به نام خدا

آزمون تئوری اوّل شاازز

زمان: چهار ساعت

۱۲ آذر ۱۳۹۴

---

۱. **همه‌ی مدیرها** .... ۲۵ امتیاز

مدیر مدرسه میخواهد n گروه از دانش آموزان المپیاد کامپیوترش را به مسابقات جهانی نصب ویندوز بفرستد. مدیر از دانش آموزان المپیاد کامپیوترش امتحان می‌گیرد و آن‌ها را بر حسب نمره‌ی امتحان رتبه‌بندی می‌کند، به دانش‌آموزی که رتبه‌اش در این امتحان i شده باشد دانش آموز i می‌گوییم. مدیر می‌خواهد که گروه‌ها یک‌دست باشند؛ مدیر به یک گروه‌بندی یک‌دست می‌گوید اگر به ازای هر دو گروه مختلف $S_۱, S_۲$ دانش آموزی مانند x داخل گروه $S_۱$ و دانش آموزی مانند y داخل گروه $S_۲$ وجود داشته‌باشد به صورتی که $|x-y| = ۱$.

مدیر پس از در میان گذاشتن موضوع با دانش‌آموزان المپیاد کامپیوتری، با واکنش منفی آن‌ها روبرو می‌شود و با کمال تعجب می‌بیند که علاقه‌ای به شرکت در مسابقه ندارند! از این رو از شما می‌خواهد کوچکترین k را پیدا کنید که بتواند n گروه یک‌دست از دانش آموزان ۱ و ۲ و ...و k انتخاب کند!

برای مثال سه گروه روبرو یک‌دست هستند: (۱، ۳)، (۲، ۵)، (۴) ولی سه گروه روبرو یک‌دست نیستند: (۱، ۲)، (۳، ۴)، (۵)

نکته: در یک گروه‌بندی هر دانش‌آموز عضو دقیقا یک گروه است و همچنین گروه‌ها محدودیت تعداد نفر ندارند.

۲. **آی باکلاه** .... ۲۵ امتیاز

آقای آ اخیرن به مجموعه‌هایی از مجموعه‌ها علاقه‌مند شده‌است! اون به مجموعه‌ای از مجموعه‌ها مثل S آـ‌پسند میگوید اگر به ازای هر $S_۱, S_۲ \in S$ داشته‌باشیم: یا $S_۱ \subseteq S_۲$ یا $S_۲ \subseteq S_۱$ و یا $S_۱ \cap S_۲ = \emptyset$.

(آ) فرض کنید S یک مجموعه ی آـ‌پسند از زیر مجموعه های $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ است. $|S|$ حداکثر چقدر است؟ (۸ امتیاز)

(ب) تعداد مجموعه های آـ‌پسند که اعضایشان زیر مجموعه های $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ است را $f(n)$ می‌نامیم. همچنین تعداد درخت های متفاوت n راسی که رئوس در آن شماره (برچسب) دارند را $t(n)$ می‌نامیم . به عنوان مثال $t(۲) = ۱$ و $t(۳) = ۳$.

ثابت کنید $۴t(n) \le f(n) \le ۲^{n+۲}t(۲n)$. (۱۷ امتیاز)

نکته: دو درخت متفاوت هستند اگر و تنها اگر دو راس مانند x و y وجود داشته باشد که یال بین راس‌های با شماره x و y در درخت اول باشد ولی در درخت دوم نباشد.

۳. **بودن پنیر یا نبودن پنیر** .... ۲۵ امتیاز

گری و n $(n \ge ۱)$ تا از دوستای حلزونش نیمه‌ی شب داشتند در پارک ملت قدم می‌زدند که شاگرد گری به گری زنگ می‌زند.

(زیرا همان‌طور که می‌دانید گری از معروف ترین معلم های المپیاد است!) گری غرق در صحبت می‌شود و از دوستانش غافل می‌گردد. در همین حین باب و فیل که در پارک حضور داشتند، n حلزون تنها را می‌بینند و فکری شیطانی به سرشان می‌زند.
باب می‌آید و در حرکتی بی‌شرمانه حلزون‌ها را روی محور اعداد می‌چیند؛ حلزون i را در مختصات حقیقی x_i قرار می‌دهد به طوری‌که $x_i \leq x_{i+1}$.
سپس او از فیل می‌خواهد که به هر حلزون مقصدی حقیقی بدهد که در نهایت (پس از رفتن هر حلزون به مقصدش) مختصات حلزون‌ها تشکیل یک دنباله‌ی حسابی بدهد. به عبارت دیگر فیل باید دنباله‌ی حقیقی $y_1, y_2, \ldots, y_n$ را به حلزون‌ها بدهد به‌طوری که حلزون i به مقصد y_i برود و y دنباله‌ای حسابی باشد.
قبل از آن‌که فیل دست به کار بشود، باب گری را صدا می‌زند! گری می‌آیند و با دیدن وضعیت خیلی عصبانی می‌شود و به فیل می‌گوید دنباله ی y که قرار است بدهد، باید در بین همه‌ی دنباله‌های حسابی، یکی از آن‌هایی باشد که $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ کمینه است. همچنین به تعداد حلزون هایی که در طی این عملیات حرکت می‌کنند (یعنی به تعداد i هایی که $x_i \neq y_i$ بار) به فیل چیزبرگر بدون پنیر می‌دهد که بخورد! (جالب است بدانید که فیل از چیزبرگر بدون پنیر متنفر است)
فیل در وضعیت خیلی بدی قرار گرفته‌است و متوجه می‌شود که این‌ها همه نقشه‌ی باب بوده‌است! چون باب دنباله ی x را طوری انتخاب کرده‌است که فیل بیشترین تعداد چیزبرگر بدون پنیر را بخورد! حالا شما بگویید که اگر فیل بهترین دنباله ی y را انتخاب کند، چند تا چیزبرگر بدون پنیر می‌خورد؟ (پاسخ شما باید یک عبارت صریح بر حسب n باشد.)

۴. **قطحی داستان** .... ۲۵ امتیاز
میدانیم که روستای برره به دو بخش بالا‌ـ‌برره و پایین‌ـ‌برره تقسیم شده‌است. هر کس از بالا‌ـ‌برره تعدادی از افراد پایین‌ـ‌برره ای را می‌شناسد (ممکن است کسی را نشناسد) که آن‌ها او را هم می‌شناسند. (یعنی رابطه‌ی شناختن، رابطه‌ای دوطرفه است)
به گروهی از اهالی بالا‌ـ‌برره معروف میگوییم اگر هرکسی از پایین‌ـ‌برره، حداقل یکی از آن‌ها را بشناسد. به گروهی از اهالی پایین برره معروف میگیم که هر کسی از بالا‌ـ‌برره، حداقل یکی از آن‌ها را بشناسد.
ثابت کنید جمع تعداد گروه‌های معروف از اهالی بالا‌ـ‌برره و تعداد گروه‌های معروف از اهالی پایین‌ـ‌برره عددی زوج است.