باسمه‌تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون گراف

شنبه ۸ شهریور ۱۳۹۳ | دبیر: جبل‌عاملی | مدت آزمون: ۵ ساعت

پرسش نخست. ارباب حلقه‌ها! .... ۱۹ امتیاز

الف) یک گراف ساده‌ی زوج‌ـرأسی G با مجموعه رئوس $V(G)$ داریم. برای یک زیرمجموعه از رأس‌ها مانند S، زیرمجموعه‌ی $N(S)$ از رأس‌های خارج S، شامل رأس‌هایی است که دست کم یک یال به S دارند. در این گراف برای هر زیرمجموعه از رأس‌ها مانند S که $S \cup N(S) \neq V(G)$ داریم:

$$|N(S)| \geq |S|$$

ثابت کنید این گراف یک تطابق کامل دارد. (۱۱ نمره)

ب) به یک گراف ۴ رأسی که تنها یک یال نداشته باشد، **کایت** گوییم. یک گراف ساده‌ی $6n$ـرأسی را که هیچ زیرگراف آن (نه لزومن القایی)، کایت نباشد، **جبلی** می‌نامیم. بیشینه‌ی تعداد یال‌های ممکن برای یک گراف جبلی $6n$ـرأسی را $f(n)$ می‌نامیم. ثابت کنید: (۸ نمره)

$$9n^2 \leq f(n) \leq 12n^2$$

پرسش دوم. حلقه‌ی ارباب‌ها! .... ۱۶ امتیاز

الف) یک گراف هم‌بند ساده‌ی G داریم. به ازای هر زیرگراف القایی H از G، داریم:

$$\kappa'(H) \leq 10$$

بیشینه و کمینه‌ی $\chi(G)$ را بیابید. (۸ امتیاز)

ب) فرض کنید n و Δ اعدادی طبیعی باشند. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن که عدد رنگی یالی هر گراف ساده‌ی nـرأسی و mـیالی با درجه‌ی بیشینه‌ی Δ، برابر $\Delta + 1$ باشد، آن است که

$$\frac{(n-1)\Delta}{2} < m \leq \frac{n\Delta}{2}$$

و n فرد باشد. (۸ امتیاز)

پرسش سوم. سوال هشتم! .... ۳۰ امتیاز

کیانوش با وزوایی بازی می‌کند. حال:

ا) فرض کنید $n \geq ۲$، یک عدد طبیعی باشد. مقدار $R(C_۴, P_n)$ را بیابید. (۱۱ امتیاز)

ب) فرض کنید $n \geq ۳$، یک عدد طبیعی باشد. با استفاده از قسمت (ا)، ثابت کنید: (۲ امتیاز)

$$R(C_۴, C_n) \geq n + ۱$$

پ) فرض کنید $n \geq ۴$ یک عدد طبیعی باشد. ثابت کنید: (۱۷ امتیاز)

$$R(C_۴, C_n) \leq n + ۲$$

پرسش چهارم. دسته‌ی ویزینگ! .... ۲۲ امتیاز

ا) ثابت کنید در حد یک‌ریختی، دقیقن یک گراف ساده‌ی ۱۱۱ـرأسی وجود دارد که در آن هر دو رأس نامجاور، دقیقن یک هم‌سایه‌ی مشترک داشته باشند و هر دو رأس مجاور، هیچ هم‌سایه‌ی مشترکی نداشته باشند. (۱۱ امتیاز)

ب) در حد یک‌ریختی، چند گراف ساده‌ی ۱۱۱ـرأسی وجود دارد که در آن هر دو رأس، دقیقن یک هم‌سایه‌ی مشترک داشته باشند؟ (۱۱ امتیاز)

پرسش پنجم. عکس کلم در غار! .... ۲۳ امتیاز

گراف ساده‌ی G را در نظر بگیرید. با دو جهت‌دهی متفاوت یال‌های G، به دو گراف جهت‌دار بدون دور $D_۱, D_۲$ رسیده‌ایم. در یک عمل «محاکمه‌ی وزیر» روی یک گراف جهت‌دار، می‌توان جهت یک یال را برعکس کرد. ثابت کنید با تعدادی متناهی عمل محاکمه‌ی وزیر، می‌توان از گراف $D_۱$ به گراف $D_۲$ رسید؛ طوری که در حین انجام مراحل، هیچ یک از گراف‌های جهت‌داری که می‌سازیم، دور نداشته باشند.

من در تمام کارها قانون جذب را به کار گرفته‌ام و پاسخی شایسته از صندلی عقب دریافت کرده‌ام

ـ برگرفته از نامه‌ی اردیش به سکرش در کتاب غارهای طلایی و طلاهای غاری