زنگ حل مساله: (هفته‌ی نهم)

☺. یک جدول $n \times 2$ را به چند طریق می‌توان با کاشی‌های 2×1 پوشاند که هر خانه‌ای دقیقا توسط یک کاشی پوشیده شده باشد؟

☺. یک شکلات مستطیل شکل $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ داریم. هر نفر در نوبت خود یک تکه شکلات را انتخاب کرده و از روی خطوط موازی با ضلع می‌شکنند. برنده کسی است که در پایان نوبت او تمام قطعات ۱×۱ باشند. چه کسی استراتژی برد دارد؟

☺. ثابت کنید هر چند ضلعی محدب به مساحت ۱ را می‌توان در یک مستطیل به مساحت ۲ جا داد.

پاسخ: دو نقطه‌ای در چندضلعی را در نظر بگیرید که بیشترین فاصله را از هم دارند. دو خط عمود بر خط اتصال این دو، از این دو نقطه رسم کنید. همچنین در راستای عمود این دو خط هم از دو طرف چندضلعی را محدود کنید. چهار خط معرفی شده تشکیل یک مستطیل می‌دهند.

کافی است ثابت کنیم که مساحت این مستطیل حداکثر برابر ۲ است. چون چندضلعی محدب است، اگر بقیه نقاط بجز نقاط روی مستطیل را حذف کنیم مساحت چندضلعی نسبت به مساحت مستطیل کاهش می‌یابد. در نتیجه کافی است که به ازای حالتی مساله را حل کنیم که چندضلعی، چهار ضلع داشته باشد. با محاسبات ساده‌ی ریاضی نیز این حکم بدست می‌آید (مستطیل را به دو ذوزنقه تقسیم کنید و ...)

☺. خیکوله در مبدا مختصات قرار گرفته است. او در n مرحله حرکات زیر را انجام می‌دهد:

در مرحله‌ی iام $(1 \leq i \leq n)$ او باید دقیقا i واحد در یکی از چهار جهت (بالا، راست، پایین و چپ) حرکت کند. در صورتیکه خیکوله بتواند در انتها به خانه‌ی (x, y) برسد، این خانه را علامت می‌زنیم. چه خانه‌هایی علامت زده می‌شوند؟

راهنمایی: ثابت کنید به تمام خانه‌هایی که فاصله‌یشان تا مبدا حداکثر برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ و زوجیت مجموع مختصات آن با زوجیت $\frac{n(n+1)}{2}$ است می‌توان رسید.

راهنمایی ۲: برای حل سوال از استقرا استفاده کنید. اگر به ازای $n-1$ بتوان به نقاط ذکر شده رسید، ثابت کنید در گام بعدی نیز تمام نقاط پوشش داده می‌شوند.

☺. فرض کنید P(n) تعداد افرازهای عدد طبیعی n باشد، ثابت کنید:

$$P(n) \leq \frac{P(n-1)+P(n+1)}{2}$$

راهنمایی: با استفاده از تناظر مسئله را حل کنید.

راهنمایی ۲: ثابت کنید $P(n)-P(n-1) \leq P(n++1)-P(n)$

☺. حداکثر چند مهره سیاه و سفید می‌توان در یک جدول ۸×۸ قرار داد که در هر سطر و هر ستون تعداد مهره‌های سفید دو برابر تعداد مهره‌های سیاه باشد.

☹. 2n نقطه سفید و 2n نقطه سیاه در صفحه طوری قرار دارند که هیچ ۳ نقطه ای روی یک خط نیستند. ثابت کنید خطی در صفحه وجود دارد که از هر رنگ n نقطه در ۲ سمت خط قرار گیرد.

راهنمایی یک: یک خط تصادفی در نظر بگیرید. خط را یک دور کامل بچرخانید و ثابت کنید در این چرخش لحظه‌ای وجود دارد که شرایط مسئله برقرار است.

راهنمایی دو: در هر مرحله خط را حول یک نقطه می‌چرخانیم تا به یک نقطه‌ی جدیدی برخورد کند. حال خط را حول نقطه‌ی جدید می‌چرخانیم. چون همواره در جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌دهیم یک دور کامل خواهیم زد.

پاسخ: یک خط در صفحه در نظر بگیرید که تعداد نقطه‌های سفید دو طرف برابر باشد. حال خط را در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم تا به نقطه‌ی سفیدی برخورد کند. حال به محوریت نقطه‌ی جدید خط را در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم و این روند را ادامه می‌دهیم. چون مجموعا $2n$ نقطه‌ی سفید وجود دارد و به هر نقطه حداکثر دوبار برخورد می‌کنیم پس از مدتی یک نیم دور خواهیم زد و مطابق با خط اولیه خواهیم شد. در طی روند حرکت همواره تعداد نقاط سفید دو طرف خط برابر است (چرا؟). حال اگر تعداد نقاط سیاه اولیه در سمت چپ خط را m بنامیم در انتها در سمت چپ $2n - m$ در سمت چپ می‌ماند. در نتیجه چون در هر مرحله تنها یک نقطه‌ی مشکی از یک طرف به طرف دیگر می‌رود لحظه‌ای در حرکت وجود دارد که تعداد نقاط مشکی (و همچنین تعداد نقاط سفید) دو طرف با هم برابر است.

☹. به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا n را در یک ردیف چید بطوری که به جز چپ‌ترین عدد به ازای هر عدد مثل k بتوان عددی سمت چپ آن یافت که با k یک واحد اختلاف داشته باشد.

خدا چو صورت ابروی دلگشای تو بست | گشاد کار من اندر کرشمه‌های تو بست
مراد سرو چمن را به خاک راه نشاند | زمانه تا قصب نرگس قبای تو بست