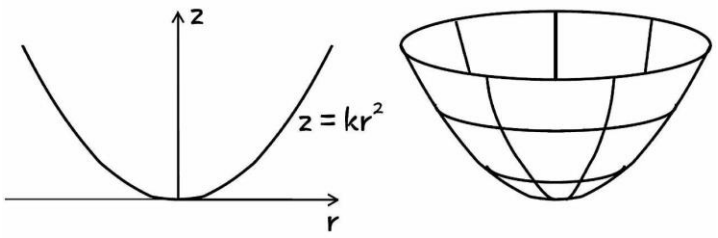
مطابق شکل ۱، ذره‌ای به جرم m مقید است که بر روی سطح داخلی یک کاسه‌ی سهموی شکل، با معادله‌ی $z = kr^2$، حرکت کند. ذره حرکت خود را از ارتفاع z_0 و با سرعت اولیه‌ی افقی v_0 آغاز می‌کند. شتاب گرانش زمین را g درنظر بگیرید.



شکل ۱

الف) به ازای یک مقدار ویژه برای سرعت افقی v_0، که ما آن را v_h می‌نامیم، ذره بر روی مسیر دایره‌ای شکلی حرکت می‌کند. v_h را برحسب پارامترهای داده شده بیابید. (۱٫۵ نمره)

م) حال فرض کنید که به ذره سرعت اولیه‌ی افقی $v_0 > v_h$ می‌دهیم. بیش‌ترین ارتفاعی که ذره می‌تواند به آن برسد را بدست آورید. (۳ نمره)

حال حالتی را در نظر بگیرید که ذره حرکت خود را از ارتفاع z_0 و با سرعت اولیه‌ی $v_0 = 0$ آغاز می‌کند.

ی) فرض کنید z_0 به اندازه‌ای کوچک است که می‌توانیم حرکت ذره در راستای r را همانند یک نوسان‌گر ساده‌ی هماهنگ در نظر بگیریم. دوره‌ی تناوب حرکت آن T را محاسبه کنید. (۴ نمره)

د) حال فرض کنید که z_0 کوچک نباشد. با استدلال کافی بیان کنید که دوره‌ی تناوب ذره در این حالت نسبت به دوره‌ی تناوب ذره در قسمت قبل، چه وضعیتی دارد؟ (بزرگ‌تر، کوچک‌تر یا برابر است؟) (۱٫۵ نمره)

راهنمایی: تکانه‌ی زاویه‌ای برای ذره‌ای که حول محوری می‌چرخد از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

که در آن P تکانه‌ی خطی ذره و r فاصله‌ی ذره از محور چرخش است. همچنین می‌دانیم تکانه‌ی زاویه‌ای ذره‌ای که به آن گشتاور نیروی برآیندی وارد نمی‌شود، ثابت است.