



# گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

[www.konkur.in](http://www.konkur.in)

ریاضی ۲ فصل ۲

مؤسسه آموزشی فرهنگی

## آمار تیزتر کیبی:

شاخه‌ای از ریاضیات که در آن روش‌هایی برای بدست آوردن تعداد حالات ممکن برای انجام یک عمل، بدون شمارش معرفی می‌گردد.

### فاکتوریل:

اگر  $n$  یک عدد طبیعی باشد:

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 1$$

$$\text{نتیجه: } n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \dots$$

$$0! = 1 \text{ : فرار داد}$$

### اصل جمع:

اگر عملی به  $n_1$  طریق و عمل دیگری به  $n_2$  طریق قابل انجام باشند و انجام همزمان این دو عمل، غیرممکن باشد، تعداد حالات وقوع عمل اول یا عمل دوم برابر است با  $n_1 + n_2$ . مثلاً اگر هشت پیراهن آبی و ۱۲ پیراهن قرمز داشته باشیم به ۲۰ حالت می‌توانیم پیراهن بپوشیم.

### اصل ضرب:

اگر عملی به  $n_1$  طریق و عمل دیگری به  $n_2$  طریق قابل انجام باشد، به فرض آنکه وقوع این اعمال بر یکدیگر تأثیری نداشته باشد تعداد حالات انجام همزمان این دو عمل برابر است با  $n_1 \times n_2$ . مثلاً اگر ۵ پیراهن و ۴ شلوار داشته باشیم به ۲۰ طریق می‌توان لباس پوشید.

### جایگشت $n$ شیء متمایز:

حالات مختلف قرار گرفتن  $n$  شیء متمایز در کنار یکدیگر را جایگشت آن  $n$  شیء می‌نامند. در واقع حالات جابه‌جاشدن  $n$  شیء در یک ردیف را جایگشت آن  $n$  شیء می‌نامند. مثلاً جایگشت سه حرف  $a, b, c$  عبارت است از  $abc, acb, bac, bca, cab, cba$

قضیه: تعداد جایگشت های  $n$  شیء متمایز که در یک ردیف قرار گرفته باشند برابر است با:  $n!$

تذکر: در این درس هرگاه صحبت از جایگشت می‌شود، منظور تعداد جایگشتهاست.

مثال: با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ به چند طریق می‌توان اعداد هفت رقمی بدون ارقام تکراری نوشت به طوری که زوج باشد؟

حل:

برای آنکه عدد زوج باشد باید رقم سمت راست آن زوج باشد.

در حالتی که تکرار ارقام جایز نیست، باید نسبت به وضعیت صفر مسأله را به دو حالت تقسیم کرد. چون اگر صفر در سمت چپ قرار بگیرد عدد هفت رقمی نخواهد بود لذا مسأله را در دو حالت بررسی می‌کنیم.

حالت اول حالتی است که صفر در سمت راست قرار دارد و لذا دیگر در سمت چپ قرار نخواهد گرفت و حالت دوم حالتی است که ارقام زوج دیگر در سمت راست قرار بگیرند.

$$\left. \begin{array}{cccccccc} \underline{6} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} & \underline{1} \\ & & & & & & \cdot \\ \underline{5} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} & \underline{3} \\ & & & & & & \underline{2} \\ & & & & & & \underline{4} \\ & & & & & & \underline{6} \end{array} \right\} \rightarrow \text{جواب} = 6! + 15 \times 5!$$

مثال: جواب مثال قبلی در حالتی که ارقام امکان تکرار شدن داشته باشند را به دست آورید.

حل:

$$\begin{array}{cccccccc} \underline{6} & \underline{7} & \underline{7} & \underline{7} & \underline{7} & \underline{7} & \underline{4} & \rightarrow \text{جواب} = 6 \times 7^5 \times 4 \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & & 4 & \\ & & & & & & 6 & \end{array}$$

در این حالت چون امکان تکرار وجود دارد، به دو حالت کردن مسأله نیاز نیست، چون هم‌چنان باید مواظب باشیم صفر در سمت چپ عدد قرار نگیرد.

مثال: با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷ چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۳۵۰۰ می‌توان ساخت به طوریکه تکرار ارقام جایز است؟

حل: با تقسیم کردن اعداد بزرگتر از ۳۵۰۰ به دو گروه خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{cccc} \underline{1} & \underline{3} & \underline{8} & \underline{8} \\ \underline{2} & \underline{5} & & \\ & \underline{6} & & \\ & \underline{7} & & \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \underline{4} & \underline{8} & \underline{8} & \underline{8} \\ \underline{4} & & & \\ \underline{5} & & & \\ \underline{6} & & & \\ \underline{7} & & & \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \times 3 \times 8 \times 8 \\ 4 \times 8 \times 8 \times 8 \end{array} \rightarrow \text{تعداد اعداد: } 3 \times 8^2 + 4 \times 8^3 \quad (-1)$$

خود ۳۵۰۰ را نمی‌خواهد

مثال: با حروف کلمه «جمهوری» چند کلمه سه حرفی با حروف متمایز می‌توان تشکیل داد که حرف اولش نقطه نداشته باشد؟

حل:

$$\begin{array}{cccc} \underline{4} & \underline{5} & \underline{4} & \rightarrow = 4 \times 5 \times 4 = 80 \\ & & \text{م} & \\ & & \text{ه} & \\ & & \text{و} & \\ & & \text{ر} & \end{array}$$

دقت کنید که ی در اول کلمه نقطه‌دار می‌شود.

مثال: تعداد حالاتی که می‌توان چهار کتاب ریاضی مختلف و سه فیزیک مختلف یک در میان در قفسه کنار هم قرار داد چقدر است؟ اگر چهار کتاب ریاضی و چهار کتاب فیزیک موجود بود جواب مسأله چه می‌شد؟

حل:

$$\begin{array}{cccccccc} \underline{ر} & \underline{ف} & \underline{ر} & \underline{ف} & \underline{ر} & \underline{ف} & \underline{ر} & \rightarrow 4! \times 3! \\ \underline{ف} & & & & & & & \\ \underline{ر} & \underline{ر} & \underline{ف} & \underline{ر} & \underline{ف} & \underline{ر} & \underline{ف} & \rightarrow 4! \times 4! \times 2 \end{array}$$

مثال: چند عدد سه رقمی وجود دارد که شامل عدد ۲ باشد؟

حل: به جای دسته بندی مسأله به سه حالت بهتر است تنها حالت غیر قابل قبول را از بین حالات حذف کنیم:

اعداد فاقد ۲:  $8 \times 9^2$

اعداد شامل ۲:  $900 - 8 \times 9^2 = 9(100 - 72) = 9 \times 28 = 252$

## قضیه طناب پیچ:

تعداد جایگشت  $n$  شیء متمایز که در آن  $r$  شیء معین کنار هم قرار گرفته باشند برابر است با  $(n-r+1)!r!$  و تعداد جایگشت های  $n$  شیء معین و متمایز که در آن  $r$  شیء معین کنار هم قرار نداشته باشند، برابر است با  $n!-(n-r+1)!r!$

مثال: با حروف  $a, b, c, d, e, f$  چند کلمه شش حرفی می توان نوشت به طوری که حتماً  $a, b$  کنار هم باشند و  $c, d$  کنار هم نباشند؟

حل:

$(ab)c, d, e, f \rightarrow$  تعداد اعدادی که  $a, b$  کنار هم هستند  $= 5! \times 2!$

$(ab)(cd)ef \rightarrow$  تعداد اعدادی که  $a, b$  کنار هم هستند و  $c, d$  کنار همند  $= 4! \times 2! \times 2!$

$= 5! \times 2! - 4! \times 2! \times 2!$  تعداد اعدادی که  $a$  و  $b$  کنار همند و  $c$  و  $d$  کنار هم نیستند

مثال: ۵ نفر  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  و  $e$  می خواهند سخنرانی کنند. به چند حالت بین فرد  $a$  و  $b$  فقط یک نفر سخنرانی می کند؟

حل:

$a \square b \Delta *$

۳ نفر می توانند بین  $a, b$  صحبت کنند

جایشگت ۳ شیء

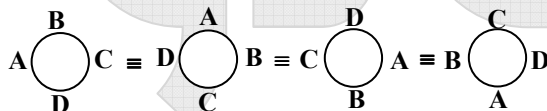
$$3! \times 2 \times 2 = 36$$

جابجا شدن  $a, b$

افرادی که بین  $a, b$  صحبت می کنند

## جایگشت با اشیاء دایره ای:

اگر ابتدا و انتهای یک صف را به هم متصل کنیم و یا  $n$  شیء را دور یک میزگرد قرار دهیم، جایگاه شروع و پایان بی معنی می شود. در واقع چهار حالت زیر با هم معادلند و یک حالت محسوب می شوند:



لذا اگر اشیاء به صورت دایره ای چیده شود فرد اولی که تصمیم به نشستن می گیرد، دارای ۱ انتخاب است چون بین مکانهای نشستن هیچ تفاوتی نیست، اما بقیه افراد به نسبت این فرد دارای مکان خواهند شد که  $n-1$  نفر باقیمانده دارای  $(n-1)!$  جایگشت هستند.

تذکر: اگر اشیاء قابل وارونه سازی باشند (مانند دسته کلید، دست بند، گردنبند و تسبیح) تعداد جایگشت  $n$  شیء برابر است با

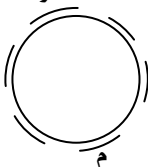
$$\frac{(n-1)!}{2}$$

در این حالت جهت چرخش نیز فاقد اهمیت می باشد.

مثال: اگر رئیس، معاون و چهار کارمند مختلف بخواهند دور یک میز بنشینند، این کار به چند طریق امکان پذیر است هرگاه:

الف) رئیس مقابل معاون باشد:

حل: اگر رئیس بنشیند، معاون فقط می تواند در مکان مقابل رئیس بنشیند و ۴ کارمند به دلخواه می توانند بنشینند. (یعنی مسئله تبدیل به صف می شود.)



$$4! = 24$$



**انتخاب:**

تا اینجا در مسائل کلیه داده‌های مسأله در شمارش حالات ممکن مورد استفاده قرار می‌گرفت. حال به بررسی شمارش جایگشت حالاتی می‌پردازیم که در آن قسمتی از مجموعه داده شده انتخاب شده باشد. در اینجا ابتدا باید تعداد حالاتی که می‌توان اشیاء را انتخاب کرد را به دست آورد (ترکیب) و سپس جایگشت اشیاء انتخاب شده را محاسبه کرد (تبدیل).

**تبدیل:**

تعداد حالات قرار گرفتن  $r$  شیء که از بین  $n$  شیء انتخاب شده‌اند در کنار یکدیگر، جایگشت  $r$  شیء از  $n$  شیء یا تبدیل  $r$  تایی  $n$  شیء می‌نامند. در واقع تبدیل، تعداد حالات انتخاب  $r$  شیء از میان  $n$  شیء می‌باشد به طوری که ترتیب قرار گرفتن اشیاء کنار یکدیگر، حائز اهمیت باشد.

قضیه: تعداد تبدیل‌هایی  $r$  شیء از  $n$  شیء برابر است با:

$$P(n, r) = (n)_r = n(n-1) \times \dots \times (n-r+1) = n(n-1) \times \dots \times (n-r+1) \times \frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

**ترکیب:**

تعداد حالات انتخاب  $r$  شیء از میان  $n$  شیء که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد را ترکیب  $r$  تایی  $n$  شیء یا ترکیب  $r$  از  $n$  می‌نامند و با  $\binom{n}{r}$  یا  $c(n, r)$  نشان می‌دهند.

به عبارت دیگر ترکیب  $r$  تایی  $n$  شیء یافتن زیرمجموعه‌های  $r$  عضوی یک مجموعه‌ی  $n$  عضوی است.

ارتباط بین تعداد حالات انتخاب با ترتیب  $r$  شیء از میان  $n$  شیء با تعداد حالات انتخاب بدون ترتیب  $r$  شیء از میان  $n$  شیء به صورت زیر است:

$$P(n, r) = r! \times c(n, r) \Rightarrow c(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

**نکته:** تعداد ترکیب‌های  $r$  تایی  $n$  شیء که شامل  $k$  شیء معین باشند برابر است با  $\binom{n-k}{r-k}$  و تعداد ترکیب‌های  $r$  تایی  $n$  شیء

که فاقد  $k$  شیء معین باشند برابر است با  $\binom{n-k}{r}$   $n-k \geq r$

مثال: با حروف کلمه‌ی **computer** چند کلمه پنج حرفی می‌توان نوشت که در آن  $o$  و  $m$  حتماً موجود باشند؟

حل: ابتدا ۳ حرف دیگر که لازم داریم را انتخاب کرده، سپس همه را در یک ردیف می‌چینیم.

مؤسسه آموزشی فرهنگی

$$\binom{6}{3} \times 5!$$

جایگشت ۵ حرف  $\swarrow$  ۳ حرف دیگر  $\searrow$

مثال: با حروف کلمه **History** چند کلمه چهار حرفی می‌توان ساخت که:

الف) حروف صدادار نداشته باشد؟

حروف صدادار  $a, e, i, o, u$  می‌باشند. فقط از ۵ حرف باقیمانده باید ۴ حرف انتخاب کنیم.

$$\binom{5}{4} \times 4! = 5 \times 4! = 5!$$

ب) با حرف صدادار شروع شود و با حرف بی‌صدا ختم شود؟

$\frac{2}{\uparrow}$   
 $\frac{5}{\uparrow}$   
 $\frac{4}{\uparrow}$   
 $\frac{5}{\uparrow}$   
 i  
 o

$$2 \times 5 \times 4 \times 5 = 200$$

$$2 \times \left[ \binom{5}{2} \times 2! \right] \times 5$$

ج) با حرف T شروع شود و شامل S باشد؟

ابتدا ۲ عضو دیگر غیر از S را انتخاب کرده و سپس در کنار هم می‌چینیم.

$$\underline{T} \quad \_ \quad \_ \quad \_ \quad \binom{5}{2} \times 3! \quad \{S, -, -\}$$

مثال: ۸ خط دو به دو متمایز حداکثر در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

حل: حداکثر تعداد نقاط تقاطع دو خط زمانی است که هر دو خط انتخابی همدیگر در نقاط متمایز قطع کنند. پس تعداد حالات تقاطع دو خط حداکثر برابر است با تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی که از بین این خطوط می‌توان انتخاب کرد:

$$\binom{8}{2}$$

مثال: از میان پنج مهره قرمز و چهار مهره سفید به چند طریق می‌توان سه مهره انتخاب کرد به نحوی دو مهره قرمز و یک مهره سفید باشد؟

$$\binom{5}{2} \binom{4}{1} = 40$$

↓ قرمز      سفید

مثال: از بین ۵ مهره سفید متمایز و ۴ مهره آبی متمایز و ۳ قرمز متمایز به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد و در یک ردیف قرار داد به طوری که هیچ دو مهره‌ای هم‌رنگ نباشند؟

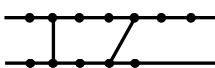
$$\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1} \times 3! = 360$$

مثال: در یک امتحان دانش‌آموزی باید هشت سؤال از میان ۱۰ سؤال پاسخ دهد. اگر پاسخ به چهار سؤال از پنج سؤال اول اجباری باشد، او به چند طریق می‌تواند به سؤالات پاسخ دهد؟

$$\binom{5}{4} \binom{5}{4} + \binom{5}{5} \binom{5}{3} = 5 \times 5 + 10 = 35$$

۵ سؤال از ۵ سؤال اول      ۴ سؤال از ۵ سؤال اول

مثال: دو خط موازی داده شده‌اند. روی یکی از این خطها ۵ نقطه و روی دیگری ۷ نقطه قرار دارد. به چند طریق می‌توان با این نقاط، چهارضلعی ساخت؟



$$\binom{5}{2} \binom{7}{2}$$

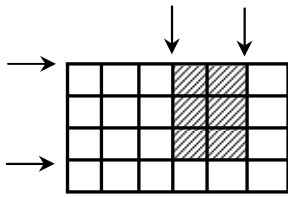
مثال: در مسأله فوق تعداد مثلث‌ها برابر کدام است؟

حل:

$$\binom{5}{3} \binom{7}{1} + \binom{5}{2} \binom{7}{2}$$

یا باید دو نقطه از بالایی انتخاب کنیم و یک نقطه از پایینی و یا بالعکس

مثال: در شکل زیر چند مستطیل وجود دارد؟



$$\binom{5}{2} \binom{7}{2}$$

حل: باید ۲ خط از بین خط‌های افقی و ۲ خط از بین خط‌های عمودی انتخاب کنیم:

$$\binom{m+1}{2} \binom{n+1}{2}$$

در حالت کلی در یک شبکه  $m \times n$  تعداد مستطیل‌های موجود برابر است با:

مثال: از ۱۰ جفت کفش چگونه می‌توان سه لنگه انتخاب کرد به طوری که حتماً یک جفت در میان آنها باشد؟

حل: ابتدا ۲ جفت انتخاب می‌کنیم. سپس یکی از جفت‌ها را برمی‌داریم. سپس از جفت باقی‌مانده یک لنگه انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{10}{2} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = 180$$

راه ۲: ابتدا ۲ جفت برمی‌داریم، سپس ۳ لنگه را انتخاب می‌کنیم که حتماً بینشان ۱ جفت هست.

مثال: ۱۲ نفر متشکل از ۶ زوج زن و شوهر مفروض‌اند. به چند طریق می‌توان ۴ نفر از بین آن‌ها انتخاب کرد به شرطی که در بین آن‌ها هیچ زن و شوهری یافت نشود؟

حل:

ابتدا ۴ زوج انتخاب می‌کنیم سپس از بین این ۴ زوج از هر کدام یک نفر را انتخاب می‌کنیم، در این حالت حتماً هیچ زن و شوهری با هم انتخاب نشده‌اند:

$$\binom{6}{4} \times \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1}$$

انتخاب ۴ زوج

مثال: سکه‌ای را آنقدر می‌اندازیم تا برای سومین بار رو بیاید. تعداد حالاتی که می‌توان در ده پرتاب یک سکه به این منظور رسید کدام است؟

حل: باید از ۹ بار قبلی ۲ بار رو آمده باشد:  $\binom{9}{2}$

مثال: از بین ۸ نفر قبول شدگان المپیاد، ۳ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. تا تعداد عضوهای پیشامد آن که در آن فرد مشخصی حتماً در بین انتخاب شدگان باشد کدام است؟

$$\binom{7}{2}$$

حل: اگر فرد قبول شده حتماً در بین افراد باشد، کافی است دو نفر دیگر انتخاب کنیم:

مثال: تساویهای زیر را با مفاهیم و روابط ترکیب اثبات کنید.

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \quad \text{الف)}$$

اگر بخواهیم از بین جمعی  $n$  نفره،  $k$  نفر که یکی از آنها رییس باشد، انتخاب کنیم ۲ راه داریم:

۱- اول  $k$  نفر را انتخاب می‌کنیم. سپس ۱ نفر را از بین این  $k$  نفر به عنوان رییس انتخاب می‌کنیم:  $\binom{n}{k} \binom{k}{1}$

۲- یا اول ۱ نفر را به عنوان رییس انتخاب می‌کنیم و سپس از بین بقیه افراد  $k-1$  نفر را انتخاب می‌کنیم:  $\binom{n}{1} \binom{n-1}{k-1}$



$$ب) \binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$$

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0} \binom{n}{k} + \binom{m}{1} \binom{n}{k-1} + \dots + \binom{m}{k} \binom{n}{0}$$

اگر بخواهیم از ۲ گروه m نفره و n نفره، k نفر را انتخاب کنیم به ۲ طریق امکان پذیر است.

$$۱- \text{هم زمان } k \text{ نفر را انتخاب کنیم. } \binom{m+n}{k}$$

۲- از گروه اول و دوم به ترتیب افرادی انتخاب کنیم که جمعاً k نفر باشند.

k نفر از گروه دوم + نفر از گروه اول

$$\binom{m}{0} \binom{n}{k} + \dots + \binom{m}{k} \binom{n}{0}$$

الگویابی پرکاربرد:

### کنار هم چیدن اشیائی که بعضی از آنها نباید کنار هم قرار گیرند:

ابتدا اشیائی را که مانعی ندارد کنار هم باشند را می چینیم، سپس در فواصل بین و بیرون آنها اشیائی که نمی خواهیم کنار هم قرار گیرند را قرار می دهیم.

مثال: چند دنباله ۱۲ تایی متشکل از هفت حرف b و پنج حرف a می توان ساخت به طوری که هیچ دو a کنار هم نباشند؟

حل: ابتدا bها را می چینیم، سپس در فواصل به وجود آمده، aها را جایگزین می کنیم:

$$-b-b-b-b-b-b-b- \quad \binom{8}{5} \text{ حالت}$$

مثال: با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ چند عدد هفت رقمی می توان نوشت به طوری که در هیچ یک از آنها دو رقم متوالی زوج نباشند؟

حل: ابتدا ارقام فرد را می چینیم و در بین آنها زوجها را جا می دهیم:

$$\begin{array}{c} \leftarrow \text{جایگاه رقم زوج} \\ \leftarrow \text{جایگشت فردها با هم} \\ \leftarrow \text{جایگشت زوجها با هم} \\ \text{ف-ف-ف-ف-} \quad \binom{5}{3} \times 3! \times 4! \end{array}$$

مثال: حروف EEEFFFDD را به چند طریق می توان پیش هم چید به شرطی که هیچ یک از Eها پیش هم نباشند؟  
حل:

$$\begin{array}{c} \text{F-F-F-D-D-} \\ \leftarrow \text{جایگشت Fها و Dها با هم} \\ \leftarrow \text{محل قرار گرفتن Eها} \\ \binom{6}{3} \times \frac{5!}{3! \times 2!} \end{array}$$

### مینش اشیائی که عده ای از آنها ترتیبشان از قبل معلوم است:

ابتدا مکان اشیائی که ترتیبشان از قبل معین است را انتخاب کرده و اشیاء را طبق ترتیب از قبل معین شده می‌چینیم، سپس بقیه‌ی اشیاء را در فواصل خالی باقی مانده می‌چینیم.

مثال: هفت نفر متمایز به چند طریق می‌توانند در هفت طبقه از یک آپارتمان هفت طبقه‌ای ساکن شوند به شرطی که از بین آنان سعید پایین‌تر از کریم و کریم پایین‌تر از احمد باشد؟

حل: ابتدا به  $\binom{7}{3}$  حالت، طبقه پیاده شدن این سه نفر را انتخاب و طبق ترتیب گفته شده آن‌ها را می‌چینیم. سپس جایگشت بقیه افراد را در ۴ طبقه لحاظ می‌کنیم:  $4! \times \binom{7}{3}$

مثال: چند عدد سه رقمی وجود دارد که در هر یک از آنها رقم صدگان از رقم دهگان و رقم دهگان از رقم یکان بزرگ‌تر باشد؟

حل: ابتدا ۳ رقم را به  $\binom{10}{3}$  حالت انتخاب و سپس طبق ترتیب گفته شده می‌چینیم.

مثال: با حروف کلمه‌ی NOSHABEH چند کلمه هشت حرفی می‌توان نوشت به طوری که در هر یک از آنها A بعد از O و نیز E بعد از A باشد؟

حل: ابتدا مکان A و E و O را انتخاب کرده و سپس بقیه حروف را می‌چینیم. (توجه کنید که ۲ تا H داریم):

$$\binom{8}{3} \times \frac{5!}{2!}$$

جایگشت Hها با هم

### تبدیل r تایی n شیء که شامل اشیاء تکراری باشند:

در صورتی که اشیاء ما تکراری باشند، با تقسیم‌بندی مسأله به حالت‌های مختلف، تعداد تبدیلات r تایی n شیء را بدست می‌آوریم.

مثال: با ارقام ۲ و ۲ و ۴ و ۶ و ۶ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟  
حل:

$$\left. \begin{array}{l} \text{جایگشت ارقام } 3! = 6 \rightarrow \text{اعداد بدون تکرار } \{2, 4, 6\} \\ \text{اعداد با یک تکرار } \{-, -, *\} \rightarrow \binom{3}{1} \binom{2}{1} \times \frac{3!}{2!} = 18 \end{array} \right\} \rightarrow \text{کل اعداد} = 18 + 6 = 24$$

رقم غیرتکراری رقم تکرارشونده

مثال: با حروف کلمه ALIABAD چند کلمه چهار حرفی می توان نوشت؟

حل:

$\binom{5}{4} \times 4!$	<p>حداکثر یک A</p>	}	→ کل کلمات	= 120 + 72 + 16 = 208
$\binom{4}{2} \times \frac{4!}{2}$	<p>دوبار A بیاید: AA</p>			
$\binom{4}{1} \times \frac{4!}{3!}$	<p>سه بار A بیاید: AAA</p>			

انتخاب ۲ رقم دیگر      جایگشت ارقام

انتخاب ۱ رقم دیگر      جایگشت ارقام

### فواص ترکیب:

۱- داریم:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \Rightarrow \text{اگر } \binom{n}{x} = \binom{n}{y} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y = n \end{cases}$$

یعنی تعداد حالات انتخاب r شیئی از بین n شیئی با تعداد حالات عدم انتخاب بقیه اشیاء برابر است.  
یا تعداد زیرمجموعه های r عضوی یک مجموعه n عضوی با تعداد زیر مجموعه های n-r عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است.

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$$

قاعده پاسکال

این قضیه مفهوماً به این معناست که در انتخاب r عضو یک عضو معین یا حضور دارد یا ندارد. سمت راست شمارش نامنظم و سمت چپ شمارش منظم است.

### تعیین ضریب یک جمله از بسط:

نکته: در حالت کلی در بسط  $(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n$  ضریب جمله  $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_r^{k_r}$  برابر است با  $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$   $(\sum_{i=1}^r k_i = n)$

مثال: در بسط  $(a+b+c)^5$  ضریب جمله  $a^3bc$  کدام است؟

حل: چون جمله  $a^3bc$  در واقع  $aaabc$  بوده، تمام جایگشت های  $a, a, a, b, c$  جمله ی  $a^3bc$  تولید می کند و ضریب جمله در واقع تعداد دفعاتی است که یک جمله تولید می شود. (چون به همان تعداد بار این جمله با خودش جمع می شود.)

$$\frac{5!}{3!} \times a^3bc \leftarrow aaabc = a^3bc$$

### بسط دو جمله ای نیوتن:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \dots + \binom{n}{n} x^0 y^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

نتایج: با قرار دادن  $x=y=1$  و  $x=-y=1$  نتایج مفید زیر به دست می آید:

$$1) x=y=1 \Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$2) x=-y=1 \Rightarrow \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots = 0 \Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$$

یعنی تعداد زیر مجموعه‌های زوج عضوی و فرد عضوی یک مجموعه با هم برابر است.

مثال: اگر  $\binom{n}{10} = \binom{n}{11}$  حاصل  $\binom{n}{19}$  کدام است؟

حل:

$$\rightarrow n = 10 + 11 \rightarrow \binom{21}{19} = \frac{21 \times 20}{2} = 210$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

$$\text{الف) } \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{9}{5} + \binom{10}{6} + \binom{11}{7} =$$

$$\underbrace{\binom{8}{3} + \binom{8}{4}}_{\binom{9}{4}}$$

$$\underbrace{\binom{9}{4} + \binom{9}{5}}_{\binom{10}{5}}$$

$$\underbrace{\binom{10}{5} + \binom{10}{6}}_{\binom{11}{6}}$$

$$\underbrace{\binom{11}{6} + \binom{11}{7}}_{\binom{12}{7}}$$

$$\text{ب) } \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{20}{2} =$$

ابتدا به جای  $\binom{2}{2}$ ،  $\binom{3}{2}$  را جایگزین کرده و سپس متوالیاً از قاعده‌ی پاسکال بهره می‌گیریم.

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{20}{2} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{20}{2} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \dots + \binom{20}{2} = \dots + \binom{20}{3} + \binom{20}{2} = \binom{21}{3}$$

**www.konkur.in**