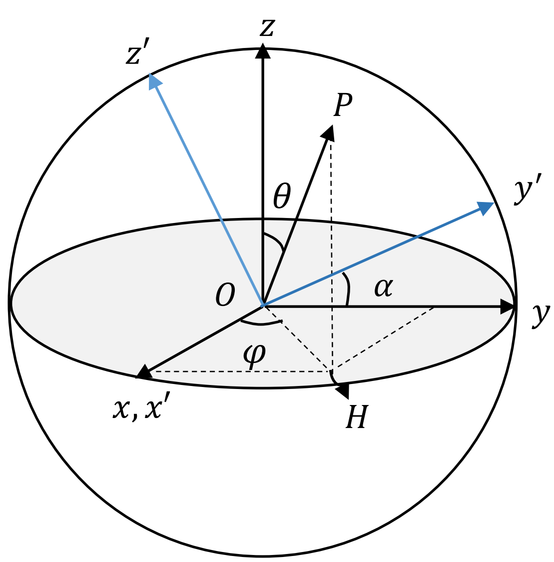
به نام هستی بخش

# فی باب حصول روابط کرویه !

با عرض سلام و خسته نباشید خدمت همه ی فرزندان نجومی ! همان طور که از اسم این نوشته پیداست ، می خواهیم روابط بین اضلاع و زوایای یک مثلث کروی را به دست آوریم ! منتهای مراتب به شیوه ی دوران دستگاه مختصات که از نظر نویسنده (یعنی اینجانب!) کاری ست شیرین و مفرح و آموزنده و نیز مقوی برای افزایش قوه ی درک سه بُعدی المپیادی های این مرز و بوم !

در این نوشته فرض شده که دانش پژوهان عزیز با مفاهیمی مثل کره (!!) ، دایره عظیمه و مثلث کروی و از این جور چیز ها آشنا هستند ! عرض کنم همان طور که در شکل می بینید یک دستگاه مختصات سه بُعدی را در یک کره ی زیبا بنا نهاده ایم طوری که مبدا دستگاه مختصات ما همان مرکز کره است ! (انصافا به این شکل یک مقدار بیشتری نگاه کنید ! کلی زحمتش را کشیده ایم !!)




خوب است یک نمای کلی از کار هایی که قرار است انجام دهیم را در ذهن داشته باشید ! ببینید فرزندان ! ما یک نقطه ی دلخواه به نام P را روی کره مشخص کرده ایم ! ابتدا مولفه های این نقطه را در دستگاه مختصات سیاه رنگ می نویسیم ! سپس دستگاه مختصات خود را به اندازه ی زاویه ی $\alpha$ حول محور x به صورت پادساعتگرد دوران می دهیم ! تا اینجا مثلث کروی ای که قرار است دل و روده ی روابطش را به دست آوریم ، مشخص شده است : مثلث $PZZ'$ ! (چرا مثلث کروی ست ؟ به خودتان پاسخ دهید !) حال مولفه های نقطه ی P را در دستگاه مختصات دوران یافته (دستگاه آبی رنگ) می نویسیم ! سپس دست به دامن هندسه ی مسطحه شده و روابط بین مولفه های نقطه ی P در دستگاه مختصات سیاه و آبی را می

یابیم . فرآورده های واکنش هایی که گفتیم : روابط بین اضلاع و زوایای مثلث کروی + مقداری گرما از سر عزیزان ! خب شروع می کنیم :

قدم اول : به دست آوردن مولفه های نقطه ی P در دستگاه مختصات سیاه رنگ

با توجه به شکل و تجزیه برداری داریم :

$$x = OH.Cos\varphi = OP.Sin\theta.Cos\varphi$$

$$y = OH.Sin\varphi = OP.Sin\theta.Sin\varphi$$

$$z = PH = OP.Cos\theta$$

قدم دوم : به دست آوردن مولفه های نقطه ی P در دستگاه مختصات آبی رنگ

باز هم مثل حالت قبل با این تفاوت که بر سر هر پارامتر یک "پریم" می نهیم :

$$x' = OP.Sin\theta'.Cos\varphi'$$

$$y' = OP.Sin\theta'.Sin\varphi'$$

$$z' = OP.Cos\theta'$$

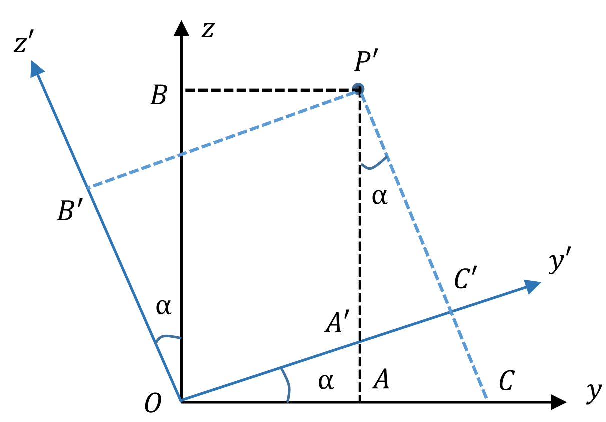
مسلما $x', y', z'$ مختصات نقطه ی P در دستگاه مختصات آبی رنگ است . $\theta'$ زاویه ای که بردار OP با محور $z'$ می سازد و $\varphi'$ هم زاویه ای که تصویر بردار OP روی صفحه ی $x'y'$ با محور $x'$ می سازد.

قدم سوم : به دست آوردن روابط بین مولفه های دو دستگاه

فرزندان عزیز دقت کنید که چون دوران دستگاه مختصات حول محور x است ، بنابراین محور x ثابت مانده و مولفه مربوط به این محور هم تغییر نمی کند . یعنی :

$$x = x'$$

حال نقطه ی P را بر صفحه ی YZ تصویر می نماییم . حاصل میشود این :



کافیست دست به دامن هندسه ی مسطحه شویم :

$$x = x'$$

$$y = OA = OC - AC = \frac{y'}{Cos\alpha} - z.tan\alpha$$

$$z = P'A = P'A' + A'A = \frac{z'}{Cos\alpha} + y.tan\alpha$$

قدم چهارم : ترکیب قدم های اول و دوم با قدم سوم !

می خواهیم $x, y, z$ را بر حسب $\varphi$ و $\theta$ و همچنین $x', y', z'$ را بر حسب $\varphi'$ و $\theta'$ قرار دهیم تا روابط بین $\varphi, \theta, \varphi', \theta'$ به دست آید ! دوستان بسم الله :

$$x' = x \Rightarrow Sin\theta'.Cos\varphi' = Sin\theta.Cos\varphi$$

$$y' = y.Cos\alpha + z.Sin\alpha \Rightarrow Sin\theta'.Sin\varphi' = Sin\theta.Sin\varphi.Cos\alpha + Cos\theta.Sin\alpha$$

$$z' = z.Cos\alpha - y.Sin\alpha \Rightarrow Cos\theta' = Cos\theta.Cos\alpha - Sin\theta.Sin\varphi.Sin\alpha$$

کارمان تقریبا به پایان رسید ! عزیزان یاد مبارکتان هست که گفتیم مثلث کروی ما $ZPZ'$ است ؟! حال یک مثلث کروی دلخواه را در نظر بگیرید : $ABC$ که A راس متناظر Z ، B راس متناظر P و در نهایت C هم راس متناظر Z' می باشد . در مثلث ABC ضلع رو به رو به هر زاویه را با حرف کوچک همان زاویه نمایش می دهیم . بنابراین داریم :

$$\alpha = b$$

$$\theta = c$$

$$\theta' = a$$

$$\varphi = A - 90$$

$$\varphi' = 90 - C$$

قدم پنجم : لذت ببرید !

لیدیز اند جنتلمن ! 3 رابطه ای را که در قدم چهارم به دست آوردیم ، بازنویسی می کنیم :

رابطه ی سینوس ها : $Sina.SinC = Sinc.SinA$

رابطه ی قیاسی : $Sina.CosC = -Sinc.CosA.Cosb + Cosc.Sinb$

رابطه ی کسینوس ها : $Cosa = Cosc.Cosb + Sinc.Sinb.CosA$

با کمی شیطنت به فضل الهی یک رابطه ی دیگر را هم به دست می آوریم : رابطه ی 4 جزئی !

برای به دست آوردن رابطه ی 4 جزئی کافیست رابطه ی قیاسی را بر $Sinc$ تقسیم نماییم . داریم :

$$\frac{Sina}{Sinc}.CosC = -CosA.Cosb + Cotc.Sinb$$

از رابطه ی سینوس ها هم می دانیم : $\frac{Sina}{Sinc} = \frac{SinA}{SinC}$

با جایگذاری عبارت فوق داریم :

رابطه ی چهار جزئی : $CosA.Cosb = Sinb.Cotc - SinA.CotC$

به قول نویسنده : تموم شد رفت ...

دوستان عزیز تا درودی دیگر ، بدرود !

اثر : سید حسین هاشمی !

Mail : Hosein.hashemi72@gmail.com

Blog : OCO.blogsky.com