و \cdot است که
 - $+$: اجتماع مانند $a + b$
 - $*$: بستار ستاره‌ای مانند a^*
 - \cdot : الحاق دو رشته مانند $a \cdot b$ یا ab
 - برای مثال؛ $(a + (b \cdot c))^*$
- $(\{a\} \cup \{bc\})^*$
 $\{\lambda, a, bc, aa, abc, bca, bcabc, \dots\}$

عبارات منظم (ادامه)

• الفبای Σ مفروض است:

1. **عبارات منظم پایه** عبارتند از λ ، \emptyset و a برای هر $a \in \Sigma$
2. اگر r_1 و r_2 دو عبارت منظم باشند؛ آنگاه $r_1 + r_2$ ، r_1^* ، $r_1 \cdot r_2$ و (r_1) نیز عبارات منظم خواهند بود.
3. یک رشته تنها در صورتی عبارت منظم است که از به کاربردن **تعداد متناهی** قانون بند (۲) از عبارات منظم پایه، حاصل شود.

مثال

• آیا $(a + b \cdot c)^* \cdot (c + \emptyset)$ یک عبارت منظم است؟
• بله.

• آیا $(a + b+)$ یک عبارت منظم است؟
• خیر.

زبان متناظر با عبارت منظم

• زبان‌های متناظر با عبارات منظم پایه عبارتند از:

شرایط توقف

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\emptyset) = \emptyset \\ L(\lambda) = \{\lambda\} \\ L(a) = \{a\} \end{array} \right.$$

• اگر r_1 و r_2 عبارتهای منظم باشند؛ آنگاه داریم:

تعاریف بازگشتی

$$\left\{ \begin{array}{l} L((r_1)) = L(r_1) \\ L(r_1^*) = L(r_1)^* \\ L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2) \\ L(r_1 \cdot r_2) = L(r_1) \cdot L(r_2) \end{array} \right.$$

مثال

• زبان متناظر با عبارت منظم $r = a^* \cdot (a + b)$ چیست؟

$$\begin{aligned}L(r) &= L(a^* \cdot (a + b)) \\&= L(a^*) \cdot L(a + b) \\&= L(a)^* \cdot (L(a) \cup L(b)) \\&= \{\lambda, a, aa, aaa, \dots\} \cdot (\{a\} \cup \{b\}) \\&= \{\lambda, a, aa, aaa, \dots\} \cdot \{a, b\} \\&= \{a, aa, aaa, aaaa, \dots, b, ab, aab, aaab, \dots\}\end{aligned}$$

قواعد تقدم

- زبان متناظر با $a \cdot b + c$ چیست؟
 - $\{ab, ac\}$ یا $\{ab, c\}$
 - اگر منظور $(a \cdot b) + c$ باشد؛ آنگاه $\{ab, c\}$.
 - اگر منظور $a \cdot (b + c)$ باشد؛ آنگاه $\{ab, ac\}$.
 - طبق قواعد تقدم؛ $\{ab, c\}$ صحیح است.
- به منظور رفع ابهام؛ از قواعد تقدم استفاده می‌کنیم:
 - بستار ستاره‌ای؛ بالاترین اولویت
 - الحاق؛ اولویت بعدی؛
 - اجتماع؛ اولویت نهایی.

مثال

• الفبای $\Sigma = \{0,1\}$ مفروض است. مطلوب است عبارت منظم متناظر با زبان
 $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ has at least one pair of consecutive zeros}\}.$

- عبارت منظم لازم است شامل 00 باشد.
- آنچه قبل و بعد از 00 می‌آید؛ رشته‌های دلخواه از Σ است.
- بنابراین، داریم:

$$(0 + 1)^* 00 (0 + 1)^*$$

مثال

• الفبای $\Sigma = \{0,1\}$ مفروض است. مطلوب است عبارت منظم متناظر با زبان
 $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ has no pair of consecutive zeros}\}.$

- پس از هر 0؛ نمی‌تواند یک 0 وجود داشته باشد:
- 0 آخر مشکلی ندارد.
- پس از 0 لازم است 1 باشد.
- بنابراین، داریم:

$$(1^*011^*)^*(0 + \lambda) + 1^*(0 + \lambda)$$

مثال

• الفبای $\Sigma = \{0,1\}$ مفروض است. مطلوب است عبارت منظم متناظر با زبان $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ has no pair of consecutive zeros}\}$.

- می توان به شیوهی دیگری نیز عبارت منظم را طراحی کرد:
 - عبارت منظم تکراری از 1 ها و 01 ها است؛
 - 0 هم می تواند در انتهای رشته قرار گیرد.
- بنابراین، داریم:

$$(1 + 01)^*(0 + \lambda)$$

مثال

- الفبای $\Sigma = \{0,1\}$ مفروض است. مطلوب است عبارت منظم متناظر با زبان $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ has no pair of consecutive zeros}\}$.

دو عبارت منظم r_1 و r_2 هم‌ارزند هرگاه $L(r_1) = L(r_2)$.

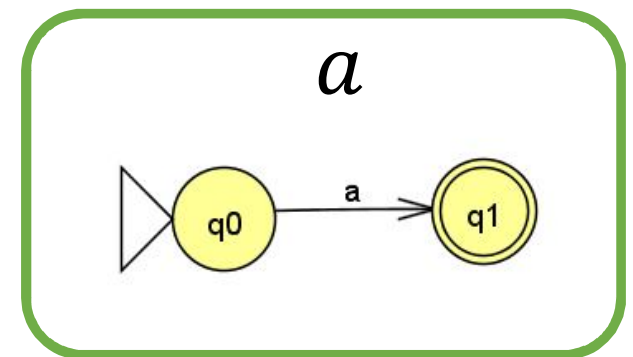
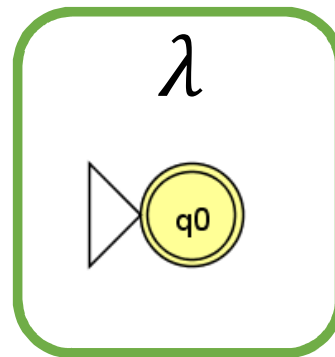
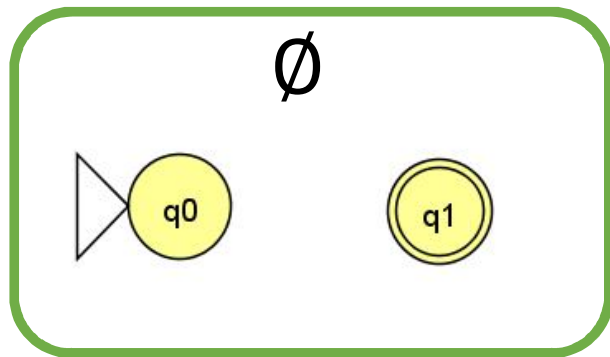
- 0 هم می‌تواند در انتهای رشته قرار گیرد.

- بنابراین، داریم:

$$(1 + 01)^*(0 + \lambda)$$

زبان‌های عبارت‌های منظم \supseteq زبان‌های منظم

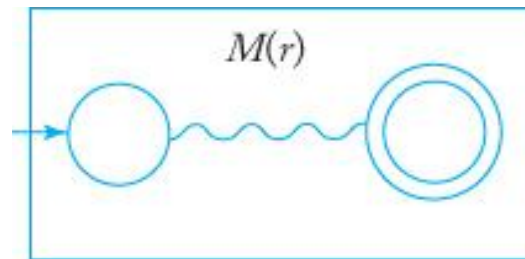
قضیه ۱-۳: عبارت منظم r مفروض است. در این صورت؛ یک NFA مانند M وجود دارد به طوری که $L(M) = L(r)$.



زبان‌های عبارت‌های منظم \equiv زبان‌های منظم

قضیه ۱-۳: عبارت منظم r مفروض است. در این صورت؛ یک NFA مانند M وجود دارد به طوری که $L(M) = L(r)$.

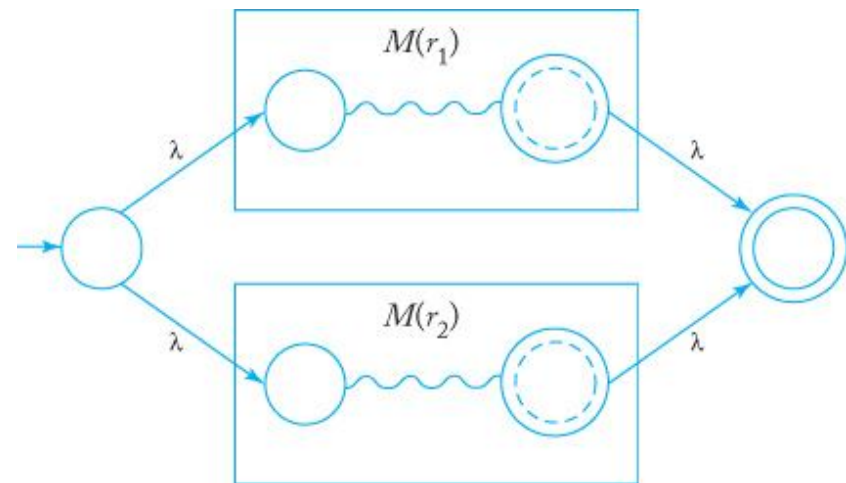
$L(r)$



زبان‌های عبارت‌های منظم \equiv زبان‌های منظم

قضیه ۱-۳: عبارت منظم r مفروض است. در این صورت؛ یک NFA مانند M وجود دارد به طوری که $L(M) = L(r)$.

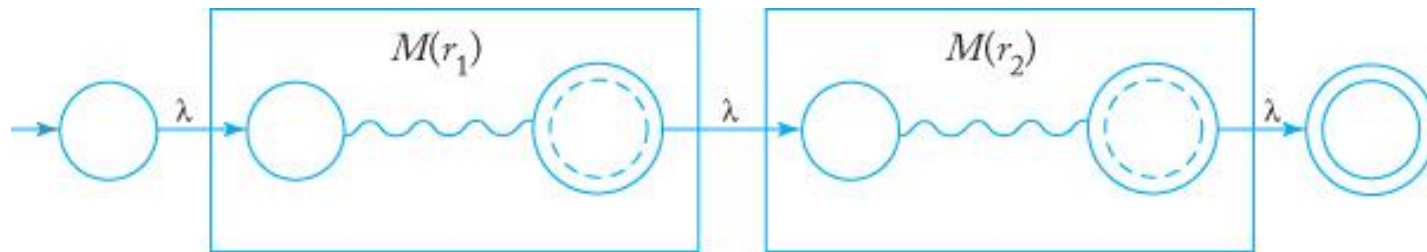
$$L(r_1 + r_2)$$



زبان‌های عبارت‌های منظم \supseteq زبان‌های منظم

قضیه ۱-۳: عبارت منظم r مفروض است. در این صورت؛ یک NFA مانند M وجود دارد به طوری که $L(M) = L(r)$.

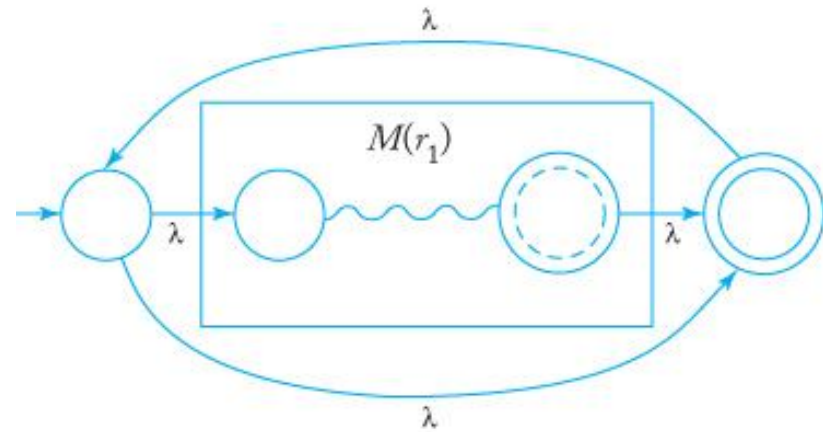
$$L(r_1 \cdot r_2)$$



زبان‌های عبارت‌های منظم \equiv زبان‌های منظم

قضیه ۱-۳: عبارت منظم r مفروض است. در این صورت؛ یک NFA مانند M وجود دارد به طوری که $L(M) = L(r)$.

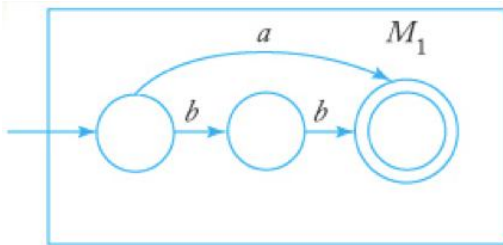
$L(r_1^*)$



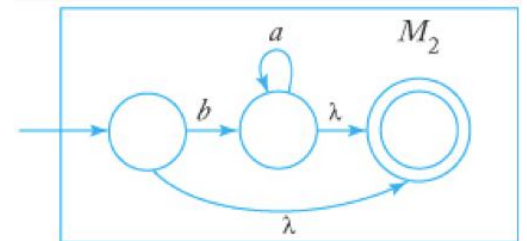
مثال

• مطلوب است NFA پذیرنده $L((a + bb)^*(ba^* + \lambda))$.

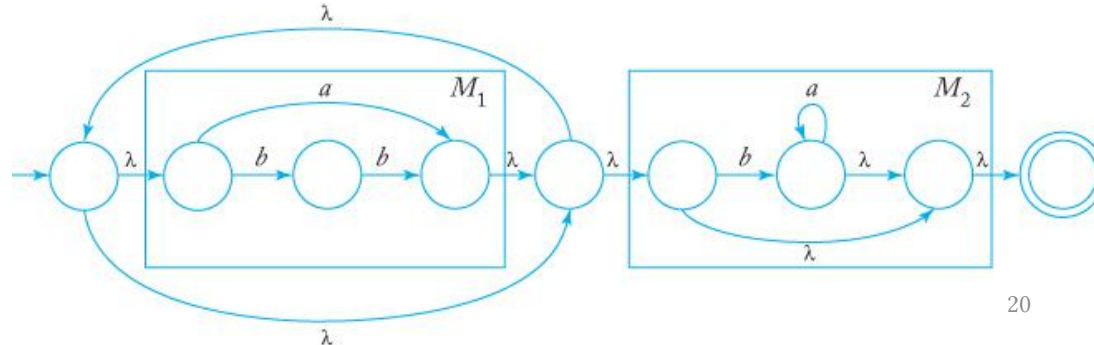
$L(a + bb)$



$L(ba^* + \lambda)$

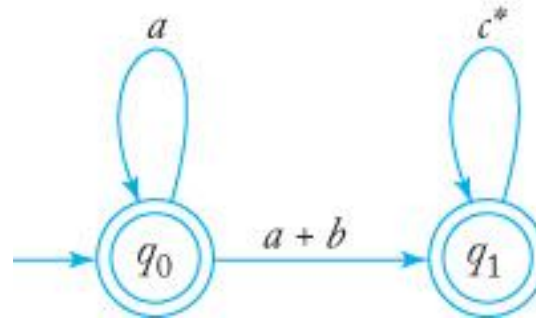


$L((a + bb)^*(ba^* + \lambda))$



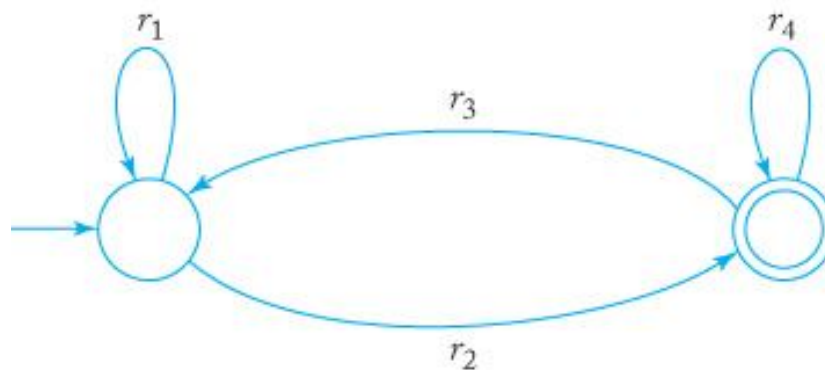
گراف انتقال تعمیم یافته

• گراف انتقالی است که عبارات منظم؛ برچسب یال‌های آن هستند.



گراف انتقال تعمیم یافته (ادامه)

- فرم کانونی گراف انتقال تعمیم یافته با دو حالت



$$r = r_1 * r_2 (r_4 + r_3 r_1 * r_2) *$$