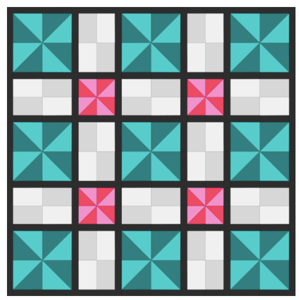
صفحات تصویری متناهی، بلوک ها، مربع های لاتین، کدها و چیز های ساختگی زیبای دیگر

حسین نادری

۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۵



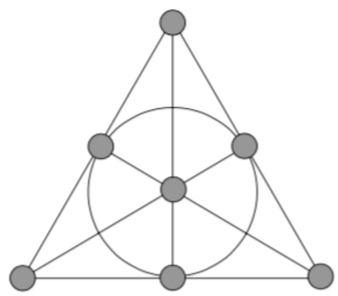
مقدمه و فهرست

فهرست مطالب

این نوشته ترجمه ای از فصل ۱۴ کتاب «ریاضیات گسسته: مقدماتی و فراتر از آن» نوشته ی ل.لواژ، ج.پلیکان و ک.وزرترگمبی معروف به «گسسته پلیکان» است. کتاب در سطح دانشجویان کارشناسی برای تدریس درس ریاضیات گسسته نوشته شده است. فصل ۱۴ ملغمه ای از ساختار های زیبای ریاضی است که به ارتباط میان آن ها نیز می پردازد. این مقاله دو قسمت دارد: قسمت اول آن، سه بخش اول فصل را در برمی‌گیرد که حسین نادری آن را ترجمه و حروف چینی کرده است و قسمت دوم که به ترجمه ی سه بخش دوم می پردازد بعدتر به دست اسماعیل نادری منتشر می شود. سه بخش اول به ترتیب دنیا های کوچک زیبا، صفحات متناهی آفین و تصویری و طراحی بلوکی اند و عناوین قسمت دوم سیستم های اشتاینر، مربع های لاتین و کدها هستند.

۱ دنیاهای کوچک زیبا

در بخش اول می خواهیم شما را با دنیاهای کوچکی که ویژگی های جالبی دارند آشنا کنیم. نشان دادن این دنیا ها با نقطه و خط شهود بیشتری برای فکر کردن روی آن ها می دهد، ولی دقت داشته باشید که با صفحات مرسوم اقلیدسی تفاوت هایی دارند. **صفحه فانو**[۱] صفحه ای کوچک شامل ۷ نقطه و ۷ خط است (شکل ۱). ۶ خط راست هستند و دیگری به صورت یک دور است. به نظر می رسد خط دایره ای بعضی خطوط را در دو نقطه قطع می کند ولی این طور نیست؛ صفحه فانو با صفحه اقلیدسی فرق دارد و نقاط تقاطع، تنها نقاط نشان دار اند.



شکل ۱: صفحه فانو

صفحه فانو ویژگی های زیر را دارد:

الف. بین هر دو نقطه یک خط منحصر به فرد وجود دارد.

ب. هر دو خط دقیقا در یک نقطه هم دیگر را قطع می کنند.

پ. روی هر خط دست کم سه نقطه قرار دارد.

از برقرار بودن این سه خاصیت در هر صفحه دل خواه، می توان بر قرار بودن ویژگی های زیر را در ان صفحه نتیجه گرفت.

ت. روی همه خطوط تعداد نقاط یکسانی وجود دارد.

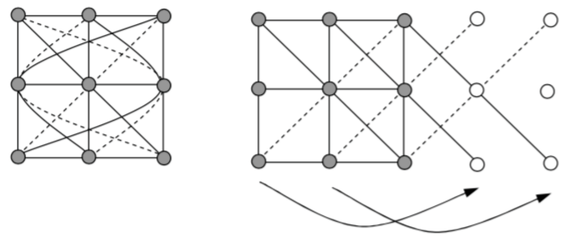
ث. از همه نقطه ها تعداد یکسانی خط می گذرد.

ج. نقاط و خطوط همانند هم اند (دوگان اند). یعنی هر ویژگی که برای نقطه ها برقرار باشد برای خطوط هم برقرار است و برعکس. به عبارت دیگر می توان از روی یک صفحه فانو یک صفحه فانوی دیگر ساخت که نقاط صفحه اول متناظر با خطوط صفحه دوم و خطوط صفحه اول متناظر با نقاط صفحه دوم باشند.

اثبات موارد بالا دشوار نیست و به خواننده واگذار می شود. سوالی که ممکن است ایجاد شود این است که آیا تنها یک صفحه وجود دارد که شروط الف، ب و پ برای آن برقرارند؟ پاسخ خیر است. صفحه بزرگتر دیگری به نام **تیک تاک تو**[۲] وجود دارد که ویژگی الف را دارد ولی خطوطی موازی نیز در آن وجود دارند (شکل ۲). شرط زیر برای صفحه تیک تاک تو صادق است.

[۱] Fano Plane
[۲] Tic Tac Toe Plane

چ. برای هر خط و یک نقطه بیرون آن یک و فقط یک خط وجود دارد که از آن نقطه می گذرد و با خط مفروض موازی است.



شکل ۲: صفحه تیک تاک تو

ثابت شده است ویژگی چ برای صفحاتی که خاصیت های الف تا پ را دارد، نمی تواند برقرار باشد. برای این که ویژگی های ب و پ نیز برای صفحه تیک تاک تو صادق باشد کافی است، ۴ نقطه به صفحه اصافه کنیم. در صفحه جدبد که می خواهیم بسازیم، هر خط به یکی از نقاط جدید منتهی می شود. خط های هر کدام از دسته خط های موازی همگی به یک نقطه منتهی شوند و خطوط ناموازی به نقاط مختلف می رسند. یک خط جدید هم اضافه می کنیم که از ۴ نقطه اضافه شده می گذرد. به نقاط جدید، «نقاط در بی نهایت» و خط جدید، «خط در بی نهایت» می گوییم (شکل ۳). اکنون ویژگی های ب و پ برای صفحه جدید برقرارند، پس حداقل یک صفحه بزرگتر از صفحه فانو یافتیم که شروط الف، ب و پ در آن برقراراند.

مسائل

۱. به سه نقطه که روی یک خط نباشند، دایره می گوییم. یک خط در صورتی مماس یا یک دایره است که فقط در یک نقطه با هم اشتراک داشته باشند. نشان دهید هر نقطه از یک دایره دقیقا با یک خط مماس است.

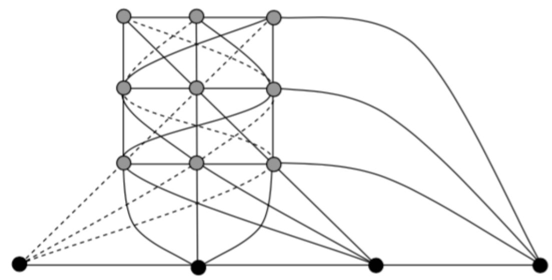
۲. به ۴ نقطه ای از صفحه فانو که هیچ ۳ تایی از آن ها روی یک خط نباشند، ابر دایره می گوییم. ثابت کنید هر ۳ نقطه ای که رو یک ابر دایره نباشند تشکیل یک خط می دهند و برعکس.

۳. ثابت کنید ویژگی های الف تا پ برای صفحه تیک تاک تو گسترش یافته برقرار است.

۴. با رویه ای بر عکس گسترش تیک تاک تو با خط و نقطه در بی نهایت، می توان صفحه فانو را کاهش داد، به این صورت که یکی از خطوط صفحه فانو را در بی نهایت در نظر گرفت و آن خط و نقاط رویش را از صفحه حذف کرد (روی بازگشت پذیر بودن گسترش و الگوریتم برای آن فکر کنید). آیا شرط چ برای ۴ نقطه و ۶ خط باقی مانده صادق است؟

۲ صفحات متناهی آفین و تصویری

می خواهیم صفحات قبل را به زبان ریاضی معرفی کنیم. اگر اعضای یک مجموعه متناهی را نقطه بنامیم، بعضی از زیرمجموعه هایش را خط بنامیم و ویژگی های الف، ب و پ برای نقطه ها وخط ها درست باشند؛ به مجموعه نقطه ها و خط ها **صفحه**



شکل ۳: گسترش تیک تاک تو با یک خط و چهار نقطه در بی نهایت

تصویر متناهی[۳] می گوییم. صفحه فانو[۴] یک صفحه تصویری متناهی [۵]است.

می دانیم روی هر خط در صفحه تصویری متناهی تعداد ثابتی نقطه وجود دارد. این تعداد را $n + ۱$ در نظر می گیریم و n را مرتبه صفحه می نامیم (بعدتر مشخص می شود که چرا $n + ۱$ ؟). برای مثال مرتبه ی صفحه فانو ۲ و مرتبه ی صفحه تیک تاک تو گسترش یافته ۳ است.

قضیه ۱ *هر صفحه تصویری از مرتبه n شامل $n^۲ + n + ۱$ نقطه و $n^۲ + n + ۱$ خط است.*

صفحاتی را که شرط های الف و چ برای آن ها صادق اند، صفحات آفین نامیده می شوند. از چ نتیجه می گیریم همه ی خطوطی که با خط L موازی اند با یک دیگر موازی اند (اگر دو تا از خطوط موازی با L با یک دیگر موازی نباشند، حداقل در یک نقطه تقاطع دارند. حال برای L و نقطه تفاطع دو خط موازی بیش از یک خط می گذرد که با L موازی است، که با فرض برقرار بودن چ در تناقض است). مجموعه خطوط موازی با L یک دسته خط موازی را تشکیل می دهند.

صفحه آفین در برابر صفحه تصویری ساختی که برای گسترش تیک تاک تو به صفحه تصویری استفاده شد را می توان به حالت عمومی تعمیم داد. برای هر خط از یک دسته خط موازی یک نقطه در بی نهایت ایجاد می کردیم و خط های هر دسته خط موازی را جداگانه به یکی اط نقاط وصل می کردیم، یک خط در بی نهایت هم می کشیدیم که از همه ی نقاط در بی نهایت می گذشت. شرط الف باز هم برقرار است، یعنی از هر دو نقطه یک خط می گذرد (چرا؟). علاوه بر این شرط ب و پ نیز برقرار می باشند که بررسی آن ها به عهده خواننده واگذار می شود.

روش بیان شده در تمرین ۴ بخش قبل را نیز می توان تعمیم داد. می توانیم یکی از خط های یک صفحه تصویری دل خواه و نقطه های رویش را در بی نهایت بنامیم. خط ها و نقطه های باقی مانده یک **صفحه آفین متناهی**[۶] تشکیل می دهند. در نتیجه صفحات آفین با صفحات تصویری اساسا یک نوع ساختار اند. برای جمع بندی، قضیه ۲ را داریم:

قضیه ۲ *هر صفحه آفین متناهی را می توان با افزودن نقاط جدید و یک خط به یک صفحه تصویری گسترش داد. و بر عکس با حذف یک خط و نقاط رویی آن از یک صفحه تصویری یک صفحه آفین به دست می آید.*

---

[۳] Finite Projective Plane

[۴] به نام ریاضی دان ایتالیایی، گینو فانو

[۵] کوچکترین صفحه تصویری متناهی است که ۷ نقطه دارد.

[۶] Finite Affine Plane

$n + ۱$ نقطه روی خط های یک صفحه تصویری از مرتبه n وجود دارد. در صفحه آفین متناظر با آن n نقطه وجود دارد (به تعداد نقاط روی هر خط صفحه ی آفین مرتبه ی آن می گوییم). دیدیم که صفحه تصویری $n^۲ + n + ۱$ نقطه و صفحه آفین متناظر با آن $n^۲$ نقطه دارد.

از چه مرتبه هایی صفحه وجود دارد؟ تا به حال در مورد دو صفحه متناهی تصویری بحث کرده ایم. آیا صفحه ی دیگری وجود دارد؟ به کمک هندسه مختصاتی می توان جواب این سوال را داد. می توان با استفاده از مختصات نشان داد که برای هر عدد اول یک صفحه آفین وجود دارد. به روشی مشابه اما با کمی جبر بیشتر می توان برای هر توانی از یک عدد اول، یک صفحه تصویری ساخت.

قضیه ۳ *برای هر p^α که p اول است، یک صفحه تصویری از مرتبه p^α وجود دارد.*

۶ کوچکترین عددی است که توانی از یک عدد اول نیست، و گستون تری[۷] در سال ۱۹۰۱ ثابت کرد که هیچ صفحه تصویری از مرتبه ۶ وجود ندارد. عدد بعدی ۱۰ است؛ عدم وجود صفحه تصویری از مرتبه ۱۰ را لام، تیل و سوارز[۸] با روشی متکی بر کامپیوتر در سال ۱۹۸۸ اثبات کردند. تا به حال کسی یک صفحه متناهی از مرتبه ای که توان عدد اول نباشد پیدا نکرده است؛ البته همچنان سوال وجود یا عدم وجود آن هنوز حل نشده است.

مسائل

۱. فرض کنید می خواهیم با یک الگوریتم ساده تمامی حالات ممکن برای صفحه تصویری از مرتبه ۱۰ را با کامپیوتر چک کنیم. چند مورد باید چک شوند؟ برای یک کامپیوتر معمولی چقدر طول می کشد تا همه ی حالات را چک کند؟

۳ طراحی بلوکی

در این بخش با ساختاری کلی تر از صفحه تصویری آشنا می شویم. ساختاری را در در نظر بگیرید که شامل تعدادی زیرمجموعه k عضوی (که بلوک نامیده می شوند) از مجموعه ی v عضوی به نام V است، به شرطی که هر عضو دقیقا در r بلوک آمده باشد، و هر دو عضوی دقیقا در λ بلوک با هم آمده باشند. تعداد بلوک ها را b در نظر می گیریم.

با چند مثال برای **طراحی بلوکی**[۹] ادامه می دهیم. یک مثال می تواند صفحه فانو باشد. در صفحه فانو داریم:

$$(k = ۳, r = ۳, \lambda = ۱, v = ۷, b = ۷)$$

صفحه تیک تاک تو مثال دیگری برای طراحی بلوکی است. داریم:

$$(k = ۳, r = ۴, \lambda = ۱, v = ۹, b = ۱۲)$$

می توان به طراحی بلوکی های بدیهی هم اشاره کرد. برای $k = ۲$ تنها یک طراحی بلوکی با v عضو وجود دارد که بلوک ها شامل همه ی زوج ها می باشند. ساخت مشابه برای هر $k \geq ۲$ وجود دارد، می توانیم همه زیر مجموعه های k عضوی را برای یک طراحی بلوکی با مشخصات $(r = C(v - ۱, k - ۱), \lambda = C(v - ۲, k - ۲), b = C(v, k))$ در نظر بگیریم. مفتضح ترین مثال ممکن یک تک بلوک با پارامترهای $(k = v, b = r = \lambda = ۱)$ است. به علت بیش از حد مبتذل بودن این مثال، آن را طراحی بلوکی به حساب نمی آوریم.

[۷] Gaston Tarry
[۸] Lam, Thiel and Swiercz
[۹] Block Design

روابط بین مشخصه های طراحی بلوکی با توجه به ساختار طراحی بلوکی به نظر می آید، پارامترهای هر طراحی بلوکی از یک دیگر مستقل نیستند. یکی از رابطه هایی که چندان دور از ذهن نیست و با یک دوگونه شماری شاده به دست می آید رابطه ۱ است. تعداد عضویت ها را به دوطریق می شماریم: b بلوک k عضوی وجود دارد؛ هر یک از v عضو اصلی، عضو r زیرمجموعه اند.

$$bk = rv \tag{۱}$$

اگر تعداد بارهایی که را یک عضو دل خواه با هر یک از اعضای دیگر مشترکا در یک زیر مجموعه باشند به دو طریق حساب کنیم، به رابطه ۲ می رسیم. عضو s با $v-۱$ عضو دیگر در λ زیرمجموعه با هم عضو اند؛ عضو s عضو r زیرمجموعه ی k عضوی است.

$$\lambda(v-۱) = r(k-۱) \tag{۲}$$

از دو رابطه بالا نتیجه می شود حداکثر سه تا از پارامترها آزاد اند و دوتای دیگر از روی آن سه تا معلوم می شوند. رابطه دیگری که بین مشخصه ها برقرار است رابطه ۳ است. اثبات این رابطه خارج از این نوشته است.

$$b \geq v \tag{۳}$$

متاسفانه می توان پنج عدد برای پارامتر های یافت که سه شرط بالا را ارضا کنند ولی هیچ طراحی بلوکی ای با چنین مشخضه هایی وجود نداشته باشد. سه رابطه بالا صرفا سه شرط لازم هشتند که به آسانی چک می شوند (برای رد وجود طراحی بلوکی).

مسائل

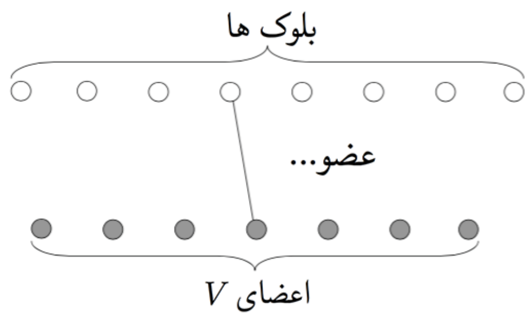
۱. ثابت کنید این فرض که همه ی اعضا عضو تعداد ثابتی زیرمجموعه اند زاید است و از بقیه مفروضات نتیجه می شود.

۲. برای هر $v > ۱$ طراحی بلوکی ای بسازید که $b = v$.

منحصرسازی آیا می توان هر عضو مجموعه اصلی را به یکی از بلوک ها نسبت داد، به شرطی که هیچ دو نفری به یک بلوک نسبت داده نشده باشند؟ اولین شرط لازمی که به ذهن می رسد این است که $b \geq v$. از رابطه ۳ بخش قبل می دانیم این شرط در همه بلوک ها برقرار است. گرافی دوبخشی می سازیم که راس های یک بخش آن نشان دهنده اعضای اصلی و بخش دیگر نشان دهنده ی بلوک ها باشد (شکل۴). مساله معادل با یافتن یک جورسازی از راس ها ی بخش پایین به بالا است. بین یک راس پایین و یک راس بخش بالا یال رسم می کنیم، اگر و فقط اگر عضو متناظر با آن عضو آن متناظر با بلوک راس بالا باشد.

ادعا می کنیم اندازه ی مجموعه ی همسایه های هر زیرمجموعه دلخواه از بخش پایین از اندازه آن زیرمجموعه بیشتر است (شرط هال). اگر n راس دلخواه از بخش پایین انتخاب کنیم، مجموعا nr یال دارند که به m راس از بخش بالا که آن ها هم مجموعا mk یال دارند. به رابطه بدیهی زیر می رسیم:

$$nr \leq mk \tag{۴}$$



شکل ۴: نمایش عضویت در بلوک ها با گراف

از طرف دیگر $bk = rv$ و $b \geq v$ پس $k \leq r$:

$$mk \leq mr \tag{۵}$$

از (۴) و (۵) داریم:

$$nr \leq mr \tag{۶}$$

در نتیجه ادعای $n \leq m$ ثابت شد. پس هر زیر مجموعه از بخش پایین به زیر مجموعه ای با تعداد بیشتری عضو از بخش بالا وصل است. بابرقرار بودن شرط هال می دانیم حداقل یک جور سازی از راس های بخش پایین به بالا وجود دارد.

حسین نادری
دانشجوی علوم کامپیوتر شریف
hnaderi268@gmail.com
hnaderi268.blog.ir