

جزوه آزمایشگاه فیزیک

مقدمه:

در آزمایشگاه هدف اندازه‌گیری عناصر مشخص بنا بر شیوه و روشی خاص و مشخص است. این اندازه‌گیری‌ها با خطاهایی روبرو است که از دقت عدد نهایی یا رابطه نهایی می‌کاهد. انتخاب روش‌های مناسب و حذف عامل‌های خطا با توجه به آزمایش چیزی است که آزمایش‌گر همیشه باید در آزمایش به خاطر داشته باشد. در آزمایش بر خلاف تئوری نمی‌توان چیزی را به دقت گفت و همیشه یک سری عوامل خطا هستند که ما تنها می‌توانیم اثر آنها را کاهش دهیم. از وسایل دقیقتر استفاده کنیم و آزمایش را تکرار کنیم یا روش‌های بهتر برگزینیم. در نهایت یک سری اسلوب خاص داریم که از نظریه آمار و احتمال می‌آیند و برای استفاده علمی از اعداد و مشاهدات آزمایشگر نیاز است. در این جزوه در مورد نحوه انجام آزمایش و تحلیل داده‌های موجود بحث می‌کنیم.

نحوه گزارش کار نویسی:

از آنجایی که باید دیگران از نتایج آزمایشگر باخبر شوند، در نتیجه باید شکل و نتیجه آزمایش تحت قواعد مشخصی گزارش شود. این گزارش باید جامع و مانع باشد. طوری که آزمایشگر نحوه آزمایش خود را در آن به طور کامل مشخص کند. روش‌هایی را که به کار برده است و نتایج آن باید به دقت ذکر شوند، طوری که یک فرد عادی که آزمایش را بخواهد تکرار کند، برایش شیوه آزمایشگر مشخص باشد.

یک گزارش کار تحت قالب زیر نوشته می‌شود:

۱. عنوان: معمولاً در صورت آزمایش آمده است و اسم آزمایش است.
۲. هدف: کمیت یا رابطه یا مشاهده‌ای را که در آزمایش مورد بررسی قرار می‌گیرد، را مشخص می‌کند. ممکن است یک آزمایش چند هدف داشته باشد.
۳. وسایل آزمایش: وسایل مورد نیاز و نوع و مدل و کیفیت و کمیت آن را ذکر می‌کنیم.
۴. شکل آزمایش: شکل اولیه آزمایش را در داخل کادر در این قسمت با ذکر شماره شکل می‌آوریم. در قسمت‌های دیگر هم می‌توان شکل کشید. در عمل شکل بهترین و سریعترین راه برای انتقال مفاهیم و کمیت‌ها است. در شکل ما می‌توانیم نحوه انجام کار را مشخص کنیم و پارامترهای خود را معرفی نماییم. نیازی به کشیدن شکل‌های ترسیمی دقیق با خط کش و پرگار و... و یا شکل‌های ۳ بعدی نیست نیازی به رسم اشکال مولتی متر و یا زمان سنج نیست. اشکال به صورت شماتیک باید رسم شوند، چرا که این عمل وقت را که در آزمایش بسیار مهم است هدر می‌دهد.
۵. شرح کار و نکات عملی: در این قسمت باید شیوه انجام کار توسط آزمایشگر و نکاتی که برای اندازه‌گیری‌های خود به کار بسته است ذکر شود. این قسمت، یکی از مهمترین قسمت‌ها مخصوصاً در آزمایش‌های ایده‌دار است.
۶. جدول داده‌ها: در این قسمت داده‌های آزمایشگر در جدولی با ذکر شماره می‌آیند. یک نمونه از جدول در پیوست آمده است. ذکر داده‌ها به همراه خطا و واحد در جدول نیاز است. داده‌هایی که در قسمت‌های بعد استفاده خواهند شد باید در این قسمت با استفاده از داده‌های عددگیری محاسبه شوند. اصولاً نباید نکته‌ای در گزارش کار باشد که شیوه یا مراحل قبلی آن ذکر نشده باشد.

۷. نمودار : این قسمت در بخش نمودار توضیح داده خواهد شد. باید نمودار شماره داشته باشد و ارجاعات به نمودار مشخص باشد و مشخص باشد که نمودار از روی چه داده‌هایی کشیده شده است.

۸. محاسبات برای نتایج: در این قسمت محاسبات قسمت‌های قبل و محاسبات خطا وجود دارند. در عمل خروجی آزمایش این قسمت است که نتایج در آن آمده است.

۹. عوامل خطا: عوامل ایجاد خطا، را که نمی‌توان با استفاده از وسایل موجود رفع کرد در این قسمت می‌آوریم. دقت شود که این قسمت با نکات عملی متفاوت است. کارهایی را که می‌توان برای کاهش خطا انجام داد و با وسایل موجود ممکن است را در نکات عملی ذکر می‌نماییم.

اصولا کارهایی مثل چک نویسی و پاک نویسی کردن را باید در آزمایشگاه فراموش کرد و تنها خوانا بودن گزارش کار کافی است. شماره صفحه هم نکته ای است که باید رعایت شود تا ترتیب صفحات برای خواننده مشخص باشد.

رعایت نکاتی همچون درج تاریخ و یا نوشتن اسم و یا شماره صفحه در جای مناسب الزامی است. در بخش تئوری آزمایش، روابط و پارامترها باید کامل مشخص باشند. این که با کدام رابطه در پی بدست آوردن خواسته‌های مساله هستید باید واضح باشد. سعی کنید با شکلی شماتیک و ساده پارامترها را مشخص کنید. از کشیدن شکل‌های پیچیده و با جزئیات بپرهیزید.

در بخش شرح کار از گفتن روش‌ها و نکاتی که در صورت سوال به آن‌ها اشاره شده اجتناب کنید. توضیح خیلی مختصر از آن چه انجام داده اید ارائه دهید به همراه اشاره به نکاتی که فکر می‌کنید رعایت آنها به دقت آزمایش کمک می‌کند.

جدول‌ها را می‌توانید در برگه‌های جداگانه رسم کنید. جدول باید مرتب و تمیز باشد. کمیت‌ها، واحدها و خطاها در آن باید مشخص باشد. سعی کنید جدول را قبل از شروع اندازه‌گیری آماده کنید. داده‌های خامی که اندازه‌گیری کرده- اید را مستقیم و بدون تغییر وارد جدول کنید و بعد روی آن‌ها محاسبات انجام دهید. در جدول باید ستون مربوط به داده‌های نمودار موجود باشد. زیر جدول توضیح مختصری در مورد جدول ارائه دهید. شکل‌ها، جداول، نمودارها و روابط باید شماره داشته باشند تا بتوان به آن‌ها ارجاع داد. بهتر است جدول و نمودار متناظر آن را هم شماره انتخاب کنید.

در بخش محاسبات هر عددی که بدست آمده باید به همراه رابطه‌ای که از آن حاصل شده مشخص باشد. در محاسبه مقدار نهایی حتما جایگذاری اعداد را در رابطه یک بار مستقیماً نمایش دهید. جواب نهایی را داخل کادر به همراه خطا و با رعایت ارقام با معنی گزارش کنید. روابط محاسبه خطا را فراموش نکنید و اگر در محاسبات تغییری داده اید (مثل صرف نظر از بعضی خطاها) حتما ذکر کنید. در نهایت به عوامل خطای دخیل در آزمایش اشاره کنید و راهی که برای تصحیح آن به کار برده اید را بیان کنید و یا برآورد از میزان خطای آن ارائه دهید. در این بخش خطاهای سیستماتیک از اهمیت خاصی برخوردارند که در آینده در مورد آن توضیح داده خواهد شد. از اشاره به عوامل خطای بدیهی مثل خطای دید یا خطای وسیله خودداری کنید ولی اگر احساس می‌کنید وسیله اندازه‌گیری خطای سیستماتیک ایجاد می‌کند برآوردی از آن مفید خواهد بود.

آماده سازی setup آزمایش:

هنگام چیدن وسایل و آماده سازی setup:

- موارد واضح را چک کنید مثل اتصال‌ها و اطمینان از کارکرد وسیله
- از محکم بودن فیزیکی setup مطمئن شوید.
- Setup باید انعطاف پذیر چیده شود تا در صورت لزوم به سادگی پارامترها را بتوان تغییر داد.
- از فضای اطراف به طور مناسب استفاده کنید؛ وسایل اندازه‌گیری باید در دسترس و قابل قرائت باشند.

خطا:

سه نوع خطا داریم: ۱. خطای سیستماتیک ۲. خطای تصادفی ۳. خطای کوآنتیزاسیون

۱- خطای سیستماتیک:

گاهی یک دستگاه در هنگام اندازه گیری درست کار نمی کند یا سیستم اندازه گیری در کل به صورتی است که اندازه گیری ها دچار اشکال هستند و عملاً این اشکال را نمی توان بدون تغییر سیستم رفع کرد.

یک آونگ را در نظر بگیرید. فرض کنید در فرمول تئوری آن جرم نقطه‌ای فرض شده باشد. در این صورت دوره تناوب آن در عمل مقداری بیشتر از فرمول تئوری آزمایش خواهد بود که به خاطر نقطه‌ای نبودن جرم است. از طرفی در عمل ما یک نخ برای آویزان کردن جرم داریم که آن هم خطای سیستماتیک دیگری است. روش رفع این خطاها استفاده از نخ بلند است تا طول نوعی جرم نسبت به طول نخ ناچیز گردد و از طرفی استفاده از نخ کم جرم می تواند جرم نخ را کم کند. دقت کنید که ما سیستم اندازه گیری و داده گیری را عوض کردیم.

یک مولتی متر در نظر بگیرید که همه ی ولتاژهای نشان داده شده در آن $1/1$ برابر مقدار واقعی باشد و آزمایشگر این قضیه را نداند. در آن صورت داده‌های آزمایش وی کلاً نادقیق هستند و وی خبر ندارد. بسیاری از خطاهای سیستماتیک به علت استفاده از دستگاه های نامطمئن است که درست کالیبره نشده‌اند. یک مثال دیگر هنگامی است که می‌خواهید جریان در یک مدار را حساب کنید. با قرار دادن مولتی متر در مدار به خاطر مقاومت داخلی غیر صفر آمپرسنج، مدار و در نتیجه جریان ها تغییر خواهند کرد. یک روش کم کردن خطا استفاده از آمپرسنجی با مقاومت داخلی کمتر است. خطاهای سیستماتیکی چون این را باید برآورد کرد طوری که تأثیر آنها محاسبه شده باشد. اگر راهی برای کاهش آنها وجود دارد باید صورت پذیرد در غیر اینصورت به عنوان عوامل خطا باید ذکر شوند و برآوردی از آنها در قسمت محاسبات گزارش کار می آید.

۲- خطای تصادفی:

از یک آزمایشگر بخواهید که یک زمان ثابت را چندبار در شرایط یکسان برای شما اندازه گیری کند. این زمان های اندازه گیری شده یکسان نیستند حتی اگر زمان سنج دقیق باشد. خطای سیستماتیک یک جابجایی ثابت در شرایط یکسان ایجاد می کند. نکته در این است که اندازه گیری فرد دارای تغییراتی است که تابع نویز محیط و سایر فرایندهای تصادفی است! شاید مثال بهتر یک منبع است که قرار است یک ولتاژ dc ثابت تولید کند. به خاطر نویز ایجاد شده توسط محیط این ولتاژ حول مقدار dc یک تغییرات ac دارد. مثلاً فرض کنید ولتاژ اندازه گیری شده ی منبع توسط یک مولتی متر مقادیر زیر باشد:

۱۰/۲	۱۰/۱	۱۰/۳	۱۰/۲	۱۰/۱	۱۰/۱	۱۰/۲	۱۰/۱	۱۰/۳	۱۰/۳	۱۰/۳	۱۰/۲
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

و قرار بوده که این ولتاژ ثابت و برابر ۱۰ باشد. در اینصورت با توجه به داده ها احساس می شود که این ولتاژ حول و حوش ۱۰.۲ است ولی ثابت نیست. بحث و کمی کردن مقدار این ثابت نبودن دقیقاً چیزی است که می خواهیم بررسی کنیم. در واقع چیزی علمی و مورد توافق میان افراد مختلف که با نظریه آمار و احتمال نیز جور در بیاید. شکل زیر این مطلب را روشن می نماید.

در ادامه به نتایج نظریه آمار و احتمال برای محاسبه خطا اشاره می‌نماییم. اگر یک کمیت را چندین بار اندازه‌گیری نماییم، پس از حذف کردن اندازه‌گیری‌های پرت که نتایج پرت داشته‌اند، بهترین تخمین از کمیت، میانگین اندازه‌گیری‌ها است که از روابط زیر بدست می‌آید.

$$\bar{x} = \text{mean}(x) = \frac{\sum x_i}{n}$$

پس از محاسبه میانگین، کمیت زیر بهترین تخمین از خطای میانگین یا همان خطا است که هرچقدر تعداد اندازه‌گیری‌ها بیشتر باشد، این تخمین از خطا بهتر است. ۳ بار اندازه‌گیری و یا حتی در مواردی ۲ بار اندازه‌گیری را کافی فرض می‌نماییم.

$$\Delta \bar{x} = \text{خطای میانگین} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

فرمول بالا به درستی نشان می‌دهد که با یک بار اندازه‌گیری نمی‌توان تخمین از خطا داشت و هرچه تعداد اندازه‌گیری‌ها را افزایش داد می‌توان خطای تصادفی را کمتر کرد. در محاسبه این نوع خطا از فرمول دیگری استفاده نکنید، مگر اینکه در صورت آزمایش ذکر شود مجاز هستید از روش دیگری استفاده کنید. تا اینجا می‌توانیم خطای هر کمیت آزمایش شده را بدست آوریم، حال می‌خواهیم خطای یک کمیت را که تابعی از چند کمیت است، را بیابیم. برای این منظور باید به روش زیر عمل نماییم.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}_1 = \bar{x}_1 \pm \Delta \bar{x}_1 \\ x_2 = \bar{x}_2 \pm \Delta \bar{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n = \bar{x}_n \pm \Delta \bar{x}_n \\ y = f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right\} \bar{y} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \Delta \bar{y} = \sqrt{\sum \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Big|_{x=\bar{x}} \Delta \bar{x}_i \right)^2}$$

مثال: اگر دو مقاومت R_1 و R_2 داشته باشیم و خطای مقاومت سری را بخواهیم، داریم:

$$R = R_1 + R_2$$

$$(\Delta R)^2 = (\Delta R_1)^2 + (\Delta R_2)^2$$

مثال: اگر خطای مقاومت موازی را بخواهیم، داریم:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2(R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)^2$$

$$(\Delta R)^2 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 (\Delta R_1)^2 + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)^2 (\Delta R_2)^2$$

مثال: اگر $y = \frac{A^n B^m}{C(D+E)}$ آنگاه با استفاده از فرمول خطای نسبی برای ضرب داریم که:

$$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 = \left(\frac{n\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{m\Delta B}{B}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + \frac{(\Delta D)^2 + (\Delta E)^2}{(D+E)^2}$$

یکی دیگر از روش‌ها این است که به جای اندازه‌گیری کمیت، چند برابر کمیت را اندازه‌گیری کنیم. با این عمل می‌توانیم همان خطای تصادفی سابق را که برای خود کمیت داشتیم، برای چند برابر کمیت داشته باشیم و این باعث خواهد شد که خطای خود کمیت کم گردد.

مثلا فرض کنید که زمان سنجی با خطای تصادفی 0.05 S قابل اندازه‌گیری است. اگر بگذاریم تا آونگ ۵ بار نوسان کند در آن صورت ۵ دوره تناوب آن با خطای 0.05 S قابل اندازه‌گیری است و خود دوره تناوب خطای 0.01 خواهد داشت

۳- خطای کوآنتیزاسیون:

فرق میان دستگاه پیوسته و گسسته در این خطا است. فرض کنید دستگاهی دقیق است و خطای سیستماتیک نداریم. مثلا یک ولت متر دقیق. خطای تصادفی که به واسطه نویز است هم وجود ندارد. اما ولت متر دیجیتال است و در نمایش تا دقت 0.01^V به ما خروجی می‌دهد. فرض کنید ولتاژ مورد اندازه‌گیری برابر 100.05^V باشد. در آن صورت ولت متر خروجی را به فرض 100.0^V خواهد داد. به این خطای به وجود آمده خطای کوآنتیزاسیون می‌گویند. بحث در مورد اندازه این خطا سخت و پیچیده است. در این آزمایشگاه این خطا برابر واحد resolution سیستم می‌گیریم که در مثال فوق برابر 0.01^V است. توضیح زیر می‌تواند این مطلب را روشن نماید.

فرض کنید در یک خطکش فاصله دو نشانه آنقدر زیاد هست که بتوان وسط دو نشانه را با دقت خوبی تشخیص داد. در این صورت می‌توان اعداد را با دقت مثبت و منفی نصف واحد معرفی کرد ($\pm \frac{1}{2}$ unit). اگر بتوان تقسیمات بیشتری انجام داد، دقت افزایش می‌یابد. در غیر این صورت همان (± 1 unit) را در نظر می‌گیریم.

در آزمایشهایی که پارامتر اندازه‌گیری شده نسبت به واحد بزرگ می‌باشد و یا بازه اندازه‌گیری ما در آزمایش بزرگ باشد نیازی به گزارش نصف واحد نیست حتی اگر نصف واحد قابل تشخیص باشد.

در دستگاه‌های دیجیتال در اکثر موارد خطاهای حدی ذکر می‌شوند که ابتدا باید به آنها توجه کرد چون به نحوه ساخت وسیله بر می‌گردند اما وقتی این خطاها بیان نشوند، خطا را برابر ۱ LSD (یعنی مثبت و منفی کم ارزش‌ترین رقم صفحه نمایش) در نظر می‌گیریم. (LSD=Least significant Digit)

خطای اندازه‌گیری زمان را با خطای زمان سنج یکسان در نظر می‌گیریم.

گزارش عدد نهایی

در گزارش عدد نهایی ارقام با معنی عدد را به تناسب خطای آن انتخاب می کنیم. عدد X را در نظر بگیرید؛ اگر آن را به صورت $x_0 / x_1 \dots x_m \times 10^k$ نمایش دهیم که $x_0 \in \{1, 2, \dots, 9\}$ روش علمی نمایش عدد را داریم. در عدد X تعداد ارقام (اعشاری و صحیح با احتساب صفرهای پایانی) بعد از آخرین صفر از سمت چپ (شمارش از چپ) تعداد ارقام با معنی X است. مثلاً تعداد ارقام با معنی عدد "۱/۲۳۴۰۱۰" ۷، رقم "۰/۰۰۱۲۹" ۳، رقم "۰/۱۰" ۲، رقم است. تعداد ارقام با معنی در نمایش علمی با ارقام با معنی اولیه عدد باید برابر باشد؛ پس: $0.00129 = 1.29 \times 10^{-3}$ و $0.10 = 1.0 \times 10^{-1}$ و $142.210 = 1.42210 \times 10^2$ معمولاً خطا را با یک رقم با معنی و وقتی آزمایش از دقت خوبی برخوردار باشد با دو رقم با معنی هم نمایش می دهند (شما همواره با یک رقم نمایش می دهید). متداول است که عدد نهایی را در نماد علمی و خطا را در همان واحد توانی در کنار هم نمایش می دهند؛ به مثال های زیر توجه کنید. دقت کنید که در این نمایش تعداد ارقام اعشاری خطا و عدد را با گرد کردن و صرف نظر کردن برابر می کنیم.

مثال نمایش عدد:

$$982.836 \pm 0.12 = (9.8284 \pm 0.0012) \times 10^2$$

$$41.7 \pm 0.00074 = (4.170000 \pm 0.000074) \times 10^1$$

$$87380 \pm 762 = (8.74 \pm 0.08) \times 10^4$$

یک مثال برای روشن شدن هر یک از خطاها:

یک خط کش در نظر بگیرید. واحد نمایش این خط کش برابر ۱mm است. این خط کش به ازای هر درجه سانتی گراد در هر یک متر ۰/۱mm افزایش طول دارد. دما ۱۰ درجه تغییر کرده است. با این خط کش طولی را ۳ مرتبه اندازه گرفته ایم و اعداد زیر را بدست آورده ایم. میان خطوط هر واحد خط کش مشخص است و کاربر قادر به گرد کردن درست عدد است. هر یک از انواع خطاها را حساب کنید.

۱۰۰۱mm	۱۰۰۲mm	۱۰۰۳mm
--------	--------	--------

خطای کوآنتیزاسیون با توجه به توضیحات سوال برابر واحد خط کش یعنی ۱ mm (بازه اندازه گیری در آزمایش بزرگ است نیازی به گزارش نصف واحد نیست) است.

خطای تصادفی برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{1001 + 1002 + 1003}{3} = 1002 \text{ mm}$$

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{(1001 - 1002)^2 + (1002 - 1002)^2 + (1003 - 1002)^2}{3(3-1)}} = \frac{1 \text{ mm}}{\sqrt{3}} = 0.6 \text{ mm}$$

خطای سیستماتیک هم برابر است با:

$$.1 \text{ mm}/^\circ\text{C} \times \frac{1002 \text{ mm}}{1000 \text{ mm}} \times 10^\circ\text{C} \cong 1 \text{ mm}$$

نمودارها

نمودارها در کار آزمایشگاهی از چند جنبه اهمیت دارند:

- برای محاسبه ی رابطه بین کمیت ها مثلا اگر X و Y رابطه ای به شکل $y = a + bx$ داشته باشند، می توان با رسم نمودار Y برحسب X مقادیر a و b را بدست آورد. این جنبه از اهمیت کمتری برخوردار است زیرا با حسابگرها می توان این کار را بهتر انجام داد.
- برای کمک های بصری تحلیل رفتار یک سری داده روی جدول به مراتب کار مشکل تری است تا روی نمودار. برای مثال پیدا کردن نقاط گذار یا مقادیر کمینه و بیشینه و نقاط عطف یا مقایسه با تئوری، نمودارها گزینه بهتری هستند.
- برای نشان دادن ارتباط بین دو کمیت و استفاده از آن، به عنوان مثال منحنی مشخصه دیود (ارتباط جریان و ولتاژ آن) که در آزمایش های مدار گاه نیاز می شود، روی نمودار آسان تر قابل استفاده است تا اینکه روی جدول باشد. یا مثلا اگر برای سنجش شدت نور از منحنی مشخصه مقاومت نوری (مقاومت آن برحسب شدت نور فرودی تنظیم می شود) استفاده می کنیم. پیدا کردن شدت نور متناظر با مقدار خاصی مقاومت روی نمودار به مراتب راحت تر است تا در جدول.

نکاتی در رسم نمودارها

روی نمودارها باید کمیت های هر محور و واحد آن مشخص باشد. نقاط روی نمودار باید کاملا واضح باشد. حتما بهترین منحنی که به داده ها فیت می شود بطور هموار رسم شود. نقاط خاصی که از شما خواسته شده که بدست آورید (مثلا نقطه بیشینه) را روی نمودار مشخص کنید. روی نقاط مناسبی از محورها عدد متناظر را یادداشت کنید. (مثلا هر ۵۰ خانه یک بار) نمودار حتما باید مقیاس شده باشد تا نقاط خیلی به هم نزدیک نباشند و داده های بیشتر از دو- سوم هر یک از محورها را بپوشانند. توضیح مختصری زیر نمودار ارائه دهید. نقاط پرت که در روی نمودار بدست می آیند مشخص شوند. اعدادی مثل ۱ ۲ ۳ و ... ۱۰ ۲۰ ۳۰ داشته باشید تا ۱۰۰۰۰ ۲۰۰۰۰ ۳۰۰۰۰ و ... ۰/۰۰۰۱ و ۰/۰۰۰۲ و خطوط خطا را بصورت بازه هایی حول نقاط نمایش دهید (مثل نموداری که در پیوست به شما داده شده است). درانتخاب پارامترهای هر کدام از محورها، بهتر است به نوعی علت را روی محور افقی و معلول را روی محور عمودی نشان دهید.

انواع کاغذ نمودار

در فیزیک سه نوع کاغذ نمودار بیشتر متداول است که در جدول زیر آمده است. نوع میلیمتری که درجه بندی محورهای آن ساده است؛ نوع لگاریتمی که درجه بندی محورهای آن لگاریتمی است و نوع نیم لگاریتمی که فقط درجه بندی محور عمودی آن لگاریتمی است. از نوع میلی متری برای رسم انواع داده استفاده می کنیم؛ همچنین برای نشان دادن ارتباط خطی بین دو کمیت این کاغذها کاربرد دارند.

رسم نمودار

سه نوع رابطه میان داده ها را در این آزمایشگاه ما به طور معمول بررسی می کنیم.

شکل رابطه	نوع کاغذ	مشخصه در ماشین حساب	نوع رابطه	
$y = a + bx$	میلی متری	Lin	linear	خطی
$y = ae^{bx}$	نیم لوگ	Exp	Exponential	نمایی
$y = ax^b$	تمام لوگ	Pwr	Power	توانی

از نوع تمام لگاریتمی برای تحقیق رابطه $y = ax^b$ بین دو مقدار X و Y استفاده می کنیم، با توجه به رابطه داریم $\log y = \log a + b \log x$ و بدین ترتیب با انتخاب دو نقطه روی بهترین خط مثل (x_1, y_1) و (x_2, y_2) مقدار b از این رابطه بدست می آید:

$$b = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$$

و مقدار a همان مقدار تابع در $x=1$ خواهد بود که در صورت نبودن این نقطه می توان با استفاده از یک نقطه دلخواه روی نمودار و رابطه، مقدار a را با داشتن مقدار b بدست آورد. از نوع نیم لگاریتمی برای تحقیق رابطه $y = ae^{bx}$ بین دو مقدار x و y استفاده می کنیم، با توجه به رابطه داریم: $\ln y = \ln a + bx$ و بدین ترتیب با انتخاب دو نقطه روی بهترین خط مثل (x_1, y_1) و (x_2, y_2) مقدار b از این رابطه بدست می آید:

$$b = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1}$$

و مقدار a همان مقدار تابع در $x=0$ خواهد بود که در صورت نبودن این نقطه می توان با استفاده از یک نقطه دلخواه روی نمودار و رابطه، مقدار a را با داشتن مقدار b بدست آورد.

با وارد کردن داده ها در مد موردنظر در ماشین حساب خود ماشین حساب ضرایب موردنظر به همراه Γ که ضریب همبستگی داده ها است را به شما می دهد. این ضریب میزان خطی بودن داده ها است و هرچه به ۱ یا -۱ نزدیکتر باشد رگرسیون و خطی بودن داده ها بالاتر است.

برای رسم داده ها در هر کاغذ نمودار ابتدا باید در کاغذ مناسب داده ها، شماره نمودار و ارجاع به جدول را نوشت. سپس فلش هریک از محورها را رسم می کنیم و واحد و کمیت آن محور را روی آن قسمت می نویسیم. برای بدست آوردن رابطه داده های خطی با استفاده از کاغذ نمودار باید ابتدا کاغذ نمودار را scale بندی کرد. بدین معنا که کاغذ را درجه بندی می کنیم تا داده ها را به آن وارد کنیم. داده ها باید بیشتر قسمت های افقی و عمودی کاغذ را بپوشانند. به فرض اگر داده های محور X بین ۱۰ تا ۱۴ هستند ابتدای کاغذ را ۱۰ می گذاریم و انتهای آن را ۱۵، تا هم عددها را راحت تر پیدا کنیم و هم داده ها کاغذ را بپوشانند. پس از وارد کردن داده ها خطای داده ها را وارد می کنیم. بدین ترتیب که به اندازه خطای X در راستای X خطی به سمت راست و خطی به سمت چپ حول داده رسم می کنیم و همین کار را برای خطای Y نیز انجام می دهیم. با این کار یک + در کاغذ نمودار به ازای هر داده خواهیم داشت. گاهی اوقات خطا بقدری کم است (کمتر از نصف واحد در نمایش روی کاغذ) که از نمایش آن خودداری می کنیم و بالای کاغذ نمودار می نویسیم که خطوط خطا غیرقابل نمایش است. خطوط خطایی که قابل نمایش هستند باید رسم شوند.

پس از آن بهترین خط ممکن را از داده می گذرانیم. این خط خوب است که از مرکز ثقل نقاط بگذرد. سپس کوچکترین مستطیلی را رسم می کنیم که همه داده ها و خطوط خط را در بر گیرد و دو ضلع آن موازی بهترین خط باشد. دو قطر این مستطیل را نیز رسم می کنیم بهترین خط، شیب و عرض از مبدا را می دهد. نحوه حساب کردن شیب به این صورت است که دو نقطه مناسب با فاصله ی زیاد را روی کاغذ نمودار در نظر می گیریم. داریم

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

برای حساب کردن عرض از مبدا هم اگر صفر محور X قابل دیدن باشد که عرض از مبدا را می خوانیم. در غیراینصورت چون شیب را داریم در یک نقطه از رابطه $y = a + bx$ استفاده می کنیم و عرض از مبدا به دست می آید. خوب است که این محاسبات روی کاغذ گزارش کار انجام گردد و نه روی کاغذ نمودار. دو نقطه محاسبه شیب را هم در کاغذ نمودار رسم می کنیم. گاهی داده هایی وجود دارند که پرت هستند و از بهترین خط به طور استثنایی فاصله دارند. کنار این داده ها می نویسیم داده پرت و در محاسبه شیب چه در نمودار و چه در ماشین حساب از آنها استفاده نمی کنیم. شیب و عرض از مبدا دو قطر را نیز حساب می کنیم. آنها را با b_{\max} و b_{\min} و a_{\max} و a_{\min} نمایش می دهیم. خطای شیب و عرض از مبدا برابر است با :

$$\Delta b = \frac{1}{2}(b_{\max} - b_{\min}), \Delta a = \frac{1}{2}(a_{\max} - a_{\min})$$

بهتر است که شیب و عرض از مبدا و خطای آنها با ماشین حساب محاسبه شود مگر اینکه در صورت مسئله ذکر شده باشد که خطا از روش خاصی مثلاً از نمودار حساب گردد.

$$\Delta b = b \sqrt{\frac{1}{n-2} \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right)}$$

For linear and power and exponential

$$\Delta a = \Delta b \sqrt{\bar{x}^2 + \sigma_x^2}$$

For linear

$$\Delta a = a \Delta b \sqrt{\bar{x}^2 + \sigma_x^2}$$

For exponential

$$\Delta a = a \Delta b \sqrt{\sum_{i=1:n} \frac{\ln(x)}{n} + \sigma_{\ln(x)}^2}$$

For power

نکته جالب این است که ماشین حساب هم در مد توانی به جای میانگین X به شما میانگین $\ln(x)$ را خواهد داد. همین اتفاق برای واریانس نیز می افتد.

گاهی اوقات از شما خواسته می شود که ببینید رابطه دو کمیت به چه شکل است. در ابتدا ممکن است که یک یا چند تا از کاغذهای نمودار اصلاً نتوانند فیزیک آن رابطه را به ازای شرایط خاص مثلاً برای $X=0$ یا $x \rightarrow \infty$ ارضا نمایند. در آن صورت نیازی به چک کردن برای آن کاغذهای نمودار نیست. بعد از آن رگرسیون تا حدی در صورت نداشتن داده های پرت به ما برای چک کردن نوع رابطه کمک می کند. اما اگر رگرسیون در دو کاغذ نزدیک هم است نمی توان از روی رگرسیون انتخاب کرد چون ممکن است که در یکی از کاغذها تقعر خاصی برای داده ها داشته باشیم و در نتیجه داده ها در آن کاغذ رابطه غیرخطی دارند ولی رگرسیون در این مورد بی تفاوت عمل کرده است. در این صورت داده ها

را حتما باید در کاغذ نمودار رسم کنیم و از روی تقعر و سایر موارد کاغذ و رابطه مناسب را انتخاب کنیم. (مثلا یک رابطه توانی با توان مثبت در کاغذ نیم لوگ تقعر رو به پایین دارد).

تعداد داده گیری:

هنگامی که می‌خواهیم نوع رابطه را پیدا کنیم باید تعداد داده گیری را بالا ببریم تا پیدا کردن نوع رابطه دقیق تر باشد. برای آزمایش‌هایی که می‌خواهیم رفتار تابع در بازه‌ای را ببینیم باید در کل بازه داده گیری کنیم و نه، تنها در یک محدوده خاص. در نقاط خاص تابع مثلا نقاط ماکزیمم یا مینیمم یا نقطه عطف یا نقطه شکستگی باید تعداد داده‌گیری را بالا ببریم. هنگامی که از ترکیب داده‌ها در قسمت‌های بعدی می‌خواهیم استفاده کنیم باید تعداد داده گیری را بالا ببریم. مثلا فرض کنید که از شیب نمودار در هر نقطه می‌خواهیم استفاده کنیم. در آن صورت تعداد را باید بالا ببریم تا نمودار دقیق تر مشخص باشد.

تکرار مجدد چند نکته:

- معمولا در آزمایش‌هایی که از دقت خوبی برخوردارند و نقاط خطای کمی دارند استفاده از روش کمترین مربعات مناسب تر است ولی در آزمایش‌هایی که خطای نقاط زیاد است از روش چسبی برای تخمین خطای شیب استفاده می‌کنند.
- توجه کنید که تا نمودار رسم نشود نمی‌توان در مورد نقاط پرت قضاوت کرد پس محاسبه شیب با ماشین حساب بدون رسم نمودار گاهی جواب نادرست می‌دهد.
- انتخاب اینکه چه تعداد اندازه گیری باید انجام شود بسته به نوع آزمایش دارد ولی می‌توان گفت نمودار با کمتر از ۵ نقطه عملا فاقد ارزش است.
- در نمودارهایی که داده‌ها بخوبی روی خط قراردارند اندازه گیری بیش از حد جز اتلاف وقت تأثیری در آزمایش و نتایج ندارد. شاید ۸-۷ نقطه کافی باشد. (این قاعده کلی نیست).

نکته آخر:

حرف‌هایی که ناظرین در امتحان می‌زنند یا در صورت سوال آزمایش آمده است بر تمام مطالب این جزوه مقدم است مثلا اگر در جزوه آمده باشد که هر عدد خطا می‌خواهد ممکن است طراح به هر دلیلی یک سری اعداد را با خطا نخواهد و شما می‌توانید آنها را بدون خطا بنویسید.

مثالی از یک جدول:

$l(\text{cm}) \pm 1\text{cm}$	$10t_1(\text{s}) \pm .1\text{s}$	$10t_2(\text{s}) \pm .1\text{s}$	$10t_3(\text{s}) \pm .1\text{s}$	$T_{ave}(\text{s})$	$\Delta T_{ave}(\text{s})$
۱۰	۱۰/۰	۱۰/۲	۱۰/۴	۱/۰۲	۰/۰۱
۲۰	۱۴/۵	۱۳/۹	۱۴/۲	۱/۴۲	۰/۰۲
۳۰	۲۰/۰	۱۹/۶	۲۰/۴	۲/۰۰	۰/۰۲
۴۰	۳۰/۲	۳۰/۲	۳۰/۲	۳/۰۲	۰/۰۱

مثالی از محاسبه خطا:

$$z = x^n y^m \Rightarrow \Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \Delta y\right)^2} =$$

$$\sqrt{(nx^{n-1}y^m \Delta x)^2 + (mx^n y^{m-1} \Delta y)^2} =$$

$$x^n y^m \sqrt{\left(\frac{n \Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{m \Delta y}{y}\right)^2}$$

$$z = \sqrt{\left(\frac{n \Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{m \Delta y}{y}\right)^2} \Rightarrow \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2 = \left(\frac{n \Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{m \Delta y}{y}\right)^2$$

خطای کمیت بخش بر کمیت را خطای نسبی می گویند، به رابطه ی خوب بدست آمده برای خطای نسبی دقت کنید. در این رابطه X و Y مستقل است.

می خواهیم مقدار و خطای $z = e^x y$ را با فرض اینکه $\bar{x} = 1, \Delta \bar{x} = .05, \bar{y} = 2, \Delta \bar{y} = .1$ حساب کنیم. داریم که:

$$\bar{z} = e^{\bar{x}} \bar{y} = e^1 \times 2 = 5.4$$

$$\Delta \bar{z} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 (\Delta \bar{x})^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 (\Delta \bar{y})^2} =$$

$$\sqrt{(e^{\bar{x}} \bar{y})^2 \times (0.05)^2 + (e^{\bar{x}})^2 \times (.1)^2} =$$

$$\sqrt{(e^1 \times 2)^2 \times (.05)^2 + (e^1)^2 \times (.1)^2} = .3$$

مثال هایی از نحوه نمایش عدد

خطا پس از بازنویسی	عدد پس از بازنویسی	خطای بدست آمده	عدد بدست آمده
8×10^1	102×10^1	78	1024
.02	234.79	0.023	234.786