

به نام خداوند جان و خرد

آزمون تئوری پنجم

دپارتمان ریاضی و کامپیوتر مشهد

mathdpt.blog.ir

وقت آزمون : ۳۰۰ دقیقه

نکات آزمون : هر گونه رابطه ای دو طرفه میباشد مگر برعکس آن در سوال اعلام شده باشد

هر گرافی لیبل دار میباشد

طولانی بودن سوالات کاملن از قصد میباشد

اگر واقعن سوالی به دو شکل برداشت شود نوشتن یکی کافی نیست بلکه غلط است
(ما شکلی که نوشتید در نظر میگیریم.) پس هر دو را بنویسید

سؤال اول : مدرسه موش ها و روز آشنایی..... ۱۰ امتیاز

مدرسه موش ها امسال ۱۳۹۱ دانش آموز ثبت نام کرده است. روز اول مدرسه بود و بعضی دانش آموزان همدیگر را میشناختند. پخمل موش سال دومی که مسؤول معرفی کردن دانش آموزان به یکدیگر بود متوجه شد که در هر جمع چهار نفری حتمن یک نفر هست که سه نفر دیگر را بشناسد. پخمل برای آشنا کردن دانش آموزان با هم میتواندست یک نفر را به کلاس معرفی کند پس از معرفی کردن همه با آن یک نفر آشنا می شوند. معرفی کردن یک ساعت زمان میبرد.

الف) پخمل می خواست بدون نگاه کردن به لیست دانش آموزان مطمئن شود که حتمن یک دانش آموز هست که همه را میشناسد (این طوری مطمئن میشد لازم نیست ۱۳۹۰ ساعت وقت صرف کند).

ب) با توجه به شرایط مسأله حداکثر زمانی که آشنا کردن دانش آموزان با هم طول میکشد را محاسبه کنید (بدیهیست که لازم نیست دانش آموزی که با همه آشنایی دارد را معرفی کرد)

سؤال دوم : حدس گراف ۲۰ امتیاز

بازی حدس گراف سالیان سال است که در شهر موش ها معروف شده است. بازی بسیار ساده است. تیم اول (که باید قهرمان مسابقه قبلی باشد) باید یک گراف در نظر بگیرد اما آن را نشان ندهد. تیم دوم هر تعداد سؤال که خواست میتواند از تیم اول بپرسد. تیم دوم در هر سؤال یک مجموعه راس شامل فرد راس معرفی میکند و تیم اول رئوس درجه فرد در زیرگراف القایی با آن مجموعه راس را مشخص میکند (یعنی میگوید دقیقن کدام رئوس درجه شان فرد است). در نهایت تیم دوم باید یک گراف معرفی کند و ادعا کند گراف تیم اول این گراف بوده. پس از آن تیم اول هم گرافی که در نظر دارد را معرفی میکند. اگر تیم دوم درست حدس زده بود بازی را میبرد. بازنده باید خود را به گربه معرفی کند تا خورده شود. گلابی (راسوی اعظم) سالیان سال است که دارد قهرمان مسابقه می شود و فردا با تیم پخمل مسابقه دارد. پخمل که خود را برای خورده شدن آماده کرده بود ناگهان فکری به سرش زد. پخمل متوجه شد که گلابی تقلب میکند و گرافی که ارائه میدهد را تغییر میدهد. (اما گرافی که ارائه میدهد طوری طراحی شده که پاسخش به سؤالات تیم دوم درست باشد). پخمل ابتدا میخواست مطمئن شود که همیشه امکان تقلب هست. وقتی مطمئن شد به داور ها پیشنهاد داد و گفت بهتر است گراف همبند نباشد وگرنه نمیشود.

گلابی روز قبل از مسابقه خود را به گربه معرفی کرد ...

الف) ثابت کنید همیشه امکان تقلب کردن هست (یعنی نمیشود با سؤال مشخص شده به طور دقیق گراف را مشخص کرد) ۷ امتیاز

ب) مشخص کنید که چرا پیشنهاد پخمل مشکل قبلی را حل میکند ؟

سؤال سوم : تله گربه ۱۵ امتیاز

پس از آنکه پخمل ثابت کرد مسابقه حدس گراف را فقط تیم دوم میبرد شهر موش‌ها با مشکل بسیار بزرگتری مواجه شد. گربه! گربه سالیان سال بود بازنده های مسابقه‌ی حدس گراف را میخورد. پخمل (که در مسابقه حدس گراف بعدی تیم اول بود) برای نجات دادن جان خود نقشه‌ای بر علیه گربه کشید. برای عملی کردن نقشه یک جوجه تیغی، یک موش و یک راسو که دو به دو یکدیگر را بشناسند لازم بود. پخمل میدانست در شهر موش‌ها n موش و n راسو و n جوجه تیغی یافت می‌شود که هر نفر $n+1$ نفر از گونه‌های به غیر از گونه خود را میشناسد.

ثابت یا رد کنید: چنین سه نفری وجود دارند و پخمل میتواند جان خود را نجات دهد.

سؤال چهارم : مخمل ناراحت : (.....) ۲۵ امتیاز

پخمل که آخرین از مخمل قول گرفت که مخمل دیگر بازی اینترنتی (از جمله مافیا) نکند روزی مخمل را غمگین در حال نگاه کردن به جدول تورنمنت بازی‌ها یافت و فهمید که بازی‌های زیادی را بخاطر حضور نداشتن باخته. پخمل با کمی دقت در جدول به نکته جالبی دست یافت و فکری به ذهنش رسید. در جدول تورنمنت هر دو نفر دقیقاً یک بار بازی میکنند (برد دو امتیاز، مساوی یک امتیاز و باخت صفر امتیاز). پخمل به فکر طرح یک سؤال برای مخمل افتاد که ذهن مخمل را مشغول کند. سؤال او اینگونه بود: اگر بتوانی یک جدول تورنمنت با n نفر بسازی که هر دو نفر با هم دقیقاً یک بازی کرده باشند و پس از مرتب سازی امتیازها، دو نفر پشت سر هم در جدول پیدا شوند که اختلاف نمره‌شان بیشتر از $f(n)$ شود میتوانی مافیا بازی کنی. پخمل دنبال ضابطه‌ای برای تابع f میگردد به طوری که مخمل موفق به حل سؤال نشود و مقدار $f(n)$ کمینه باشد. ضابطه‌ی تابع f را بیابید. (درستی ادعای خود را ثابت)

سؤال پنجم : قرعه کشی بزرگ ۳۰ امتیاز

هر ساله در بین دانش آموزان شهر موش‌ها قرعه کشی‌ای برگزار می‌شود که طی آن دو گونه از حیوانات (از سه گونه حیوان موجود) انتخاب و از هر گونه حداقل k حیوان انتخاب می‌شود و حیوانات انتخاب شده به اردوی جنگل‌های استوایی فرستاده میشوند. پخمل که آخرین توانایی خود را در کمک به شهر اثبات کرده مسؤلیت برگزاری این قرعه‌کشی را بر عهده میگیرد. روشی که ارائه میدهد به این گونه است که هر گونه از حیوانات n دانش آموز معرفی کنند. سپس به هر گونه از حیوانات یک جایگشت از اعداد 1 تا n داده می‌شود. حال دو گونه‌ای را انتخاب میکنیم که بزرگترین زیر دنباله مشترک اکیدن یکنوا (اکیدن صعودی یا اکیدن نزولی) را داشته باشند (اگر بیش از یک جفت از این گونه‌ها حضور داشتند یک جفت را رندوم انتخاب میکنیم) و اعضای آن زیردنباله‌ها را دارند به سفر میفرستیم. مخمل که تازه متوجه شده بود سؤالی که از پخمل گرفته سرکاری بوده و جوابی ندارد تصمیم به خراب کردن قرعه کشی گرفت. مخمل میخواهد طوری جایگشت‌های 1 تا n (همان 3 جایگشتی که در ابتدا به دانش آموزان هر گونه میدهند) را تغییر دهد که

نشود با روش ذکر شده $k=2$ دانش آموز انتخاب کرد. پخمل که از نقشه شوم مخمل آگاه می شود تصمیم میگیرد عدد n (تعداد دانش آموزانی که در هر گونه انتخاب می شوند) را به قدری زیاد کند که مخمل هر کاری هم که بکند $k=2$ دانش آموز با روش مشخص شده وجود داشته باشند. سؤالی که برا همه به وجود آمده این است که کدام یک موفق می شود به هدف خود برسد.

الف) اگر k برابر ۳ بود کدام یک موفق می شود؟ (۶ امتیاز)

ب) اگر k عددی بزرگتر از ۵ بود کدام یک موفق می شود؟

سؤال ششم : بازم سؤال آخه؟؟؟ ۷۰ امتیاز

پخمل به طور مادر زاد عاشق گراف های منتظم و همبند بود و از دور همیلتونی بدش می آمد. گرافی که منتظم باشد و دور همیلتونی نداشته باشد و همبند باشد را پخمل دوست مینامیم. پخمل چندین سال است دارد روی مسأله ی دور عجیب روی گراف های منتظم تحقیق میکند. دور عجیب در گراف k -منتظم پخمل دوست دوریست که شامل k راس کاملن مجزا و همسایه های آن k راس باشد. مسأله ی دور های عجیب میپرسد که آیا هر گراف پخمل دوست دوری عجیب دارد؟ قهرمان داستان هیچ وقت نتوانست مسأله را به صورت کامل حل کند امروز قصد دارد ایده ی استقرا را روی مسأله امتحان کند. وظیفه شما حل کامل این مسأله نیست بلکه پخمل از شما فقط پایه استقرا ($k=3$) را میخواهد.

الف) مسأله را برای $k=3$ حل کنید (صفر امتیاز به همراه یک آفرین)

ب) اگر سؤال اول و پنجم را حل کردید و هنوز چهار ساعت به پایان آزمون باقی مانده است. با خوشحالی بر گه

خود را تحویل دهید(هفتاد امتیاز)