آموزش

فصل هشتم
آمار و احتمال

مدرسه ندای ریحانه
منطقه ۱۰ تهران

پایه هشتم

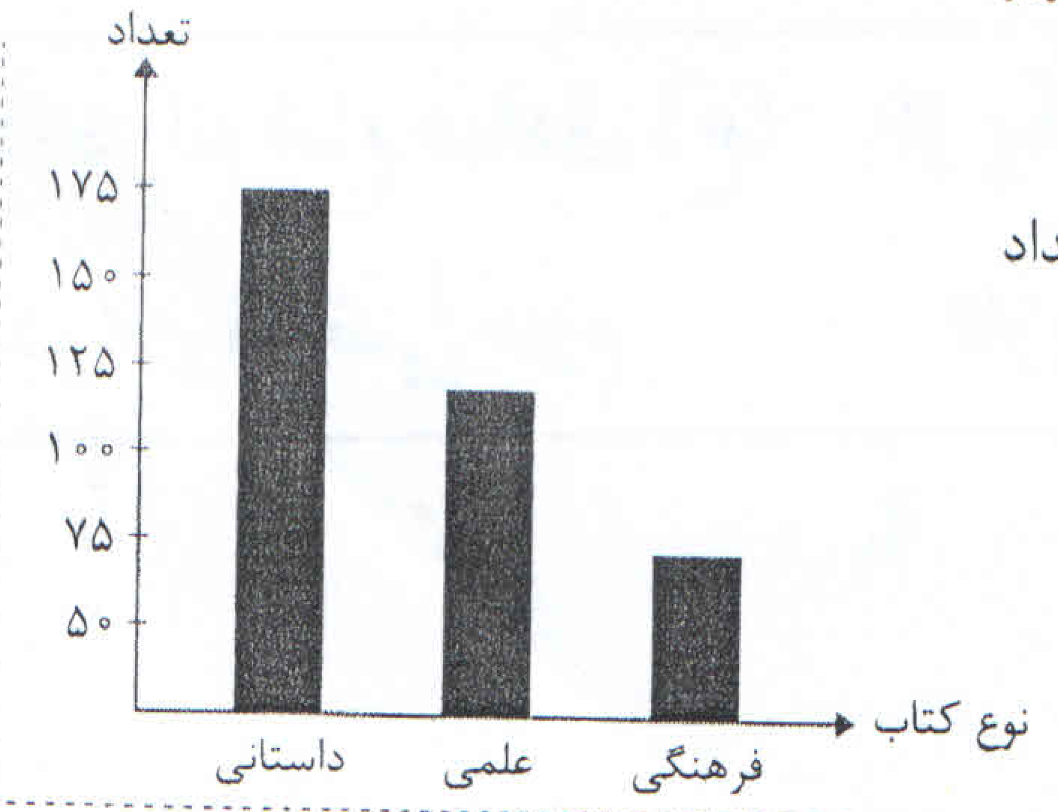
فصل هشتم

آمار و احتمال

آمار علم جمع‌آوری، سازمان‌دهی، تحلیل و تفسیر اطلاعات است. به اطلاعاتی که جمع‌آوری می‌کنیم، داده‌های آماری می‌گوییم. به کمک علم آمار می‌توان تصمیم‌گیری کرد و هم‌چنین در پیش‌بینی وقایع می‌توان از آن استفاده کرد. برای تصمیم‌گیری و استفادهٔ بهتر از داده‌های جمع‌آوری شده، باید اطلاعات را جمع‌آوری کرد و سپس با توجه به موضوع و هدف آمارگیری، نمودار اطلاعات را رسم کرد. در سال‌های قبل با نمودارهای زیر آشنا شدید:

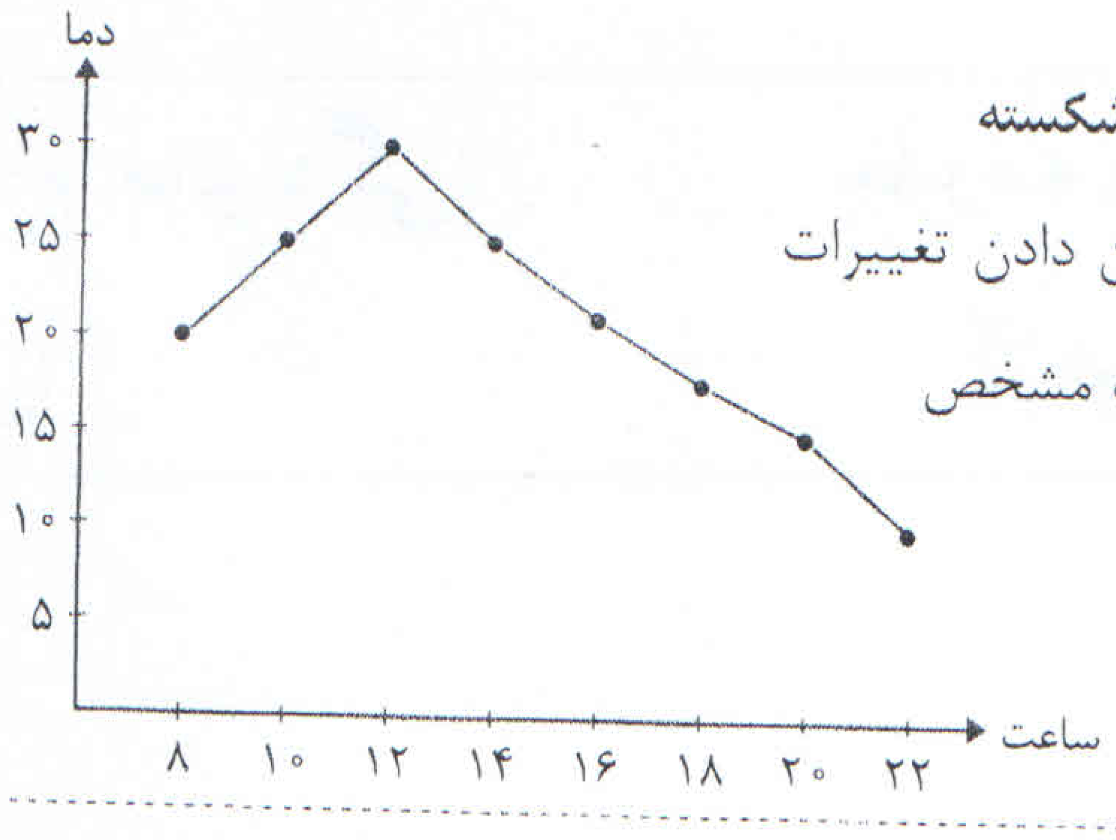
نمودار ستونی

کاربرد: مقایسهٔ تعداد



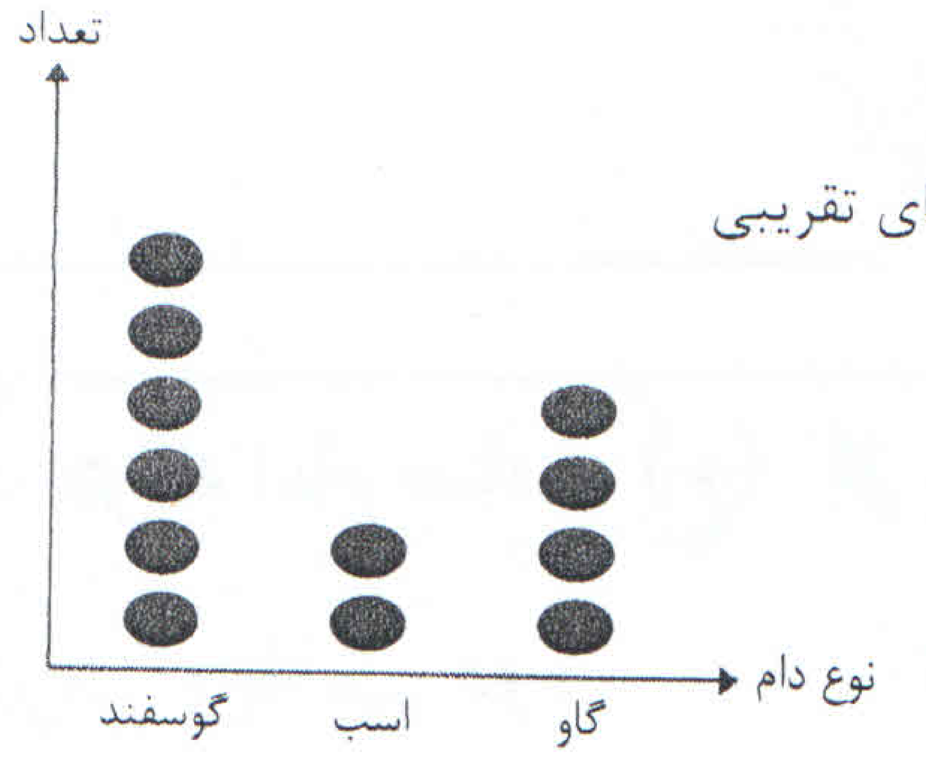
نمودار خطّ شکسته

کاربرد: نشان دادن تغییرات در یک مدت مشخص



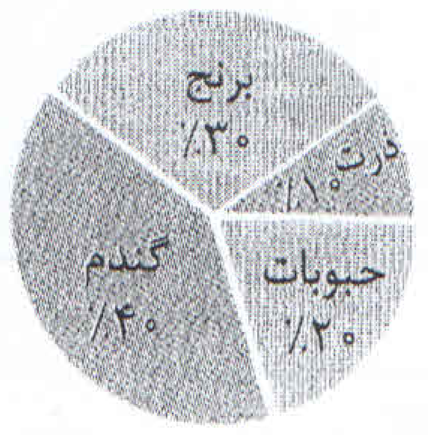
نمودار تصویری

کاربرد: مقایسهٔ داده‌های تقریبی



نمودار دایره‌ای

کاربرد: نشان دادن تعداد داده‌ها نسبت به کل (به‌صورت درصد)



مفهوم محدودهٔ اعداد

هنگامی که می‌خواهیم مشخص کنیم که اعداد موردنظر ما، از کجا شروع می‌شوند و تا کجا ادامه دارند، از علامت $>$ یا $\le$ استفاده می‌کنیم.

هرگاه علامت $a >$ یا $a <$ استفاده شود، یعنی مقادیر موردنظر ما از عدد a کوچک‌تر یا بزرگ‌تر هستند و هرگاه علامت $a \le$ یا $a \ge$ استفاده شود، یعنی مقادیر موردنظر ما از a کوچک‌تر یا بزرگ‌تر یا مساوی با a هستند (خود a هم جزو اعداد ما به حساب می‌آید).

$-7 < x < 2$ ⟸ یعنی اعداد مورد نظر ما از ۷- بزرگ‌تر و از ۲ کوچک‌تر هستند.

$4 \le x < 15$ ⟸ یعنی اعداد موردنظر ما از ۴ بزرگ‌تر، خود ۴ هم جزو اعداد ما است. و از ۱۵ کوچک‌تر هستند.

$-20 < x \le -1$ ⟸ یعنی اعداد موردنظر ما از ۲۰- بزرگ‌تر و از ۱- کوچک‌تر هستند. خود ۱- هم جزو اعداد ما است.

$-2 \le x \le 3$ ⟸ یعنی اعداد موردنظر ما از ۲- بزرگ‌تر و از ۳ کوچک‌تر هستند. خود ۲- و ۳ هم جزو اعداد ما هستند.

نکته

هنگامی که تعداد داده‌های جمع آوری شده زیاد باشد، بررسی آن‌ها زمان‌بر و معمولاً با خطا همراه است. در چنین مواردی باید داده‌ها را دسته‌بندی کرد تا نتایج بهتری از آن‌ها به‌دست آید.

دسته‌بندی داده‌ها

برای دسته‌بندی داده‌ها، باید ابتدا دامنهٔ تغییرات را محاسبه کنیم، برای این کار، کم‌ترین و بیش‌ترین داده را مشخص می‌کنیم و از هم کم می‌کنیم. در واقع به فاصلهٔ بین کم‌ترین و بیش‌ترین داده، دامنهٔ تغییرات می‌گویند.

مثال ۱ در داده‌های آماری مربوط به قد دانش‌آموزان یک کلاس هشتم، علی با ۱۳۵cm کوتاه‌قدترین و مهبد با ۱۵۹cm بلندقدترین دانش‌آموز کلاس است. دامنهٔ تغییرات قد دانش‌آموزان این کلاس چه‌قدر است؟

دامنهٔ تغییرات: ۱۵۹ - ۱۳۵ = ۲۴cm

محاسبهٔ طول دسته‌ها

دامنهٔ تغییرات را بر تعداد دسته‌هایی که می‌خواهیم داده‌ها را طبقه‌بندی کنیم، تقسیم می‌کنیم تا حدود دسته‌ها به‌دست بیاید. با این کار، داده‌ها با فاصله‌های مساوی تقسیم می‌شوند.

مثال ۲ در مثال قبل، اگر بخواهیم قد دانش‌آموزان کلاس هشتم را در ۴ دسته طبقه‌بندی کنیم، طول هر دسته و حدود دسته‌ها را بیابید.

$$\text{طول هر دسته} = \frac{\text{دامنهٔ تغییرات}}{\text{تعداد دسته‌ها}} \Longrightarrow \text{طول هر دسته} = \frac{24}{4} = 6$$

دستهٔ اوّل: $\underbrace{135 \le X < 141}_{+6}$ ، دستهٔ دوم: $\underbrace{141 \le X < 147}_{+6}$ ، دستهٔ سوم: $\underbrace{147 \le X < 153}_{+6}$ ، دستهٔ چهارم: $\underbrace{153 \le X \le 159}_{+6}$

نکته

(۱) برای به‌دست آوردن حدود دسته‌ها، کافی است به کم‌ترین داده مقدار طول دسته را اضافه کنیم تا عدد بالای دستهٔ اول به‌دست آید. عدد بالای هر دسته را به‌عنوان عدد پایین دستهٔ بعدی در نظر می‌گیریم.

(۲) در همهٔ دسته‌ها برای عدد پایینی علامت ≥ و برای عدد بالایی علامت > را قرار می‌دهیم، به غیر از دستهٔ آخر که برای عدد بالایی هم علامت ≥ را قرار می‌دهیم.

تعریف فراوانی: به تعداد داده‌های هر دسته، فراوانی آن دسته می‌گویند. با استفاده از چوب‌خط (خط‌نشان)، تعداد داده‌های هر دسته را مشخص می‌کنیم.

مثال ۳ دمای چند روز مختلف یک شهر، به‌صورت زیر بوده است. ابتدا داده‌ها را به چهار دسته تقسیم‌بندی کنید و سپس یک جدول آماری تشکیل داده و فراوانی هر دسته را درون آن نمایش دهید.

$-7, -3, -5, 2, 0, -1, 4, 3, -2, -5, -9, 6, 3, 4, 2$

$-5, -4, -2, 3, 1, 7, 2, -8, 0, 0, 1, 2, 3, -8, -2, 5, 5, 3$

کم‌ترین داده ۹- و بیش‌ترین داده ۷+ است.

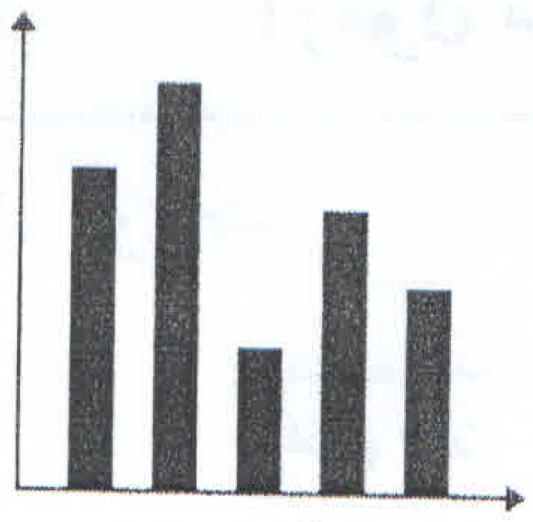
$$\text{دامنهٔ تغییرات} = +7 \underbrace{-(-9)}_{+} = +7 + 9 = 16 \quad \text{و} \quad \text{طول دسته‌ها} = \frac{+16}{4} = +4$$

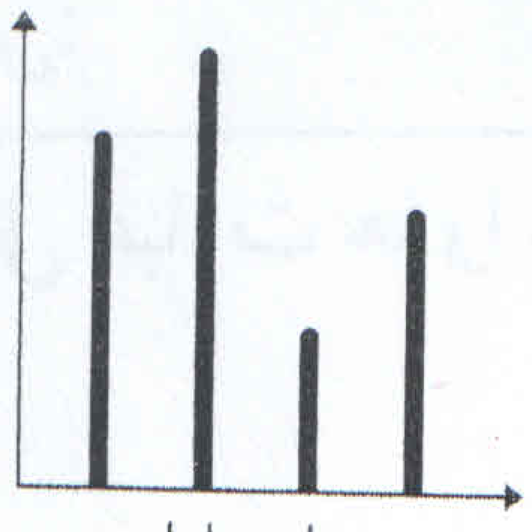
دسته‌ها: $\underbrace{-9 \le x < -5}_{+4}$ ، $\underbrace{-5 \le x < -1}_{+4}$ ، $\underbrace{-1 \le x < +3}_{+4}$ ، $\underbrace{3 \le x \le 7}_{+4}$

حدود دسته‌ها	فراوانی	خط‌نشان
$-9 \le x < -5$	۴	////
$-5 \le x < -1$	۸	~~////~~ ///
$-1 \le x < +3$	۱۰	~~////~~ ~~////~~
$3 \le x < +7$	۱۱	~~////~~ ~~////~~ /

نمودار ستونی

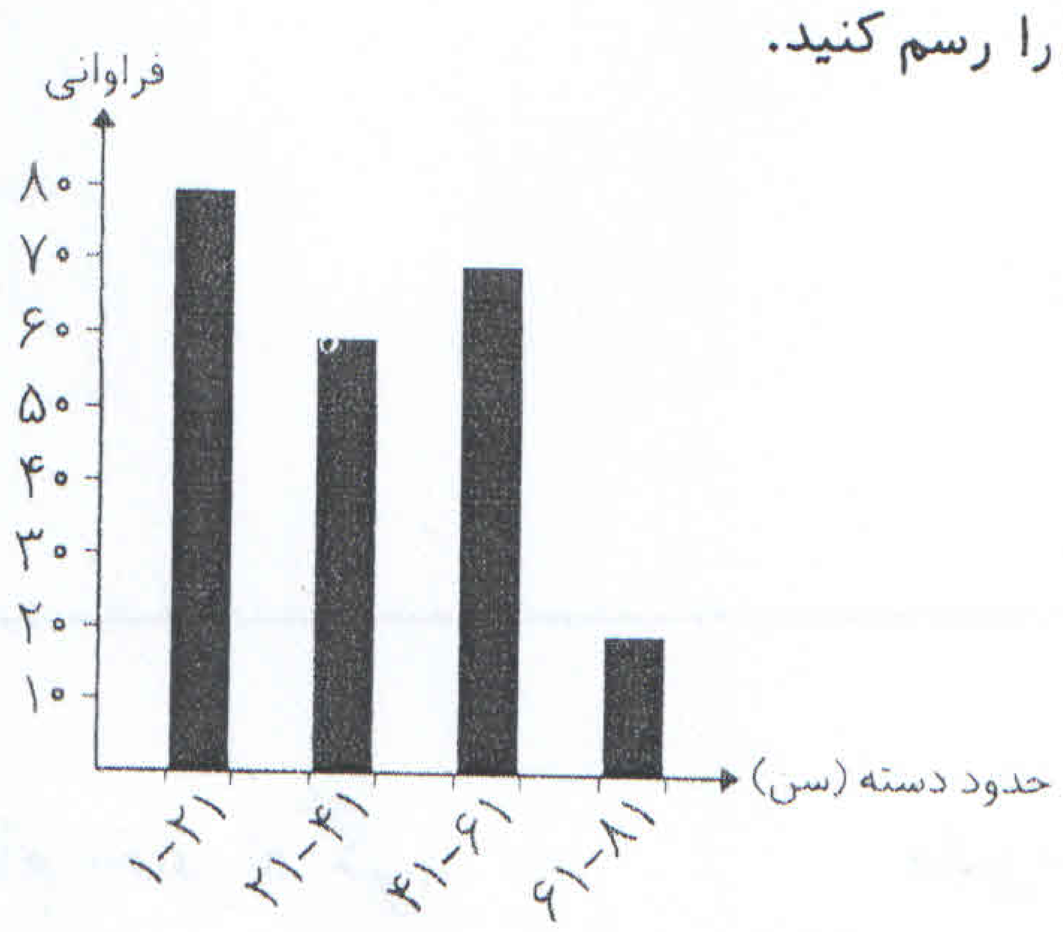
اگر داده‌ها را مانند مثال‌های قبل در چند دسته، طبقه‌بندی کردیم، می‌توانیم آن‌ها را روی نمودار ستونی نمایش دهیم. نمودار ستونی از نظر ظاهر شبیه نمودار میله‌ای است با این تفاوت که در این‌جا هر یک از ستون‌ها، تعداد (فراوانی) چند عدد را نشان می‌دهند.


نمودار ستونی


نمودار میله‌ای

مثال ۴ **جدول زیر مربوط به سنّ افراد یک روستا است، نمودار ستونی مربوط به آن را رسم کنید.**

حدود دسته‌ها	فراوانی
$۱ \le x < ۲۱$	۸۰
$۲۱ \le x < ۴۱$	۶۰
$۴۱ \le x < ۶۱$	۷۰
$۶۱ \le x \le ۸۱$	۲۰



مثال ۵ **داده‌های زیر، جرم ۴۰ نوزاد متولد شده در یکی از بیمارستان‌های تهران را نشان می‌دهند. (جرم بر حسب کیلوگرم می‌باشد)**

این داده‌ها را در ۵ دسته، طبقه‌بندی کنید و برای آن‌ها جدول فراوانی و نمودار ستونی تشکیل دهید.

۳/۸	۴	۳/۴	۲/۷	۲/۶	۳	۲/۸	۳/۲
۳/۴	۲/۵	۲/۴	۳/۳	۲/۹	۳/۸	۳/۱	۲/۳
۳/۴	۳/۲	۲/۶	۲/۸	۲/۹	۳	۳/۱	۳/۲
۳/۹	۴/۳	۳/۴	۲/۹	۴	۲/۷	۲/۶	۲/۳
۳/۱	۳/۵	۳/۳	۲/۷	۳	۳/۱	۳/۲	۲/۷

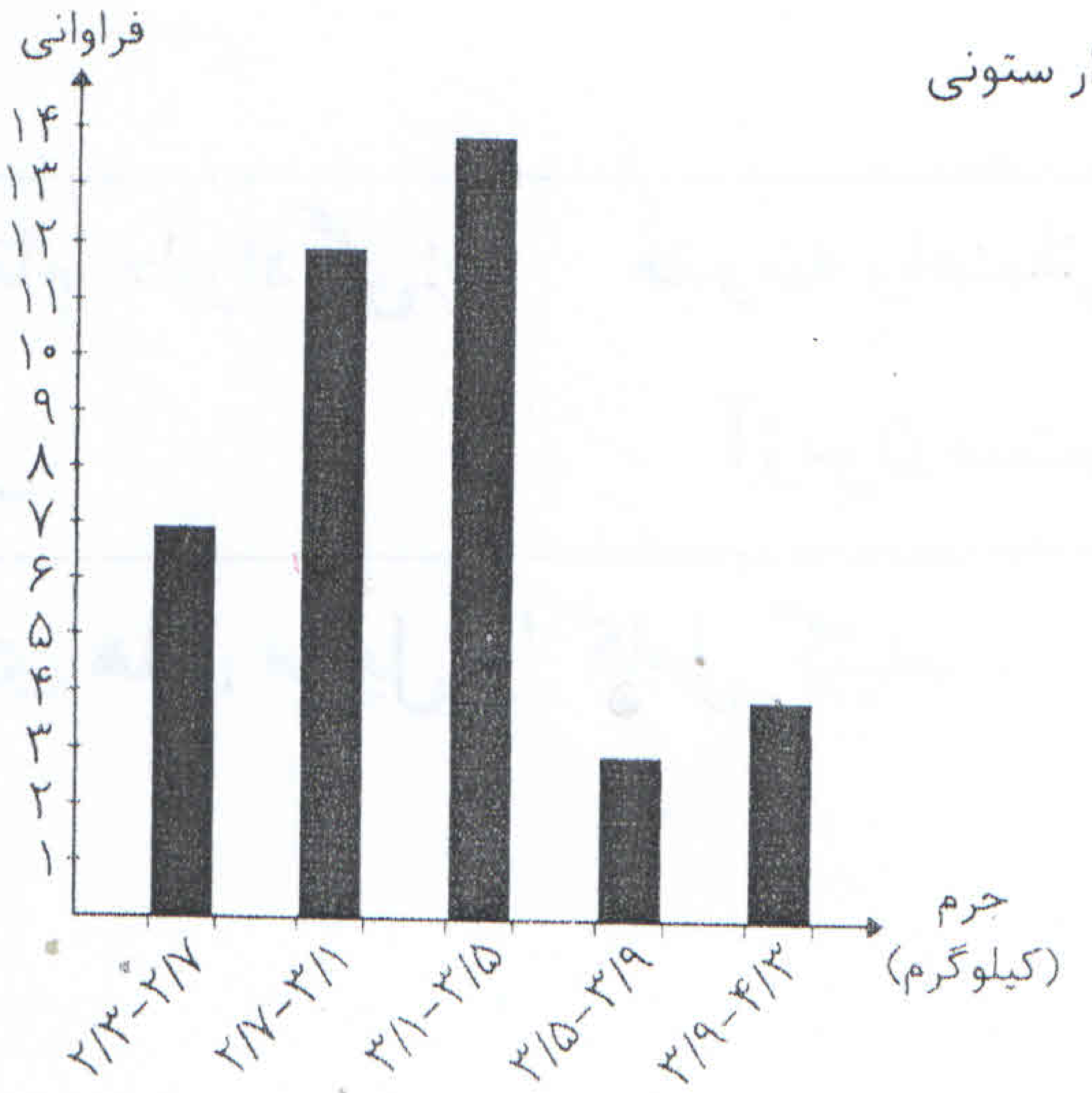
بیش‌ترین داده = ۴/۳
کم‌ترین داده = ۲/۳
⟸ دامنهٔ تغییرات = ۲/۳ - ۴/۳ = ۲

$$\text{طول هر دسته} = \frac{\text{دامنهٔ تغییرات}}{\text{تعداد دسته‌ها}} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

جدول فراوانی

حدود دسته‌ها	فراوانی	خط‌نشان
$۲/۳ \le X < ۲/۷$	۷	~~||||~~ ||
$۲/۷ \le X < ۳/۱$	۱۲	~~||||~~ ~~||||~~ ||
$۳/۱ \le X < ۳/۵$	۱۴	~~||||~~ ~~||||~~ ||||
$۳/۵ \le X < ۳/۹$	۳	|||
$۳/۹ \le X \le ۴/۳$	۴	||||

نمودار ستونی

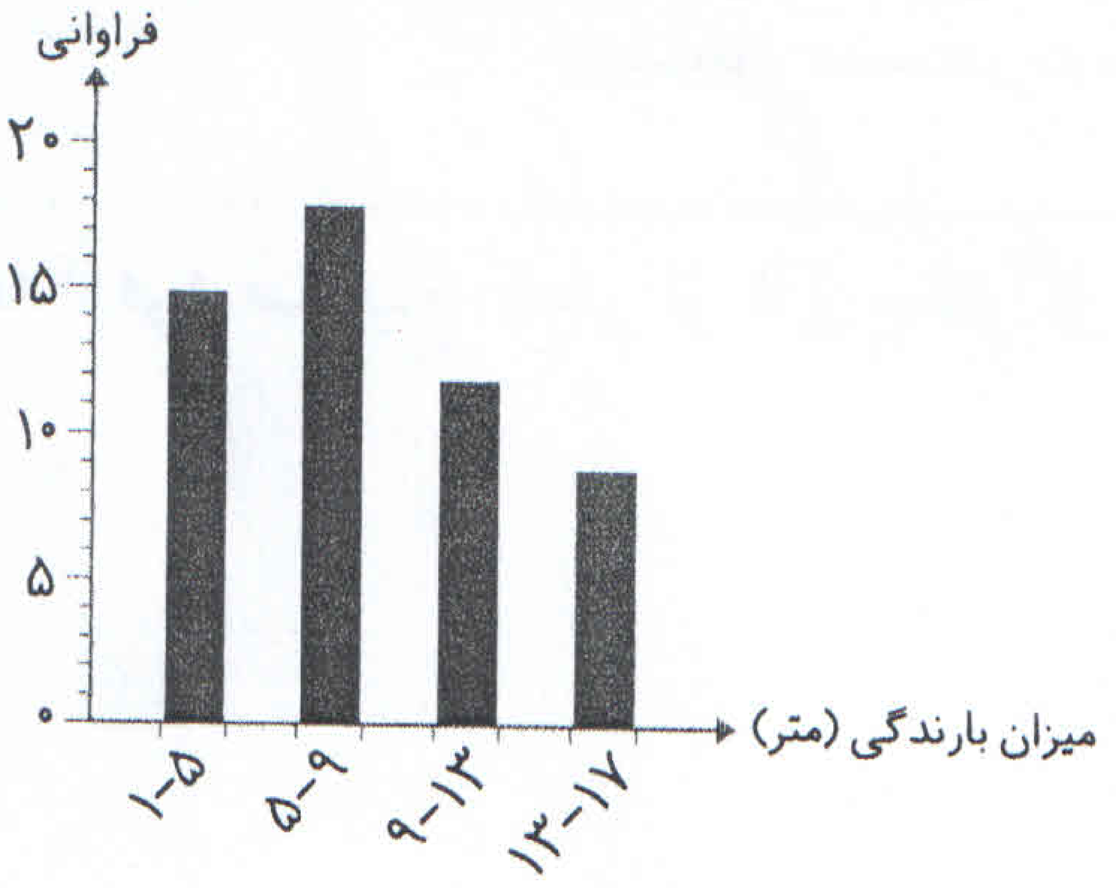


نکته

مجموع اعدادی که در ستون فراوانی قرار می‌گیرند، باید برابر با تعداد کلّ داده‌های آماری بررسی شده باشد. مثلاً در جدول فراوانی مثال قبل داریم:

$۷+۱۲+۱۴+۳+۴=۴۰$

مثال ۶ نمودار ستونی زیر، مربوط به میزان بارندگی یک شهر است. جدول داده‌های آماری مربوط به آن را رسم کنید.



حدود دسته‌ها	فراوانی	خط نشان
$۱ \leq x < ۵$	۱۵	𝍸 𝍸 𝍸
$۵ \leq x < ۹$	۱۸	𝍸 𝍸 𝍸 |||
$۹ \leq x < ۱۳$	۱۲	𝍸 𝍸 ||
$۱۳ \leq x \leq ۱۷$	۹	𝍸 ||||

مثال ۷ نمرات ۳۰ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس به‌صورت زیر است:

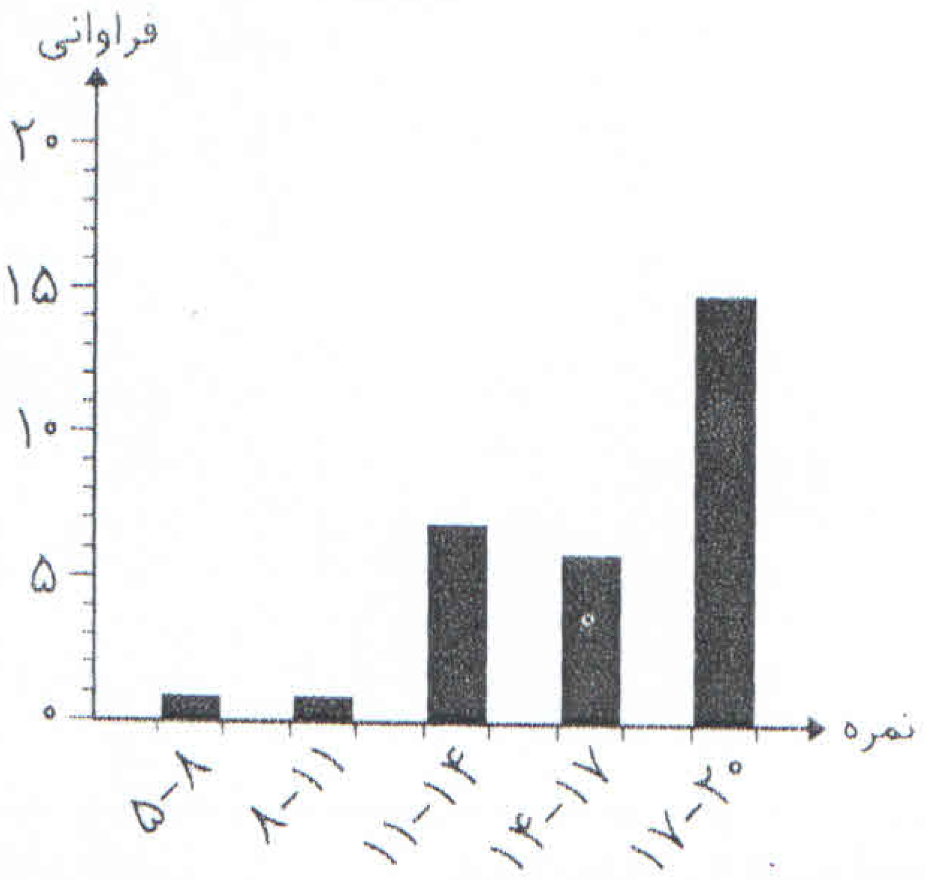
۱۳ , ۱۲ , ۱۰ , ۱۹ , ۱۹ , ۱۸ , ۱۷ , ۱۸ , ۲۰ , ۲۰ , ۲۰ , ۱۹ , ۱۱ , ۱۳ , ۵ , ۲۰ , ۱۳ , ۱۴

۱۷ , ۱۶ , ۱۶ , ۱۵ , ۱۴ , ۱۶ , ۱۷ , ۱۹ , ۲۰ , ۱۱ , ۱۱ , ۱۸

الف) نمرات را به ۵ دسته تقسیم‌بندی کرده و سپس نمودار ستونی مربوط به آن را رسم کنید.

کوچک‌ترین داده برابر با ۵ و بیش‌ترین داده برابر با ۲۰ است.

دامنهٔ تغییرات $= ۲۰ - ۵ = ۱۵ \Rightarrow$ طول دسته‌ها $= \frac{۱۵}{۵} = ۳$



حدود دسته‌ها	فراوانی	خط نشان
$۵ \leq x < ۸$	۱		
$۸ \leq x < ۱۱$	۱		
$۱۱ \leq x < ۱۴$	۷	𝍸 ||
$۱۴ \leq x < ۱۷$	۶	𝍸	
$۱۷ \leq x \leq ۲۰$	۱۵	𝍸 𝍸 𝍸

ب) با توجه به نمودار ستونی رسم‌شده، وضعیت درسی کلاس را ارزیابی کنید. اکثر دانش‌آموزان کلاس دارای نمرهٔ ۱۴ و بالاتر از آن هستند، پس وضعیت کلاس متوسط رو به بالا است.

میانگین

همهٔ ما کم و بیش با معنی میانگین آشنا هستیم. (گاهی به‌جای کلمهٔ میانگین، کلمهٔ معدل استفاده می‌شود.) برای محاسبهٔ میانگین چند عدد، از رابطهٔ مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{S}{n}$$

در رابطهٔ بالا، $\bar{x}$ (میانگین)، S (جمع داده‌ها) و n (تعداد داده‌ها) است.

مثال ۸ میانگین اعداد ۲، ۳، ۵ و ۸ را محاسبه کنید.

جمع داده‌ها $= ۸ + ۵ + ۳ + ۲ = ۱۸$

تعداد داده‌ها $= ۴ \Rightarrow$ میانگین $= \frac{۱۸}{۴} = ۴/۵$

مفهوم میانگین

شاید تاکنون به مفهوم میانگین به‌صورت جدی فکر نکرده باشید، بیایید با یک مثال، مفهوم آن را بهتر درک کنیم. فرض کنید نمرات یک دانش‌آموز در ۸ درس عبارت است از: ۱۴، ۱۸، ۲۰، ۲۰، ۱۷، ۱۵، ۱۳ و ۱۹. جمع نمرات این دانش‌آموز برابر با ۱۳۶ است و تعداد درس‌های او ۸ تا می‌باشد، پس میانگین آن‌ها برابر با $۱۷ = \frac{۱۳۶}{۸}$ است. معنی این موضوع این است که می‌توانیم به‌جای نمرات این دانش‌آموز، هشت بار عدد ۱۷ را فرض کنیم، یعنی بگوییم نمرات این دانش‌آموز برابر با ۱۷، ۱۷، ۱۷، ۱۷، ۱۷، ۱۷، ۱۷و ۱۷ است.

کاربرد میانگین

میانگین یکی از روش‌هایی است که می‌توان با آن به بررسی وضعیت یک موضوع پرداخت مثلاً وقتی میانگین نمرات یک دانش‌آموز، برابر با ۱۷ است، می‌توان گفت او یک دانش‌آموز متوسط رو به بالاست و یا اگر میانگین دمای یک شهر، ۳- شود، می‌گوییم این شهر یک شهر سردسیر است.

نکته

مجموع داده‌ها را می‌توان از رابطهٔ $S = n \times \bar{x}$ به‌دست آورد.

مثال ۹ محسن در ۱۳ درس، میانگین ۱۸ را کسب کرده است. جمع نمرات محسن در این ۱۳ درس را محاسبه کنید.

$S = ۱۳ \times ۱۸ = ۲۳۴$

مثال ۱۰ میانگین نمرات آرش در ۸ درس برابر با ۱۵/۵ شده است. اگر نمرات دو درس دیگر او ۱۴/۵ و ۱۷/۵ باشد، میانگین کلّ درس‌های او را محاسبه کنید.

(مجموع داده‌ها) $S = ۸ \times ۱۵/۵ = ۱۲۴$, $S_{\text{جدید}} = ۱۲۴ + ۱۴/۵ + ۱۷/۵ = ۱۵۶$, (میانگین) $\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{۱۵۶}{۱۰} = ۱۵/۶$

مثال ۱۱ محمد در ۷ روز، به‌طور متوسط ۲۰ صفحه کتاب مطالعه کرده است. او در روز هشتم، چند صفحه مطالعه کند تا میانگین مطالعهٔ او (در هشت روز) برابر با ۲۲ صفحه شود؟

جمع صفحات مطالعه‌شده در ۷ روز $= ۷ \times ۲۰ = ۱۴۰$

جمع صفحات مطالعه‌شده در ۸ روز $= ۸ \times ۲۲ = ۱۷۶$

$\Rightarrow$ تعداد صفحاتی که او در روز هشتم مطالعه کرده است $= ۱۷۶ - ۱۴۰ = ۳۶$ صفحه

نکته

حتی با تغییر دادن یکی از داده‌ها، مقدار میانگین تغییر می‌کند.

مثال ۱۲ داده‌های ۱، ۲ و ۳ مفروض است. اگر عدد ۳ را به ۳/۷۵ تغییر دهیم، میانگین چه تغییری خواهد کرد؟

$۱,۲,۳ \Rightarrow \bar{x} = \frac{۱+۲+۳}{۳} = ۲$

$۱,۲,۳/۷۵ \Rightarrow \bar{x} = \frac{۱+۲+۳/۷۵}{۳} = ۲/۲۵$

$\Rightarrow$ میانگین جدید ۰/۲۵ افزایش یافته است

نکته

اگر همهٔ داده‌ها را به‌صورت یکسان تغییر دهیم، میانگین هم به همان صورت تغییر می‌کند. مثلاً اگر به همهٔ اعداد ۲ واحد اضافه کنیم، میانگین هم ۲ واحد زیاد می‌شود و یا اگر همهٔ اعداد را ۷ برابر کنیم، میانگین هم ۷ برابر می‌شود. مانند:

$$\text{۳ و ۷ و ۲} \xrightarrow{\text{میانگین}} ۴ \qquad \times۴$$
$$\text{۱۲ و ۲۸ و ۸} \xrightarrow{\text{میانگین}} ۱۶$$

مثال ۱۳ نمرات یک دانش‌آموز به‌صورت مقابل است: ۱۸، ۱۶/۵، ۱۴، ۱۸/۵، ۱۹، ۱۷، ۱۵، ۱۶، ۱۵/۵، ۱۷/۵

الف) میانگین نمرات را پیدا کنید.

$$\bar{x} = \frac{S}{n} = \frac{۱۷/۵+۱۵/۵+۱۶+۱۵+۱۷+۱۹+۱۸/۵+۱۴+۱۶/۵+۱۸}{۱۰} = ۱۶/۷$$

ب) چند نمره بالاتر از میانگین قرار می‌گیرند؟ ۵ نمره　　۱۷ , ۱۷/۵ , ۱۸ , ۱۸/۵ , ۱۹

ج) چند نمره پایین‌تر از میانگین قرار می‌گیرند؟ ۵ نمره　　۱۴ , ۱۵ , ۱۵/۵ , ۱۶ , ۱۶/۵

نکته

اگر فراوانی دسته‌ها باهم مساوی نباشد ابتدا مجموع هر دسته را با سایر دسته‌ها جمع می‌کنیم و سپس حاصل را بر تعداد کلّ داده‌ها تقسیم می‌کنیم.

مثال ۱۴ میانگین نمرات ۸ دانش‌آموز در درس ریاضی ۱۹ و میانگین نمرات ۱۵ دانش‌آموز دیگر، برابر با ۱۶ و میانگین نمرات ۱۳ دانش‌آموز دیگر برابر با ۱۸ است. میانگین کل نمرات این دانش‌آموزها را در درس ریاضی، محاسبه کنید.

جمع نمرات ۸ نفر $= ۸\times۱۹ = ۱۵۲$ ، جمع نمرات ۱۵ نفر $= ۱۵\times۱۶ = ۲۴۰$ ، جمع نمرات ۱۳ نفر $= ۱۳\times۱۸ = ۲۳۴$

جمع کل نمرات $= ۱۵۲+۲۴۰+۲۳۴ = ۶۲۶$ ، تعداد کل دانش‌آموزان $= ۸+۱۵+۱۳ = ۳۶$ نفر

$\Rightarrow$ میانگین کل نمرات $= \frac{۶۲۶}{۳۶} \simeq ۱۷/۳۸$

نکته

اگر تعداد (فراوانی) دسته‌ها با هم مساوی باشد، برای میانگین کل، می‌توانیم میانگین‌ها را با هم جمع کنیم و حاصل را تقسیم بر تعداد کنیم.

مثال ۱۵ سه گروه ۱۰ نفره داریم که میانگین قد گروه اوّل ۱۶۲ سانتی‌متر، میانگین قد گروه دوم، ۱۵۸ سانتی‌متر و میانگین قد گروه سوم، ۱۷۶ سانتی‌متر است. میانگین قد کل این افراد چند سانتی‌متر است؟

چون تعداد افراد هر سه دسته مساوی است (ده نفر)، کافی است میانگین‌ها را با هم جمع کنیم و حاصل را بر تعداد (۳) تقسیم کنیم.

جمع میانگین‌ها $= ۱۶۲+۱۵۸+۱۷۶ = ۴۹۶$

تعداد میانگین‌ها $= ۳ \Rightarrow$ میانگین قد کل افراد $= \frac{۴۹۶}{۳} \simeq ۱۶۵/۳۳$

نکته

گاهی می‌توان با کم و زیاد کردن اعداد، میانگین آن‌ها را به‌دست آورد. این اتفاق زمانی می‌افتد که اعداد را مرتب کرده باشیم و فاصلهٔ اعداد چپ و راست عدد وسط، با هم مساوی باشد.

مثلاً به اعداد مقابل دقت کنید: عدد وسط، ۲۱ است. ۱۷,۱۸,۱۸,۱۹,۲۰,۲۱,۲۲,۲۳,۲۴,۲۴,۲۵

در این‌جا فاصلهٔ هر دو عدد ۱۷ و ۲۵ با عدد ۲۱ (عدد وسط) برابر با ۴ است و فاصلهٔ اعداد ۲۴ و ۱۸ با عدد ۲۱، سه واحد است. هم‌چنین فاصلهٔ اعداد ۲۳ و ۱۹ تا عدد ۲۱، برابر با ۲ واحد است و فاصلهٔ اعداد ۲۰ و ۲۲ تا عدد ۲۱، برابر با یک واحد است. در این حالت می‌توانیم از اعداد بزرگ‌تر، کم کنیم و به اعداد کوچک‌تر اضافه کنیم.

۱۷	۱۸	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۴	۲۵
+۴	+۳	+۳	+۲	+۱		-۱	-۲	-۳	-۳	-۴
۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱

محاسبهٔ میانگین در مواقعی که تعداد داده‌ها زیاد است

اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد، برای محاسبهٔ میانگین می‌توان مجموع همهٔ داده‌ها را به‌دست آورد و سپس آن را بر تعداد داده‌ها تقسیم کرد؛ اما این کار زمان‌بر است و ممکن است در محاسبه دچار خطای زیادی شویم، در علم آمار، معمولاً میانگین را به‌صورت تقریبی محاسبه می‌کنند. برای این کار باید ابتدا داده‌ها را دسته‌بندی کرد و از روی دسته‌بندی‌های انجام شده، میانگین را به‌دست آورد.

برای این منظور مراحل زیر را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

۱- مرکز (میانگین) هر دسته را به‌دست می‌آوریم.

$$\text{مرکز دسته} = \frac{\text{عدد بالای حدود دسته} + \text{عدد پایین حدود دسته}}{۲}$$

مثال ۱۶ اگر در یک بررسی آماری، حدود دسته‌ای $۱۲۰ \le X < ۱۴۰$ باشد، میانگین آن دسته چه عددی است؟

$$\text{مرکز دسته} = \frac{۱۲۰+۱۴۰}{۲} = \frac{۲۶۰}{۲} = ۱۳۰$$

۲- فراوانی هر دسته را در مرکز آن دسته ضرب کرده و در ستون مقابل هر دسته می‌نویسیم.

۳- مجموع اعداد واقع در ستون «مرکز دسته × فراوانی» را حساب کرده و آن را بر مجموع فراوانی‌ها تقسیم می‌کنیم. عدد حاصل، میانگین تقریبی همهٔ داده‌های آماری داده‌شده است.

مثال ۱۷ میانگین داده‌های جدول مقابل را به‌دست آورید.

دسته‌ها	فراوانی	مرکز دسته	مرکز دسته × فراوانی
$۰ \le x < ۴$	۲	$\frac{۴+۰}{۲} = ۲$	$۲ \times ۲ = ۴$
$۴ \le x < ۸$	۳	$\frac{۸+۴}{۲} = ۶$	$۳ \times ۶ = ۱۸$
$۸ \le x \le ۱۲$	۱	$\frac{۱۲+۸}{۲} = ۱۰$	$۱ \times ۱۰ = ۱۰$
مجموع	۶	-	۳۲

$$\Rightarrow \text{میانگین} = \frac{۳۲}{۶} \simeq ۵/۳۳$$

مثال ۱۸ نمرات ریاضی یک کلاس به‌صورت زیر است:

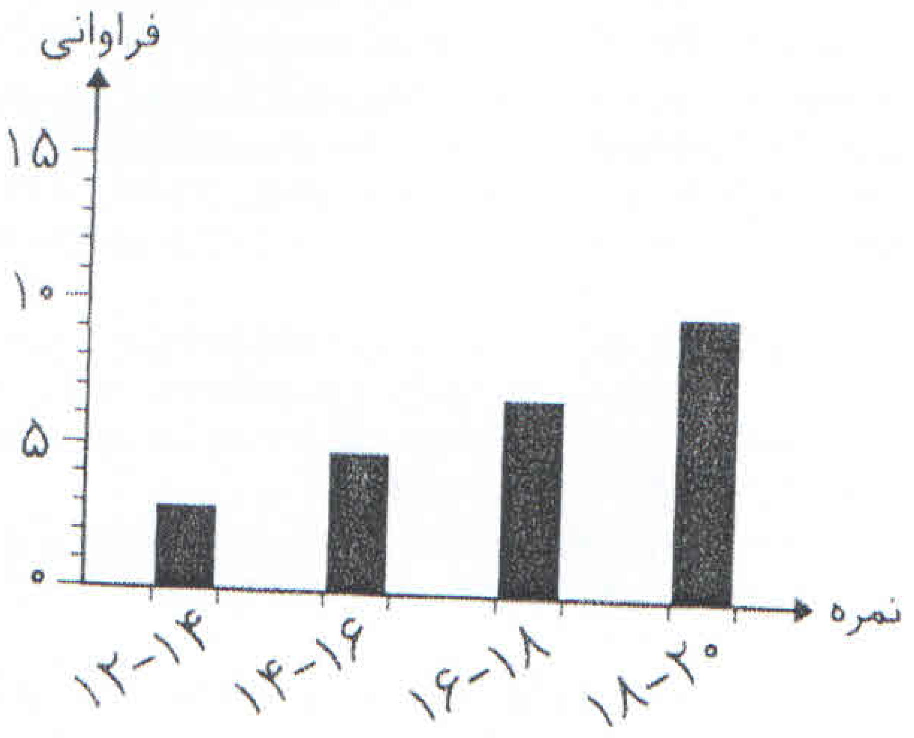
الف) آن‌ها را به ۴ دسته تقسیم‌بندی کرده و نمودار ستونی مربوط به آن را رسم کنید.

ب) میانگین تقریبی کلاس را محاسبه کرده و مشخص کنید که در کدام دسته قرار می‌گیرد؟

۲۰ , ۱۸ , ۱۸ , ۱۸ , ۱۸ , ۱۷ , ۱۵ , ۱۵ , ۱۶ , ۱۶ , ۱۸ , ۱۹ , ۱۹ , ۲۰ , ۲۰ , ۲۰ , ۱۷ , ۱۷ , ۱۳ , ۱۵ , ۱۴ , ۱۳ , ۱۷ , ۱۲ , ۱۶ , ۱۴

۱۲ = کم‌ترین نمره ، ۲۰ = بیش‌ترین نمره $\Leftarrow$ دامنهٔ تغییرات = ۲۰ − ۱۲ = ۸ $\Leftarrow$ طول دسته‌ها = $\frac{۸}{۴}$ = ۲

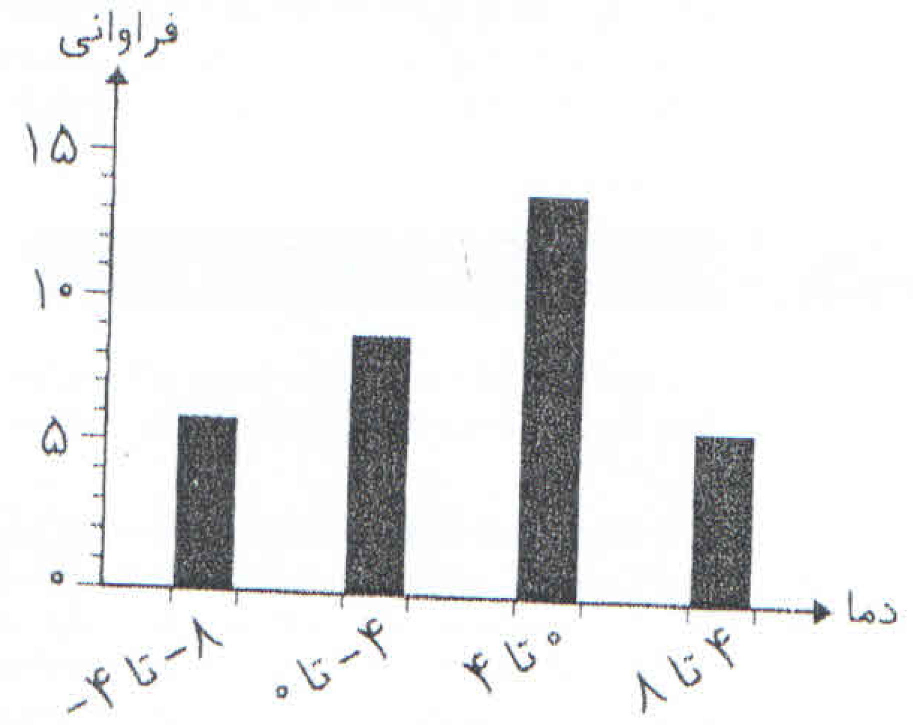
حدود دسته‌ها	فراوانی	مرکز دسته	مرکز دسته × فراوانی
$۱۲ \le x < ۱۴$	۳	$\frac{۱۲+۱۴}{۲} = ۱۳$	$۱۳ \times ۳ = ۳۹$
$۱۴ \le x < ۱۶$	۵	$\frac{۱۴+۱۶}{۲} = ۱۵$	$۱۵ \times ۵ = ۷۵$
$۱۶ \le x < ۱۸$	۷	$\frac{۱۶+۱۸}{۲} = ۱۷$	$۱۷ \times ۷ = ۱۱۹$
$۱۸ \le x \le ۲۰$	۱۰	$\frac{۱۸+۲۰}{۲} = ۱۹$	$۱۹ \times ۱۰ = ۱۹۰$
جمع	۲۵		۴۲۳



میانگین = $\frac{۴۲۳}{۲۵}$ = ۱۶/۹۲ میانگین در دستهٔ سوم $(۱۶ \le x \le ۱۸)$ قرار دارد.

مثال ۱۹ با توجه به نمودار ستونی زیر، میانگین دمای شهر را محاسبه کنید.

حدود دسته‌ها	فراوانی	مرکز دسته	مرکز دسته × فراوانی
$-۸ \le x < -۴$	۶	۶-	۳۶-
$-۴ \le x < ۰$	۹	۲-	۱۸-
$۰ \le x < ۴$	۱۴	۲	۲۸
$۴ \le x \le ۸$	۶	۶	۳۶
جمع	۳۵		۱۰



میانگین = $\frac{۱۰}{۳۵} \simeq ۰/۲۸$

نکته در دسته‌بندی داده‌های آماری، اختلاف میانگین دو دستهٔ متوالی برابر با طول دسته‌ها می‌شود.

مثال ۲۰ در یک سری از داده‌های آماری دسته‌بندی شده، میانگین دستهٔ سوم برابر با ۸ و میانگین دستهٔ چهارم برابر با ۱۳ است. طول هر دسته را بیابید.

طول دسته: ۱۳ − ۸ = ۵

احتمال

در سال‌های قبل آموختیم که گاهی می‌توانیم روی دادن یک اتفاق را به‌صورت احتمالی پیش‌بینی کنیم. برای این کار ابتدا کلّ حالت‌های

روی دادن اتفاق را شمارش می‌کنیم و سپس حالت‌های موردنظر را می‌شماریم، سپس احتمال روی دادن اتفاق را از رابطهٔ زیر حساب می‌کنیم.

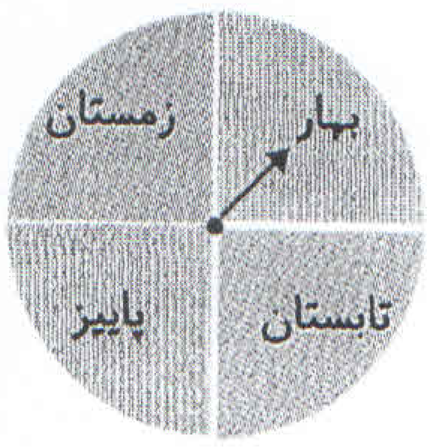
$$\text{احتمال} = \frac{\text{حالت‌های موردنظر}}{\text{کل حالت‌ها}}$$

نکته معمولاً در ریاضی، احتمال را با P_a، کل حالت‌ها را با $n(s)$ و حالت‌های موردنظر را با $n(a)$ نمایش می‌دهند (a : نام اتفاق موردنظر است.) $P_a = \frac{n(a)}{n(s)}$

مثال ۲۱ **در پرتاب یک سکّه، همهٔ اتفاقاتی که دارای احتمال (شانس) مساوی هستند را بنویسید.** در پرتاب یک سکّه، دو حالت اتفاق می‌افتد (آمدن رو - آمدن پشت). احتمال این دو رویداد با هم مساوی است.

$\frac{۱}{۲}$ = احتمال آمدن پشت　　　$\frac{۱}{۲}$ = احتمال آمدن رو

مثال ۲۲ **اگر عقربهٔ چرخندهٔ مقابل را بچرخانیم، همهٔ حالت‌های هم‌شانس را بنویسید.**



در چرخاندن عقربهٔ این چرخنده، چهار اتفاق هم‌شانس (دارای احتمال مساوی) ممکن است روی بدهد.

$\frac{۱}{۴}$ = احتمال آمدن تابستان　　　$\frac{۱}{۴}$ = احتمال آمدن بهار

$\frac{۱}{۴}$ = احتمال آمدن زمستان　　　$\frac{۱}{۴}$ = احتمال آمدن پاییز

نکاتی در مورد احتمال:

الف) احتمال روی دادن هر اتفاق را با یک کسر که بین صفر تا یک می‌باشد، نشان می‌دهیم.

شاید روی بدهد: ۱ > احتمال > ۰　　　حتماً روی می‌دهد: ۱　　　قطعاً روی نمی‌دهد: ۰

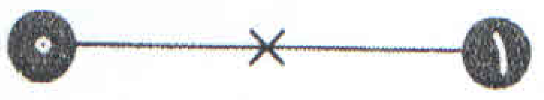
مثال ۲۳ **برای هر یک از احتمال‌های زیر، یک روی‌داد مثال بزنید.**

الف) اتفاقی با احتمال صفر: زنده ماندن یک انسان بدون تنفس　　　**ب) اتفاقی با احتمال یک:** آمدن ماه مهر بعد از ماه شهریور

ج) اتفاقی با احتمال $\frac{۱}{۳}$: احتمال این‌که در بین ماه‌های بهار، ماه اردیبهشت را انتخاب کنیم.

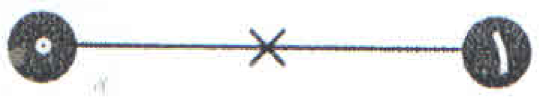
مثال ۲۴ **احتمال روی دادن اتفاق‌های زیر را روی محورهای داده‌شده علامت بزنید. (علامت ×)**

الف) احتمال آمدن باران در یک روز ابری: این اتفاق ممکن است روی دهد و ممکن است روی ندهد (پس احتمال آن عددی بین صفر و یک است.)



ب) احتمال آمدن عدد ۲ رقمی در پرتاب تاس: قطعاً اتفاق نمی‌افتد.

ج) گل شدن ضربهٔ پنالتی در فوتبال: مانند قسمت (الف)



د) آمدن پاییز بعد از تابستان: قطعاً اتفاق می‌افتد

مثال ۲۵ **در پرتاب یک تاس، احتمال کدام اتفاق بیش‌تر است؟**

الف) آمدن عدد فرد:

کل حالت‌های هم شانس $\Rightarrow$ ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶

احتمال آمدن عدد فرد (۱ , ۳ , ۵) $\Rightarrow$ احتمال $= \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

ب) آمدن عدد زوج: احتمال آمدن عدد زوج (۲ , ۴ , ۶) $\Rightarrow$ احتمال $= \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

ج) آمدن عدد اوّل: احتمال آمدن عدد اوّل (۲ , ۳ , ۵) $\Rightarrow$ احتمال $= \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

مشاهده می‌کنید. هر سه اتفاق دارای شانس مساوی هستند.

مثال ۲۶ به شکل روبه‌رو، یک تیر پرتاب می‌کنیم. با توجه به آن به سؤالات داده‌شده پاسخ دهید.

B	ب	A	آ
ت	D	پ	C
F	ج	E	ث
Z	H	چ	G

الف) احتمال خوردن تیر به حرف فارسی بدون نقطه: در این‌جا ۱۶ خانه وجود دارد (۱۶ حالت)

یک حرف فارسی بدون نقطه داریم (آ) احتمال $= \frac{۱}{۱۶}$

ب) احتمال خوردن تیر به حرف انگلیسی در خانهٔ سفید:

در خانه‌های سفید، ۵ حرف انگلیسی داریم. (A - B - C - D - Z) احتمال $= \frac{۵}{۱۶}$

ج) احتمال خوردن تیر به حرف فارسی با ۳ نقطه: ۳ حرف فارسی با سه نقطه داریم (پ - ث - چ) احتمال $= \frac{۳}{۱۶}$

د) احتمال خوردن تیر به حرف انگلیسی در خانهٔ سیاه:

در ۴ تا از خانه‌های سیاه، حرف انگلیسی وجود دارد. (E - F - G - H) احتمال $= \frac{۴}{۱۶} = \frac{۱}{۴}$

نکته

هرگاه بخواهیم محاسبه کنیم که در n بار انجام یک کار، چند بار انتظار داریم که رویداد موردنظر ما اتفاق بیافتد، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

تعداد مورد انتظار = احتمال روی دادن اتفاق × تعداد کل انجام کار

مثال ۲۷ اگر یک تاس را ۳۰۰ بار پرتاب کنیم، انتظار داریم چند بار عدد ۵ بیاید؟ در پرتاب تاس، شش عدد هم‌شانس داریم (۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶) پس احتمال آمدن عدد پنج، برابر با $\frac{۱}{۶}$ است. حال اگر ۳۰۰ بار تاس را پرتاب کنیم، داریم:

تعداد مورد انتظار برای آمدن عدد ۵ $= \frac{۱}{۶} \times ۳۰۰ = ۵۰$ بار

یعنی انتظار می‌رود که در ۳۰۰ بار پرتاب تاس، ۵۰ بار عدد ۵ بیاید.

مثال ۲۸ در یک دبستان، ۳۰ دانش‌آموز پایهٔ اوّل و ۴۰ دانش‌آموز پایهٔ دوم و ۵۰ دانش‌آموز پایهٔ سوم داریم. اگر به‌طور اتفاقی، نام یک دانش‌آموز از بین آن‌ها را صدا بزنیم:

الف) احتمال آن‌که دانش‌آموز پایهٔ اوّل باشد، چه‌قدر است؟ در این مدرسه، روی هم ۱۲۰ دانش‌آموز وجود دارد. پس کل حالت‌ها برابر با ۱۲۰ است.

احتمال انتخاب دانش‌آموز پایهٔ اوّل $= \frac{۳۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۴}$

ب) اگر ۶۰۰ بار این کار را انجام دهیم، انتظار داریم، چند بار دانش‌آموز پایهٔ سوم انتخاب شود؟ احتمال انتخاب دانش‌آموز پایهٔ سوم، $\frac{۵۰}{۱۲۰} = \frac{۵}{۱۲}$ است.

تعداد مورد انتظار برای انتخاب دانش‌آموز پایهٔ سوم $= \frac{۵}{۱۲} \times ۶۰۰ = ۲۵۰$

نکته

مجموع احتمال روی دادن و احتمال روی ندادن یک اتفاق، همواره برابر با یک است.

مثال ۲۹ در پرتاب یک تاس، احتمال آمدن عدد اوّل و احتمال نیامدن عدد اوّل را محاسبه کنید.

احتمال آمدن عدد اوّل (۲، ۳ و ۵) $= \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

احتمال نیامدن عدد اوّل (۱، ۴ و ۶) $= \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$

مثال ۳۰ اگر احتمال روی دادن یک اتفاق، $\frac{۳}{۷}$ باشد، احتمال روی ندادن آن چه‌قدر است؟

چون جمع احتمال‌های روی دادن و روی ندادن یک اتفاق برابر با یک است، بنابراین داریم:

احتمال روی ندادن $= ۱ - \frac{۳}{۷} = \frac{۴}{۷}$

مثال ۳۱ درون جامدادی نازنین‌زهرا ۳ مداد زرد، ۸ مداد قرمز و ۱۴ مداد سیاه وجود دارد. اگر نازنین‌زهرا با چشم بسته یک مداد را بیرون آورد:

الف) احتمال بیرون آمدن مداد زرد چه‌قدر است؟

درون جامدادی در کل $۳ + ۸ + ۱۴ = ۲۵$ مداد وجود دارد. احتمال بیرون آمدن مداد زردرنگ $\frac{۳}{۲۵}$ است.

ب) احتمال بیرون نیامدن مداد قرمز چه‌قدر است؟

احتمال بیرون آمدن مداد قرمزرنگ، $\frac{۸}{۲۵}$ است، پس احتمال بیرون نیامدن مداد قرمز رنگ، $۱ - \frac{۸}{۲۵} = \frac{۱۷}{۲۵}$ است.

ج) اگر این کار را ۱۰۰ بار انجام دهیم، انتظار داریم چند بار مداد سیاه بیرون بیاید؟

احتمال بیرون آمدن مداد سیاه، $\frac{۱۴}{۲۵}$ است. پس در ۱۰۰ بار، انتظار داریم $۱۰۰ \times \frac{۱۴}{۲۵} = ۵۶$ بار مداد سیاه بیرون بیاید.

نکته

در آزمایش‌های مختلف یک اتفاق، نتیجه‌های قبلی روی آزمایش‌های جدید تأثیر نمی‌گذارند. مثلاً اگر یک سکّه را ۹۱ بار پرتاب کنیم و همگی رو بیایند، در پرتاب دهم احتمال آمدن رو $\frac{۱}{۲}$ و احتمال آمدن پشت نیز $\frac{۱}{۲}$ (احتمال مساوی) است و نتایج ۹ بار اوّل تأثیری روی بار دهم ندارد.

روش‌های نوشتن کلّ حالت‌های یک رویداد

برای این‌که بتوانیم احتمال روی دادن یک حالت خاص را محاسبه کنیم، باید بتوانیم کلّ حالت‌های اتفاق موردنظر را شمارش کنیم. گاهی این کار ساده است. (مثل حالت‌های پرتاب یک سکّه یا حالت‌های پرتاب یک تاس) اما گاهی این کار دشوار و طولانی است. برای راحت‌تر شدن کار، معمولاً دو روش را مورد استفاده قرار می‌دهند.

الف) روش نمودار درختی　　　ب) روش جدول نظام‌دار

روش نمودار درختی

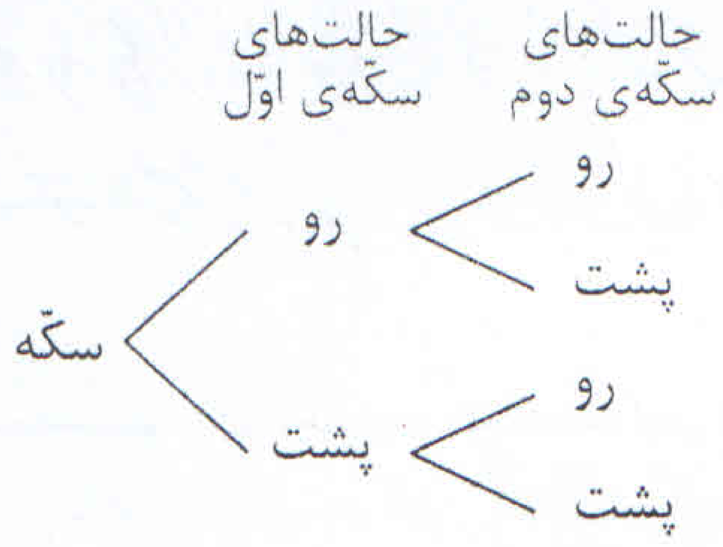
در این روش برای هر حالت یک شاخه در نظر می‌گیریم و سپس در انتهای هر شاخه حالت‌های اتفاق بعدی را می‌نویسیم. این روش بهترین روش ممکن برای محاسبهٔ همهٔ حالت‌های یک اتفاق است.

مثال ۳۲ دو سکّه را پرتاب می‌کنیم. همهٔ حالت‌های ممکن را برای آن‌ها بنویسید.

مشاهده می‌کنید که در کل ۴ حالت ممکن است روی دهد.

(رو - رو) ، (پشت - رو) ، (رو - پشت) ، (پشت - پشت)

۲ × ۲ = ۴



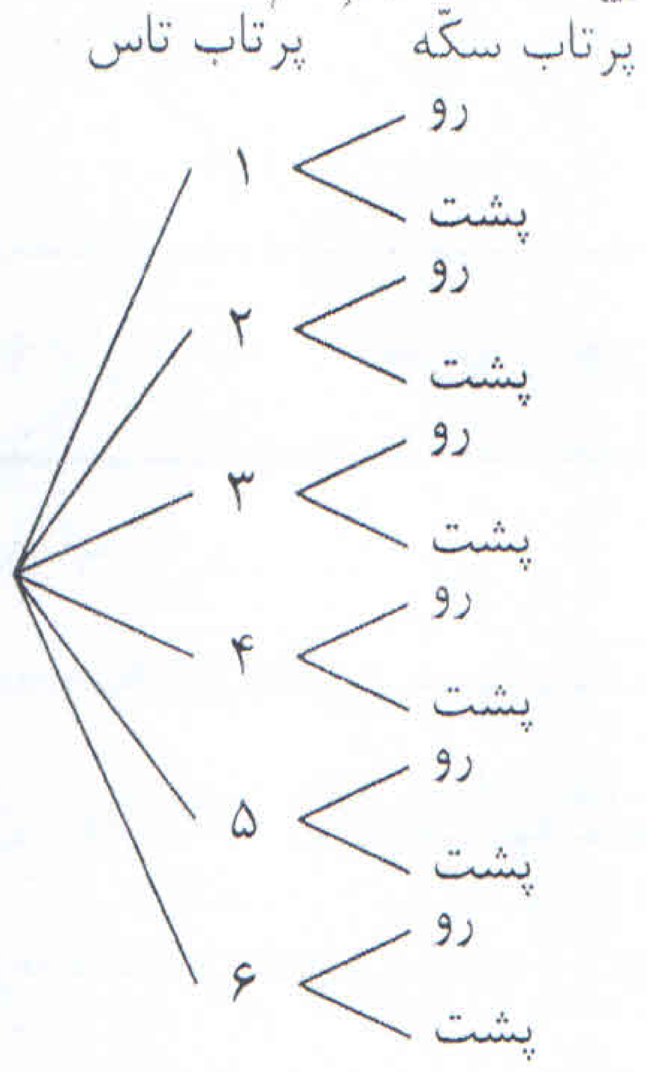
مثال ۳۳ یک تاس و یک سکّه را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که سکّه رو بیاید و تاس عدد کم‌تر از ۴ باشد را محاسبه کنید.

ابتدا نمودار درختی این دو رویداد را رسم می‌کنیم. در کل، ۱۲ حالت روی می‌دهد که حالت‌های موردنظر ما، عبارت‌اند از:

(رو - ۳) ، (رو - ۲) ، (رو - ۱)

$\text{احتمال} = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$

۶ × ۲ = ۱۲



روش جدول نظام‌دار

این روش معمولاً برای حالتی مناسب است که دو رویداد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این روش، ابتدا حالت‌های یک رویداد را در ردیف افقی و حالت‌های رویداد بعدی را در ستون عمودی می‌نویسیم و سپس مانند جدول ضرب سایر خانه‌ها را پر می‌کنیم.

مثال ۳۴ تمام حالت‌های پرتاب یک سکّه و یک تاس را در جدول نظام‌دار نمایش دهید و سپس مشخص کنید اگر ۱۰۰۰ بار این کار را انجام دهیم، انتظار داریم چند بار سکّه پشت بیاید و عدد تاس مرکب باشد؟

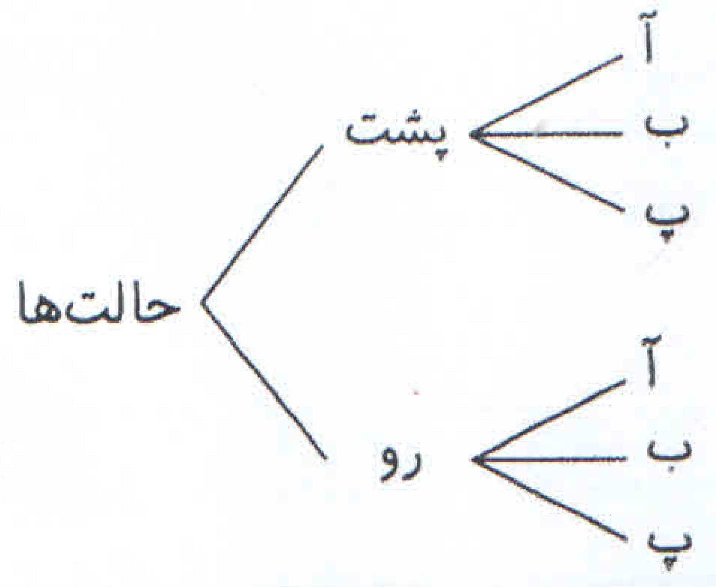
تاس / سکّه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
رو	۱- ر	۲- ر	۳- ر	۴- ر	۵- ر	۶- ر
پشت	۱- پ	۲- پ	۳- پ	۴- پ	۵- پ	۶- پ

در کل ۱۲ حالت روی داده است و حالت‌هایی که سکّه پشت و تاس عدد مرکب آمده است، عبارت‌اند از:

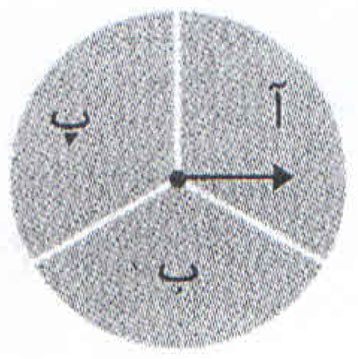
(۴ - پ) ، (۶ - پ) $\Rightarrow$ $\text{احتمال} = \frac{۲}{۱۲} = \frac{۱}{۶}$

مثال ۳۵ الف) فرض کنید یک سکّه را پرتاب می‌کنیم و عقربهٔ چرخنده زیر را نیز می‌چرخانیم، تمام حالت‌های ممکن را از دو روش بنویسید.

۳ × ۲ = ۶



چرخنده / سکّه	آ	ب	پ
پشت	پشت - آ	پشت - ب	پشت - پ
رو	رو - آ	رو - ب	رو - پ



ب) در سؤال قبل احتمال این‌که سکّه پشت بیاید و عقربه روی حرف نقطه‌دار قرار بگیرد، چه‌قدر است؟

کل حالت‌ها ۶ حالت است و حالت‌هایی که سکّه پشت و عقربه روی حرف با نقطه قرار گرفته باشد، ۲ تاست. بنابراین: $\text{احتمال} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$

مثال ۳۶ در پرتاب هم‌زمان ۲ تاس، احتمال هر یک از اتفاقات زیر را محاسبه کنید.

الف) جمع دو عدد رو شده کم‌تر از ۵ شود.

ابتدا همهٔ حالت‌های پرتاب دو تاس را می‌نویسیم.

کل حالت‌ها برابر با ۳۶ حالت است.

تاس ۱ / تاس ۲	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۱-۱	۱-۲	۱-۳	۱-۴	۱-۵	۱-۶
۲	۲-۱	۲-۲	۲-۳	۲-۴	۲-۵	۲-۶
۳	۳-۱	۳-۲	۳-۳	۳-۴	۳-۵	۳-۶
۴	۴-۱	۴-۲	۴-۳	۴-۴	۴-۵	۴-۶
۵	۵-۱	۵-۲	۵-۳	۵-۴	۵-۵	۵-۶
۶	۶-۱	۶-۲	۶-۳	۶-۴	۶-۵	۶-۶

در ۶ حالت جمع دو عدد رو شده کم‌تر از ۵ است.

$\frac{۱}{۶} = \frac{۶}{۳۶} =$ احتمال ⇐ (۳-۱) , (۲-۲) , (۲-۱) , (۱-۳) , (۱-۲) , (۱-۱)

ب) حاصل‌ضرب دو عدد رو شده بزرگ‌تر از ۲۰ شود.

در ۶ حالت، حاصل‌ضرب ۲ عدد، بیش‌تر از ۲۰ است. $\frac{۱}{۶} = \frac{۶}{۳۶} =$ احتمال ⇐ (۶-۶) , (۶-۵) , (۶-۴) , (۵-۶) , (۵-۵) , (۴-۶)

ج) اگر ۱۰۸۰ بار این کار را انجام دهیم، انتظار داریم در چند نوبت عدد هر دو تاس یکسان باشد؟

حالت‌هایی که عدد هر دو تاس، یکسان است، عبارت‌اند از:

$\frac{۱}{۶} = \frac{۶}{۳۶} =$ احتمال ⇐ (۶-۶) , (۵-۵) , (۴-۴) , (۳-۳) , (۲-۲) , (۱-۱)

تعداد دفعات مورد انتظار = $\frac{۱}{۶} \times ۱۰۸۰ = ۱۸۰$ بار

د) اگر ۷۲۰ بار این کار انجام دهیم، انتظار داریم چند بار آن، تاس اوّل کم‌تر از ۳ نیاید؟

حالت‌هایی که تاس اوّل کم‌تر از ۳ است:

(۲-۶) , (۲-۵) , (۲-۴) , (۲-۳) , (۲-۲) , (۲-۱) , (۱-۶) , (۱-۵) , (۱-۴) , (۱-۳) , (۱-۲) , (۱-۱)

احتمال این‌که تاس اوّل کم‌تر از ۳ باشد = $\frac{۱۲}{۳۶} = \frac{۱}{۳}$ ⇐ احتمال این‌که تاس اوّل، کم‌تر از ۳ نباشد = $۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$

تعداد دفعات موردنظر = $\frac{۲}{۳} \times ۷۲۰ = ۴۸۰$ بار

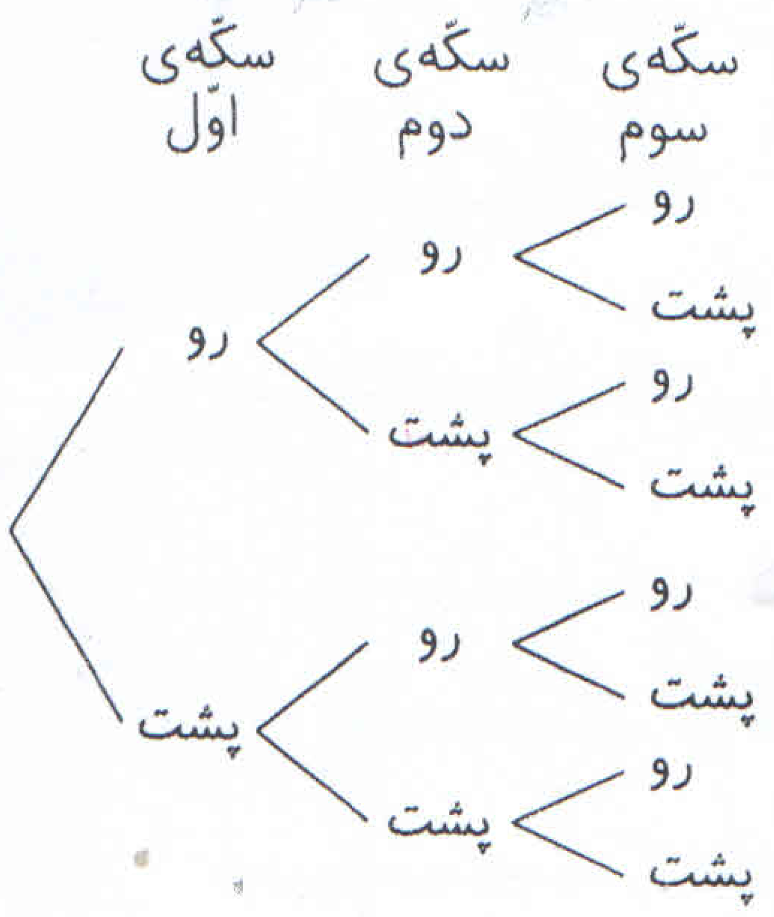
مثال ۳۷ **اگر سه سکّه را ۶۰۰ بار پرتاب کنیم، انتظار داریم چند بار هر سه سکّه یکسان نباشند؟**

ابتدا همهٔ حالت‌های پرتاب ۳ سکّه را می‌نویسیم، کل حالت‌ها برابر با ۸ حالت است که در ۲ حالت آن‌ها هر سه سکّه، یکسان هستند.

(پشت - پشت - پشت)، (رو - رو - رو)

احتمال این‌که سه سکّه یکسان باشد = $\frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$ ⇐ احتمال این‌که سه سکّه یکسان نباشد = $۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$

تعداد دفعات مورد انتظار = $\frac{۳}{۴} \times ۶۰۰ = ۴۵۰$ بار



۲ × ۲ × ۲ = ۸