به نام آنکه هستی نام ازو یافت   فلک جنبش، زمین آرام ازو یافت

نظامی

یاداشت جلسه‌ی دوم

ترکیبیات شمارشی:

صفر) می‌خواهیم اعداد ۱ تا $2n$ را در جدول $2\times n$ قرار بدهیم به طوری‌که مقدار خانه‌ها از چپ به راست و از پایین به بالا صعودی باشد. به چند حالت مختلف می‌توان این کار را انجام داد؟ مثالی از یک جدول مطلوب برای $2n=8$:

۳	۴	۶	۸
۱	۲	۵	۷

یک) در مجلس کشور ناریا هر نماینده در دقیقاً در ۳ کمیسیون عضو است و هر کمیسیون دقیقاً ۳ عضو دارد. ثابت کنید تعداد کمیسیون‌ها و نمایندها برابر است.

یک و نیم) در هر گراف دو بخشی و k ـ منتظم تعداد رئوس دو بخش برابر است.

دو) دویست دانش‌آموز یزدی در مسابقه‌ی MathContest شرکت کرده‌اند! از شرکت کننده‌ها یک آزمون ۶ سؤاله گرفته شده است. می‌دانیم که هر سؤال دقیقاً توسط ۱۲۰ نفر حل شده، ثابت کنید دو شرکت کننده وجود دارند که هر سؤال دست کم توسط یکی از آن دو حل شده است.

سه) در مسابقه‌ی MathContest، a شرکت کننده و b داور داریم. هر داور به هر شرکت کننده نمره‌ی «قبولی» یا «رد» می‌دهد. فرض کنید هر دو داور حداکثر در مورد k نفر هم نظر هستند. ثابت کنید $\frac{k}{a}\geq\frac{b-1}{2b}$.

چهار) $C_1, C_2, \ldots, C_n$ را تعدادی دایره با شعاع واحد در صفحه‌ی مختصات در نظر بگیرید به طوری‌که هیچ دوتایی از آن‌ها بر هم مماس نیستند. همچنین فرض‌کنید ناحیه‌ای از صفحه که توسط دایره‌ها پوشیده شده همبند است. مجموعه‌ی S را مجموعه‌ی نقاطی در نظر بگیرید که حداقل روی دو دایره قرار دارند. ثابت کنید $|S|\geq n$.

پنج) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ را زیرمجموعه‌های متفاوتی از $\{1, 2, \ldots, n\}$ در نظر بگیرید به طوری‌که برای هر $i\neq j$ داریم $|S_i\cap S_j|=1$. ثابت کنید $m\leq n$.

شش) حل این سؤال ۱۵ هزار تومان جایزه دارد! مقدار صریح عبارت زیر را بیابید. تابع $f(i)$ را تابع فیبوناتچی در نظر بگیرید.

$$\sum_{i=2}^{\infty}\left(1-\frac{f(i+1)}{2^{i-1}}\right)\times i$$

الگوریتم در ترکیبیات :

ـ بیشتر محتوای این قسمت از فصل اول کتاب *Olympiad Combinatorics* نوشته‌ی *Pranav A. Sriram* تهیه شده. مطالعه‌ی این کتاب رو به شدت توصیه می‌کنم.

صفر) ثابت کنید هر گراف با درجه‌ی بیشینه‌ی Δ را می‌توان با حداکثر $\Delta+1$ رنگ جوری رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو راس مجاوری هم رنگ نباشند.

یک) گراف G با V راس و E یال داده‌شده. ثابت کنید G یک زیرگراف القایی مثل H دارد که درجه‌ی هر راس در آن دست‌کم برابر $\frac{E}{V}$ است. (به عبارت دیگر هر گراف با میانگین درجه‌ی d یک زیرگراف القایی با درجه‌ی کمینه‌ی $\frac{d}{2}$ دارد. زیرگرافی از گراف که با در نظر گرفتن زیرمجموعه‌ای از راس‌ها و همه‌ی یال‌های بین آن‌ها در گراف حاصل می‌شود را زیرگراف القایی می‌گویند.)

دو) یک جدول $2\times n$ داده شده، مقدار هر خانه از جدول یک عدد حقیقی مثبت است و مجموع هر ستون دقیقاً برابر یک است. ثابت کنید می‌توان از هر ستون یک خانه انتخاب کرد به طوری که مجموع خانه‌های انتخاب شده در هر سطر دست‌بالا برابر با $\frac{n+1}{4}$ باشد. مثالی از یک جدول 2×4 :

۰/۴	۰/۳	۰/۲۵	۰/۹
۰/۶	۰/۷	۰/۷۵	۰/۱

سه) مجموعه‌ی $\{x,y,z\}$ را «خَشُکْ» می‌نامیم اگر داشته باشیم: $\{z-y,y-x\}=\{1395,2016\}$. ثابت کنید می‌توانیم مجموعه‌ی همه‌ی اعداد صحیح نامنفی را به مجموعه‌های خَشُکْ افراز کنیم.

چهار) یک صفحه‌ی شطرنجی $n\times m$ داریم که روی هر خانه‌ی آن یک عدد طبیعی نوشته شده است. در هر مرحله می‌توانیم به دو خانه‌ی مجاور دلخواه در جدول عدد صحیحی مثل k را اضافه کنیم به طوری که مقدار هیچکدام منفی نشود. (دو خانه مجاورند اگر یال مشترک داشته باشند). شرط لازم کافی‌ایی بیابید که بتوان در متنهای مرحله همه‌ی خانه‌های جدول را صفر کرد.