

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دفتر تمرین



سال دوم آموزش متوسطه
نظری (رشته‌های علوم تجربی - ریاضی و فیزیک) -
فنی و حرفه‌ای

کاری از : فرامرز سپهری

www.Karamath.ir

فصل اول

الگو و دنباله



صفحه 5

۱- ابتدا سه جمله ی بعدی هر یک از دنباله های زیر را پیدا کنید، سپس جمله ی n ام آن را بنویسید.

الف) $2, 7, 12, 17, \dots$

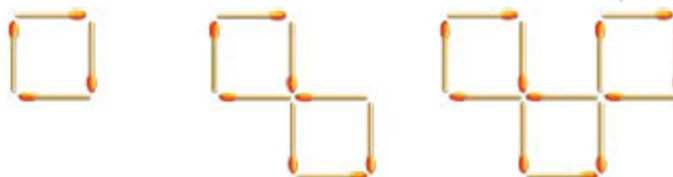
ب) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, \dots$

۲- با استفاده از چوب کبریت سه شکل زیر ساخته شده است. تعداد چوب کبریت های به کار رفته در شکل n ام چند تا است؟

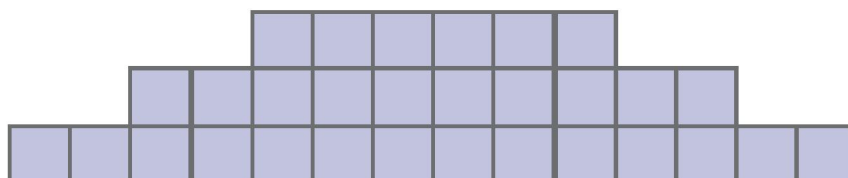


صفحه 5

۱- با استفاده از چوب کبریت ها سه شکل زیر ساخته شده است. تعداد چوب کبریت های به کار رفته در شکل n ام چند تا است؟



۲- شکل زیر سه ردیف از تعداد صندلی‌های یک سالن تئاتر را نشان می‌دهد. اگر تعداد صندلی‌های ردیف‌های بعدی از الگوی افزایش صندلی‌های این سه ردیف پیروی کنند تعداد صندلی‌ها را تا ردیف هفتم به دست آورید:



۳- اگر جمله n ام دنباله $a_n = 3n$ باشد، با تشکیل جدول چهار جمله اول آن را بنویسید.

۴- اگر یک مستطیل کاغذی را در هر مرحله با تا زدن نصف کنیم، تعداد مستطیل‌های به دست آمده در هر مرحله را در یک دنباله بنویسید. جمله عمومی این دنباله را بنویسید.

۵- چهار جمله اول هر یک از دنباله‌های زیر که جمله عمومی آن داده شده است را بنویسید.

الف) $a_n = \frac{2n}{n+1}$

ب) $a_n = 3n^2 - \frac{1}{n}$

ج) $a_n = 2^n - n^2$

۶- در زیر چهار دنباله و چهار جمله‌ی عمومی دنباله آمده است. معین کنید که هر جمله‌ی عمومی مربوط به کدام دنباله است :

$\frac{2n}{n+1}$	$3, 5, 7, \dots$
$(-3)^n$	$1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \dots$
$n^2 + 5n$	$1, -3, 9, \dots$
$2n+1$	$6, 14, 24, \dots$

۷- رضا اول هر هفته ۱۶۰۰ تومان پول توجیبی می‌گیرد و در یک صندوق می‌گذارد. رضا تا آخر هر هفته نیمی از پول صندوق را خرج می‌کند. اگر در اولین هفته، پولی در صندوق نبوده باشد، رضا در پایان هفته‌ی اول چه قدر پول در صندوق دارد؟ در پایان هفته‌ی دوم چه قدر پول در صندوق دارد؟ در پایان هفته‌ی سوم چه قدر پول در صندوق دارد؟ پول‌های رضا در پایان هر هفته را به صورت یک دنباله در نظر بگیرید و چهار جمله‌ی اول این دنباله را بنویسید. بین جمله‌ی n ام و جمله‌ی $n+1$ ام این دنباله چه رابطه‌ای وجود دارد؟

صفحه 9



شیر آبی در هر دقیقه $\frac{3}{5}$ لیتر آب وارد یک حوض می‌کند. اگر این حوض از ابتدا ۲۵ لیتر آب داشته باشد، مقدار آب حوض را پس از گذشت یک، دو، سه، چهار و پنج دقیقه در یک دنباله بنویسید. آیا این یک دنباله‌ی حسابی است؟ چرا؟ پس از گذشت چند دقیقه آب این حوض ۱۰۲ لیتر می‌شود؟



صفحه 9

۱- ابتدا بررسی کنید که آیا هر یک از دنباله‌های زیر حسابی هستند یا خیر و به چه دلیل؟ سپس الگوی ساختن دنباله را پیدا کنید.

الف) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

ب) $-24, -21, -18, -15, \dots$

ج) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

د) $0, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots$

۲- اگر دو جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب 0 و 3 باشند، سه جمله‌ی بعدی این دنباله را بنویسید.

۳- نشان دهید برای آن که یک دنباله‌ی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ دنباله‌ی حسابی باشد، باید $a_n - a_{n-1}$ عدد ثابتی باشد. این مقدار ثابت چه عددی را نشان می‌دهد؟

۴- اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا $n - \frac{1}{n}$ قانون دنباله‌ی $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ می‌باشد؟ دلیل خود را بیان کنید.

۵- اگر در جملات یک دنباله‌ی حسابی اول عدد $\frac{1}{3}$ و بعد $\frac{1}{4}$ قرار گرفته باشند، جمله‌ی قبل از $\frac{1}{3}$ را بنویسید.

۶- اگر x و y و z به ترتیب جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند نشان دهید:

$$y = \frac{1}{2}(x + z)$$

۷- اگر جمله‌ی پنجم یک دنباله‌ی حسابی ۱۷ و جمله‌ی دوازدهم آن ۵۲ باشد، جمله‌ی عمومی این دنباله را به دست آورید.

۸- دنباله‌ی زیر به ازای چه مقداری از x ، یک دنباله‌ی حسابی خواهد بود:

$$1 - x, 2 + x, 1 + 2x$$

۹- نشان دهید که اگر جملات یک دنباله‌ی حسابی را در عددی ضرب کنیم دنباله‌ی جدید نیز یک دنباله‌ی حسابی است.

۱۰- اگر زاویه‌های مثلثی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و یک دنباله‌ی حسابی تشکیل شود، نشان دهید که یکی از زاویه‌های این مثلث 60° درجه است.

۱۱- مثلث قائم الزاویه‌ای ارائه کنید که طول ضلع کوچک آن ۱ باشد و اگر طول اضلاع آن را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند. اگر طول ضلع کوچک این مثلث a باشد، طول بقیه‌ی اضلاع را بر حسب a حساب کنید.

صفحه 11



۱- وقتی می‌گویند در یک کشور نرخ رشد سالیانه‌ی جمعیت ۳ درصد است، منظور آن است که جمعیت آن کشور در هر سال به میزان ۳ درصد جمعیت سال قبل، افزایش می‌یابد. فرض کنید یک کشور ۵۰ میلیون نفر جمعیت دارد و نرخ رشد سالیانه‌ی جمعیت آن ۳ درصد است.

الف) جمعیت سال دوم چند برابر جمعیت سال اول است؟ جمعیت سال سوم چند برابر جمعیت سال دوم است؟

ب) جمعیت این کشور را در سال‌های اول تا پنجم بنویسید. (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

ج) آیا این دنباله یک دنباله‌ی حسابی است؟ آیا این دنباله یک دنباله‌ی هندسی است؟

د) جمعیت این کشور پس از گذشت n سال چه قدر خواهد بود؟

۲- کدام یک از دنباله‌های زیر دنباله‌های هندسی هستند؟ دلیل خود را ارائه کنید.

الف) $5, 5, 5, 5, 5, \dots$

ب) $-1, 2, -4, 8, -16, \dots$

ج) $2, 4, 6, 8, \dots$

د) $1-\pi, 1-\pi^2, (1-\pi^2)(1+\pi), \dots$

مسائل

صفحه

۱- اگر یکی از جملات یک دنباله‌ی هندسی ۵ و جمله‌ی بعدی آن -1 باشد، سه جمله‌ی بعدی این دنباله را بنویسید.

۲- اگر یکی از جملات یک دنباله‌ی هندسی ۳ و جمله‌ی بعدی ۴ باشد، جمله‌ی قبل از ۳ را بنویسید.

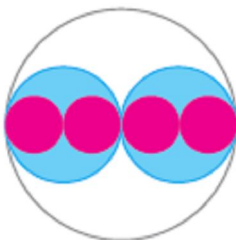
۳- اگر دو جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی اول عدد ناصفر a و بعد عدد ناصفر b باشد، جمله‌ی بعد از b چه خواهد بود؟

۴- اگر x و y و z به ترتیب جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند نشان دهید: $y^z = xz$.

۵- اگر جمله چهارم یک دنباله هندسی ۱ و جمله هفتم آن ۸ باشد جمله عمومی این دنباله را بنویسید.

۶- در دنباله زیر عدد x را طوری تعیین کنید تا این دنباله یک دنباله هندسی شود. مسئله چند جواب دارد؟
 $1-x, x, 1+x$

۷- اگر مساحت یک دایره برابر S_1 و داخل آن دو دایره به شکل زیر رسم کنیم و مجموع مساحت آن‌ها را S_2 بنامیم، با تکرار این عملیات دنباله $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ ساخته می‌شود. جمله عمومی این دنباله را به دست آورید و نشان دهید این یک دنباله هندسی است.



۸- اگر جملات یک دنباله‌ی هندسی را در عددی ضرب کنیم نشان دهید دنباله‌ی حاصل نیز یک دنباله‌ی هندسی است.

۹- اگر جملات یک دنباله‌ی هندسی را به توان ۲ برسانیم نشان دهید دنباله‌ی حاصل نیز یک دنباله‌ی هندسی است.

۱۰- آیا یک دنباله می‌تواند هم یک دنباله‌ی هندسی باشد و هم یک دنباله‌ی عددی؟

۱۱- اگر $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ یک دنباله‌ی هندسی باشد و $a_1 a_3 = 4$ و $a_3 a_5 = 16$ جمله‌ی اول و قدر نسبت این دنباله‌ی هندسی را بیابید.



با تقسیم ۱ بر ۹ خارج قسمت‌های به‌دست آمده در هر مرحله را در یک دنباله بنویسید. این دنباله به چه عددی نزدیک می‌شود؟ دلیل خود را ارائه دهید.



صفحه

۱- در مورد هر یک از دنباله‌های زیر حدس بزنید جملات این دنباله‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند و با تشکیل دنباله‌ی تفاضل حدس خود را بیازمایید.

الف) $0/9, 0/99, 0/999, \dots$

ب) $2/9, 2/99, 2/999, \dots$

ج) $5/05, 5/005, 5/0005, \dots$

د) $1/19, 1/199, 1/1999, \dots$

۲- با تقسیم ۵ بر ۱۱، خارج قسمت‌های به‌دست آمده در هر مرحله را به صورت یک دنباله بنویسید این دنباله به چه عددی نزدیک می‌شود؟ دلیل خود را ارائه دهید.

۳- در چه حالتی جملات یک دنباله‌ی حسابی به عدد خاصی نزدیک خواهند شد؟

۴- اگر قدر نسبت یک دنباله‌ی هندسی عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد و جمله‌ی اول آن صفر نباشد، توضیح دهید که چرا جملات این دنباله به عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند؟

۵- اگر قدر نسبت یک دنباله‌ی هندسی برابر ۱ باشد جملات این دنباله به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

۶- اگر x عددی باشد که در نامعادلات زیر صدق می‌کند، چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی تقریبات اعشاری آن را بنویسید.

$$2x+1 < 8/1316, \quad 4-x < 0/4343$$

۷- دو جمله‌ی اول تقریبات اعشاری $\sqrt{2}$ را با استفاده از روش فعالیت این بخش بنویسید.



صفحه 20

۱- هر یک از اعداد $2^{\frac{1}{2}}$ و $2^{\frac{2}{4}}$ و $2^{\frac{3}{6}}$ را با استفاده از تعریف توان رسانی به توان اعداد گویا حساب کنید و پس از ساده کردن نتیجه بگیرید که همگی آن‌ها با هم برابرند.

۲- اگر p یک عدد صحیح و n یک عدد طبیعی باشد برای یک عدد طبیعی k داریم $\frac{p}{n} = \frac{kp}{kn}$ با استفاده از تعریف توان رسانی با توان اعداد گویا با محاسبه‌ی هر یک از توان رسانی‌های داده شده پس از ساده کردن نتیجه بگیرید: $a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{kp}{kn}}$ ($a > 0$)



صفحه

۱- برای هر عدد گویای r نشان دهید: $1^r = 1$.

۲- برای هر عدد گویای r و عدد حقیقی مثبت a نشان دهید: $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$.



صفحه

۱- مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$

ب) $(\sqrt{3}-\sqrt{3})\sqrt{12}$

ج) $(\sqrt{15}^{(2-\sqrt{2})})(2+\sqrt{2})$

د) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1}(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}$

 ۲- مقدار مثبت x را به گونه‌ای تعیین کنید که $x^{\sqrt{2}}$ برابر ۲ شود.

 (راهنمایی: در معادله‌ی $x^{\sqrt{2}} = 2$ طرفین را به توان $\sqrt{2}$ برسانید.)

 ۳- نشان دهید: $\sqrt{a^b} = (\sqrt{a})^b$. $(a > 0)$

۴- برای اعداد حقیقی مثبت a و c و اعداد حقیقی b و d نشان دهید :

$$\left(\frac{a}{c}\right)^b = \frac{a^b}{c^b}, \quad \frac{a^b}{a^d} = a^{b-d}, \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

۵- با استفاده از خواص اساسی توان رسانی، برای هر عدد حقیقی مثبت a و عدد حقیقی دلخواه b نشان دهید : $a^b = (a^{\frac{1}{b}})^b$ و نتیجه بگیرید : a^b همواره عددی مثبت است.

فصل دوم

تابع



صفحه

شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز و تبریز در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر جمعیت آن شهرها را به طور تقریبی بنویسید.

شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز
جمعیت (میلیون نفر)					

الف) با استفاده از محورهای مختصات نموداری برای رابطه‌ی داده شده در جدول رسم کنید. همچنین این رابطه را با نمودار ون نمایش دهید.

ب) آیا امکان دارد که یک شهر دو جمعیت مختلف داشته باشد؟! آیا به طور کلی این امکان وجود دارد که دو یا چند شهر جمعیتی یکسان داشته باشند؟

اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار یک تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها نمودار را حداکثر

اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این مجموعه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی^۱ در آن



صفحه 31

۱- در هر یک از موارد زیر رابطه‌ای بین دو پدیده ذکر شده است. توضیح دهید که چگونه این رابطه‌ها را می‌توان به کمک یک تابع توصیف کرد؟

رابطه‌ی بین افراد و قد آنها

رابطه‌ی بین افراد و وزن آنها

رابطه‌ی بین افراد و سن آنها

رابطه‌ی بین دانش آموزان یک کلاس و نمره‌ی ریاضی پایان ترم آنها

رابطه‌ی بین سال‌های مختلف و میزان بودجه‌ی اختصاص یافته به آن سال‌ها در یک کشور

رابطه‌ی بین افراد و دمای بدن آنها در یک زمان خاص

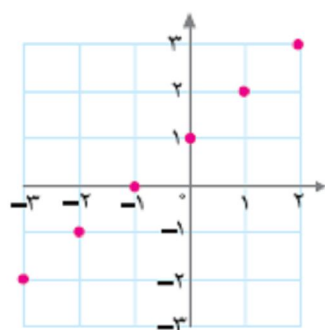
رابطه‌ی بین مستطیل‌ها و محیط آنها

آیا می‌توانید رابطه‌های دیگری را مثال بزنید که تابع باشند؟

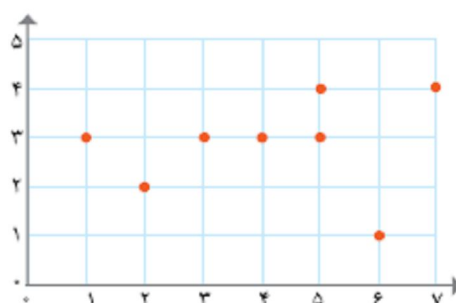
چند رابطه مثال بزنید که تابع نباشند.

کدام یک از رابطه‌هایی که به صورت‌های متفاوت در مسائل ۲، ۳، ۴ و ۵ نمایش داده شده‌اند، یک تابع هستند؟

۲- نمودار



(الف)



(ب)



(ج)



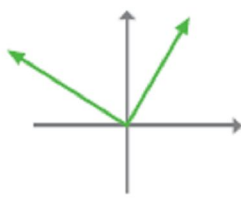
(د)



(هـ)



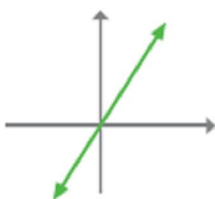
(و)



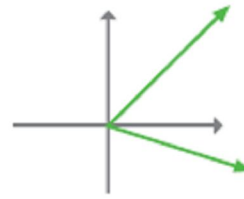
(ز)



(ح)



(ط)



(ی)

۳- جدول

x	۲	۹	۰	۵	-۱
y	۱	۰	۲	۴	۴

(الف)

x	۱	۲	۳	۴	۵	...
y	۶	۷	۸	۹	۱۰	...

(ب)

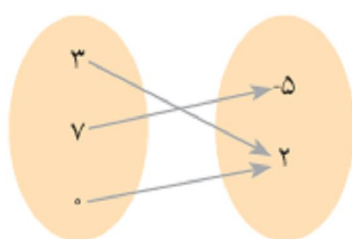
x	$\frac{1}{3}$	-۲	۵	-۲	۷	۱۰
y	$\frac{1}{3}$	۱	۵	۴	۵	$\sqrt{2}$

(ج)

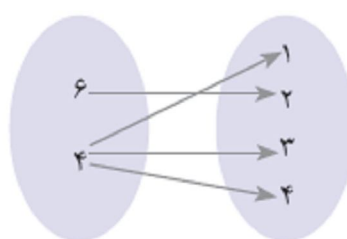
x	۲	۸	۷	۴	۸
y	۲	۷	۷	۹	۴

(د)

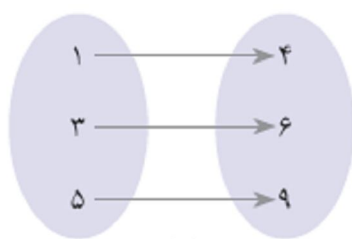
۴- نمودار ون



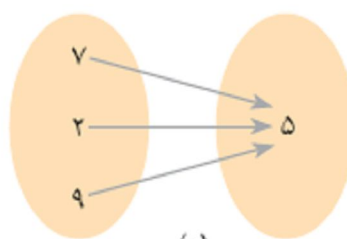
(الف)



(ب)



(ج)



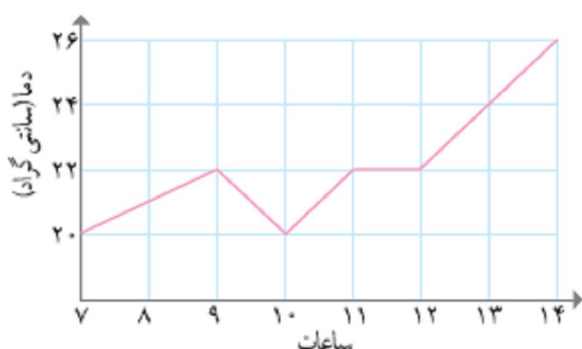
(د)

۵- زوج‌های مرتب

الف $\{(۲, ۱), (۳, -۵), (۳, ۷)\}$ ج $\{(۱, ۱), (۲, ۲), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (-۴, -۴)\}$ هـ $\{(۲, ۳), (۰, -۶), (۰, ۳), (\sqrt{7}, ۱)\}$ ب $\{(۰, ۱), (\frac{3}{5}, ۱), (-۵, ۱), (۸, ۱)\}$ د $\{(۵, ۲)\}$ و $\{(۲, ۳), (۳, ۲), (۱, ۱)\}$

۶- اگر بدانیم رابطه‌ی زیر یک تابع است، مقادیر a و b را به دست آورید و نمودار تابع را رسم کنید.

$$\{(a-1, 2), (5, a-2), (a-2, b+3), (3, 5), (5, 3)\}$$



۷- نمودار مقابل تغییرات در دمای یک شهر از ساعت ۷ صبح تا ۱۴ بعد از ظهر را نشان می‌دهد.

آیا این نمودار یک تابع را نشان می‌دهد؟ بیش‌ترین و کم‌ترین دمای ثبت شده چه قدر هستند؟

در کدام ساعات دما ثابت مانده است؟

چگونه به کمک نمودار می‌توان همه‌ی زمان‌هایی را مشخص کرد که دمای هوا در آن زمان‌ها یک مقدار معین است؟

۸- کدام یک از نمودارهای زیر، نمایشگر ارتفاع هواپیمایی است که از یک فرودگاه بلند می‌شود، مدتی در آسمان پرواز می‌کند و سپس فرود می‌آید؟



نمودارهای دیگر چه چیزهایی را می‌توانند نشان دهند؟ آیا هر سه نمودار تابع هستند؟



صفحه

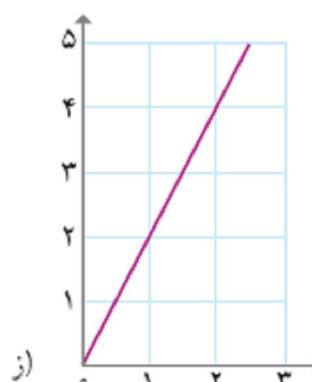
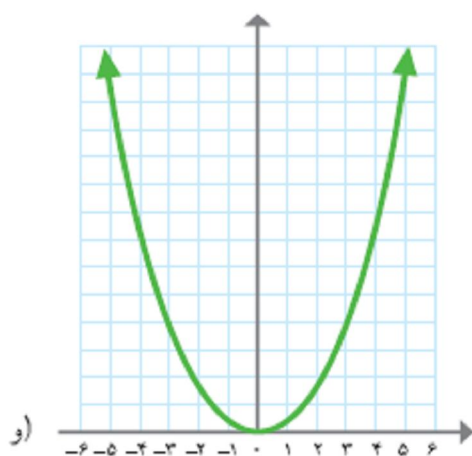
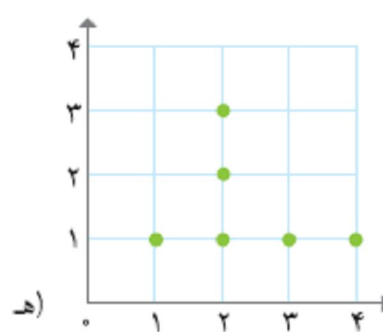
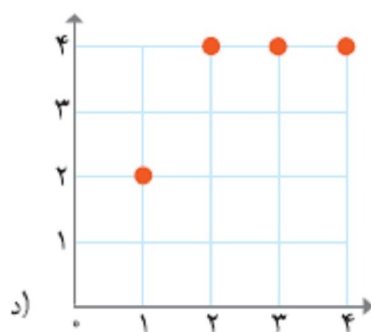
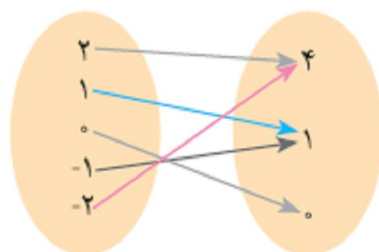
۱- دامنه و برد رابطه‌های زیر را که به شکل‌های مختلفی ارائه شده‌اند به دست آورید. در هر مورد تابع بودن رابطه‌ی داده شده را نیز بررسی کنید.

الف) $\{(2, 3), (-3, 5), (2, 7)\}$

ب)

متوازی الاضلاع	مستطیل	مربع	مثلث	چند ضلعی
۳۶۰	۳۶۰	۳۶۰	۱۸۰	مجموع زوایای داخلی (درجه)

ج)



۲- تابعی مثال بزنید که :

- الف) دامنه‌ی آن تنها شامل دو عضو باشد.
 ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.
 ج) دامنه‌ی آن تنها یک عضو داشته باشد.
 د) دامنه‌ی آن نامتناهی باشد ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.
 هـ) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.



صفحه 39

۱- یک شمع 20 سانتی‌متر ارتفاع دارد و در هر ساعت 4 سانتی‌متر می‌سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در طی ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)						

نمودار این تابع را رسم کنید.
 چرا این تابع، یک تابع خطی است؟

۲- آیا خط $x = 2$ را می‌توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ در مورد خط $y = 5$ چه‌طور؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می‌توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟

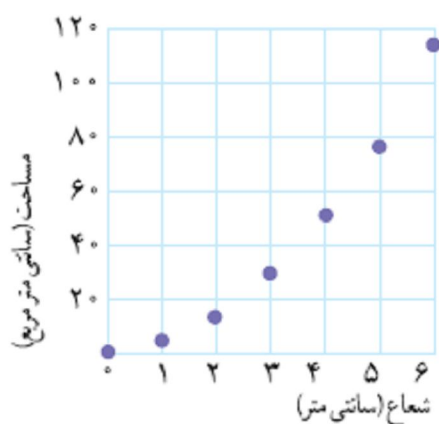
۳- معادله‌ای برای هر یک از توابع خطی داده شده با جدول‌های زیر بنویسید.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۱	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶

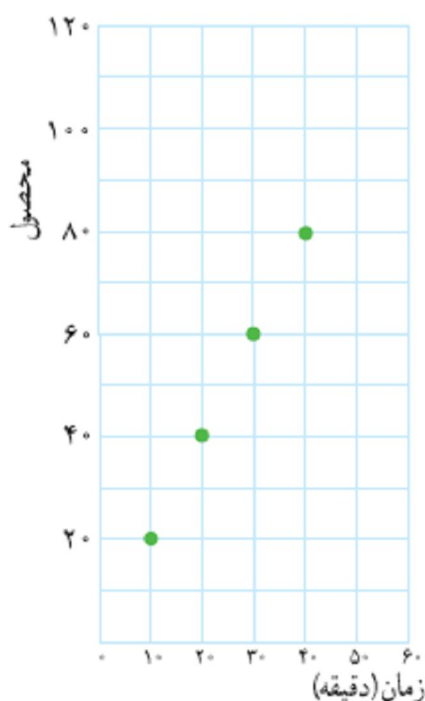
x	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲
y	۶	۴	۲	۰	-۲	-۴



صفحه 40



- ۱- نمودار مقابل رابطه‌ی بین شعاع و مساحت دایره را نشان می‌دهد.
درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های داده شده درمورد این نمودار را بررسی کنید.
- الف) رابطه‌ی داده شده یک تابع است.
- ب) رابطه‌ی داده شده یک تابع خطی است.
- ج) با افزایش شعاع مساحت نیز افزایش پیدا می‌کند.



۲- نمودار مقابل تعداد تولید یک نوع اسباب بازی را در یک کارخانه در پایان فاصله‌های زمانی ۱۰ دقیقه نشان می‌دهد. پیش‌بینی شما برای تعداد اسباب‌بازی‌های تولید شده پس از یک ساعت چیست؟

الف) پس از پایان ۲۵ دقیقه مناسب‌ترین پیش‌بینی برای تعداد محصول چیست؟

ب) زمان‌های دیگری را مثال بزنید و تعداد محصول تولیدشده در پایان آن زمان را حدس بزنید.

ج) نمودار داده شده با نمودار چه خطی قابل مقایسه است؟ آیا می‌توانید رابطه‌ای ریاضی برای تعداد محصول تولیدی در هر دقیقه به دست آورید؟

د) توضیح دهید که چرا این نمودار تابعی را مشخص می‌کند.

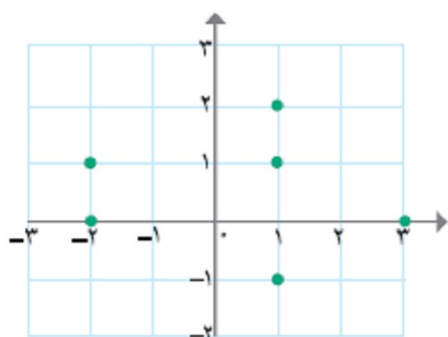
۳- سودی که از تولید یک کالا توسط یک شرکت حاصل می‌شود از معادله ی : $y = -300 + 6x$ به دست می‌آید. در این معادله، x تعداد کالای تولیدی و y سود حاصل بر حسب تومان است. الف) نمودار این خط را رسم کنید. ب) سود این شرکت را وقتی که تعداد کالاهای تولید شده برابر ۱۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰ است به دست آورید.

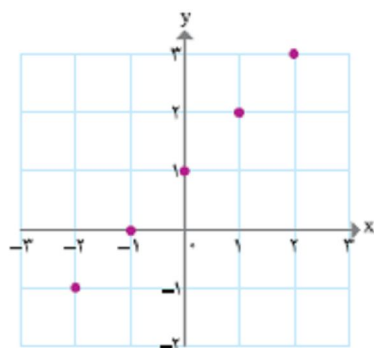
ج) محل برخورد خط $y = -300 + 6x$ با محور x ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟ این شرکت باید حداقل چه تعداد از این کالا تولید کند، تا سود دهی آغاز شود؟

صفحه 41

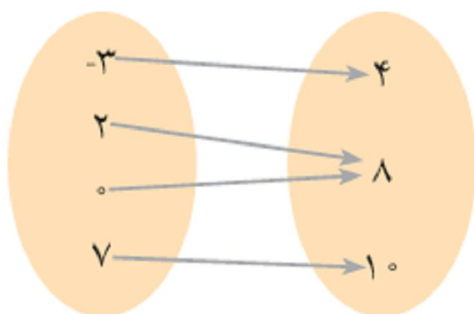


هر یک از رابطه‌های زیر را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و سپس وارون آن را به دست آورید.





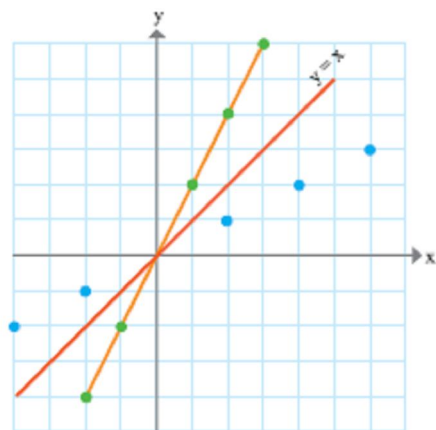
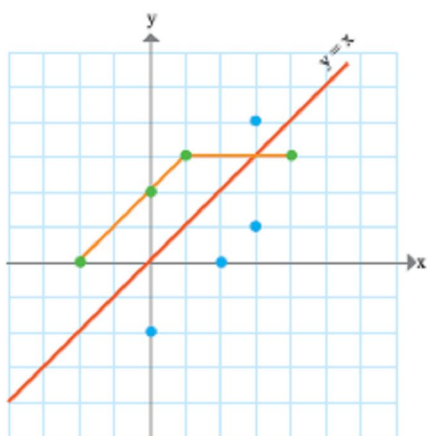
x	y
1	5
2	10
3	15
5	20
5	25





صفحه 42

۱- در شکل‌های زیر نمودار دو رابطه و خط $y = x$ رسم شده‌اند. به کمک نقاط مشخص شده، نمودار وارون این رابطه‌ها را رسم کنید. کدام یک از این رابطه‌ها و وارون آن هر دو تابع هستند؟



- ۲- الف) کدام یک از رابطه‌های داده شده در تمرین در کلاس، تابع هستند؟
 ب) کدام یک از رابطه‌های تمرین در کلاس و وارون آن، هر دو تابع هستند؟
 ج) اگر رابطه‌ای تابع باشد، آیا وارون آن رابطه هم تابع است؟

۳- وارون کدام یک از توابع مقابل، خود یک تابع است؟

$$f = \left\{ \left(0, 2 \right), \left(1, 5 \right), \left(4, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$g = \{ (7, 2), (5, 2) \}$$

صفحه 45



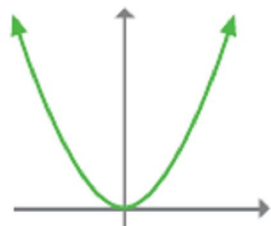
الف) در حالت کلی روشی برای بررسی یک به یک بودن یک تابع با استفاده از نمودار آن ارائه کنید. از خطوطی که به موازات محور x ها رسم می‌شوند، استفاده کنید.

ب) نمودار تابع مربوط به سوختن شمع را به خاطر آورید. آیا این تابع یک به یک است؟ چگونه از روی نمودار تابع می‌توان به این موضوع پی برد. آیا تابع مربوط به مسیر پرواز پرنده یک به یک است؟

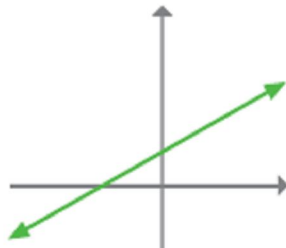
مسائل

صفحه 45

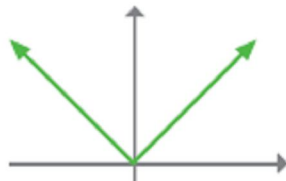
۱- کدام یک از توابع داده شده یک به یک هستند؟



(الف)



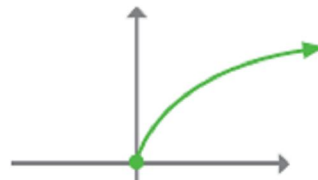
(ب)



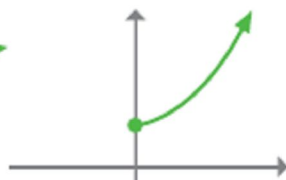
(ج)



(د)



(هـ)



(و)

$$ز) f = \{(1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4)\}$$

$$ح) g = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right), (0, 1), (2, 3) \right\}$$

۲. تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶

الف) آیا این تابع یک به یک است؟ معادله‌ای برای آن بنویسید.
 ب) وارون این تابع را به دست آورید. معادله‌ای برای وارون آن بنویسید.
 پ) نمودار تابع و نمودار وارون آن را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۳. در تمرین ۱ کدام یک از توابع معکوس پذیرند؟ نمودار تابع معکوس را برای آن‌ها (در همان شکل) رسم کنید.

۴. فرض کنید به اعضای یک کلاس کد ملی آن‌ها را نسبت دهیم. توضیح دهید که چگونه رابطه‌ی بین افراد و کد ملی آن‌ها تابعی یک به یک را معلوم می‌کند.

صفحه 47



۱- به نظر شما تفاوت بازه‌های $(-3, 3]$ و $(-3, 3)$ در چیست؟ این بازه‌ها را به صورت مجموعه نمایش دهید.



صفحه 48

۲- جدول زیر را کامل کنید.

نمایش هندسی	نمایش به صورت مجموعه	نمایش با نماد بازه	نوع بازه
	$\{x x \in \mathbb{R}, 2 < x < 5\}$	$(2, 5)$	باز
...	$\{x x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 5\}$	...	...
	...	...	نیم باز
...	...	$(2, 5]$	...
	...	...	...
...	$\{x x \in \mathbb{R}, x \geq 2\}$	...	...
...	$\{x x \in \mathbb{R}, x < 5\}$	...	...
...	...	$(-\infty, 5]$	...
...	...	$[0, +\infty)$	...
...	...	$(-\infty, 0)$	...
...	$\{x x \in \mathbb{R}, x > 0\}$	...	...
...	$\{x x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$	...	...
...	...	$(-\infty, +\infty)$	...

آخرین سطر نمایانگر مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. چهار سطر ماقبل آخرین سطر چه مجموعه‌هایی را نمایش می‌دهند؟

۲- اگر a, b دو عدد حقیقی باشند و $a < b$ ، جدول فوق (به جز پنج سطر آخر) را با a, b تکرار کنید.

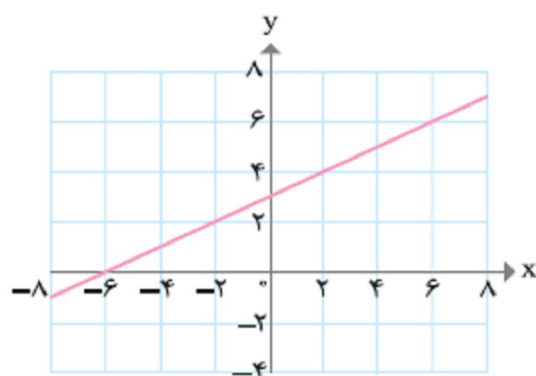
مسائل

صفحه 51

۱- اگر تابع f با معادله $f(x) = 2x - 5$ داده شده باشد، مطلوب است :
الف) رسم نمودار f

ب) $f(2)$, $f(3)$, $f(0)$, $f(-7)$, $f(\frac{5}{2})$, $f(\sqrt{7})$

۲- نمایش جبری تابع صفحه‌ی بعد را که نمودار آن ارائه شده است به دست آورید.
از بین نمایش‌های مختلفی که برای نمایش این تابع می‌شناسید، کدام یک را مناسب‌تر می‌دانید؟



۳- جدول زیر دمای سنگ‌های زیرزمین را در عمق‌های متفاوت زیر سطح زمین نشان می‌دهد:

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی‌گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

- الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به‌دست می‌دهد و نمودار آن را رسم کنید.
 ب) معادله‌ای برای این تابع به‌دست آورید.
 ج) دمای یک سنگ که در عمق ۱۰° کیلومتری زیرزمین است را بیابید.

۴- تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مقادیر $f(2)$ و $f(100)$ و $f(-5)$ را به‌دست آورید.

۵- برای یک تابع خطی می‌دانیم که: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$

نمودار این تابع را رسم کنید و معادله‌ی آن (نمایش جبری تابع) را بنویسید.

چرا این تابع وارون‌پذیر است؟ رابطه‌ای ریاضی برای وارون این تابع به‌دست آورید.

۶- آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

۷- علی در هر دقیقه پیاده روی، مسافت $\frac{1}{2}$ کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی که علی در t دقیقه طی می‌کند با $f(t)$ نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می‌دهد؟

الف) $f(t) = t - \frac{1}{2}$

ب) $f(t) = \frac{1}{2}t$

ج) $f(t) = t + \frac{1}{2}$

د) $f(t) = \frac{1}{2} - t$

۸- اگر درمورد تابع g داشته باشیم: $g(4) = 3$ ، $g(-2) = \frac{1}{3}$ ، $g(1) = 5$ ، $g(0) = 2$ ، g را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. آیا g یک به یک است؟

۹- نمایش جبری تابع زیر را به دست آورید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۴	۶
f(x)	۱۳	۱۱	۹	۷	۱	-۳

آیا این تابع یک به یک است؟

۱۰- برای اندازه گیری دما از واحدهای «سانتی گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می شود که

با رابطه ی $F = \frac{9}{5}C + 32$ به یک دیگر وابسته هستند.

الف) 20° درجه ی سانتی گراد برحسب فارنهایت چه قدر می شود؟

ب) 104° درجه ی فارنهایت چند سانتی گراد است؟

ج) معادله ای بنویسید که سانتی گراد را برحسب فارنهایت به دست دهد.

د) آیا رابطه ی بین این دو واحد یک تابع خطی را معلوم می کند؟

۱۱- طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.

۱۲- آیا تابعی یک به یک می‌توان یافت که دامنه‌ی آن شامل سه عضو و برد آن تنها از دو عضو تشکیل شده باشد؟

۱۳- اگر $h(x) = 2x + 1$ در هر یک از حالت‌های زیر نمودار $h(x)$ را رسم کنید.

الف) دامنه‌ی h برابر مجموعه‌ی $\{-5, -2, 1, 0\}$ باشد.

ب) دامنه‌ی h برابر مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت باشد.

پ) دامنه‌ی h برابر همه‌ی اعداد حقیقی باشد.

۱۴- در یک تابع خطی که نمودار آن از مبدأ مختصات می‌گذرد، داریم: $f(3) = 15$ ، رابطه‌ای ریاضی برای وارون این تابع به‌دست آورید.

فصل سوم

توابع خاص

نامعادله

تعیین علامت



صفحه 57

۱- فرض کنید که تابع $f(x) = x^2$ تابعی باشد که مساحت یک مربع را برحسب طول ضلع آن به دست می‌دهد. نمودار این تابع را رسم کنید و آن را با نمودار تابعی که با معادله $y = x^2$ داده می‌شود مقایسه کنید. دامنه و برد هر دو را به دست آورید و با یکدیگر مقایسه کنید.

۲- تابع $g(x)$ با جدول زیر داده شده است. جاهای خالی را پر کنید.

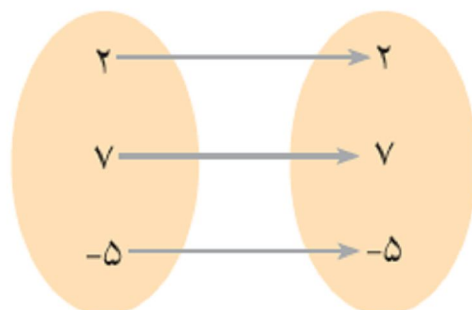
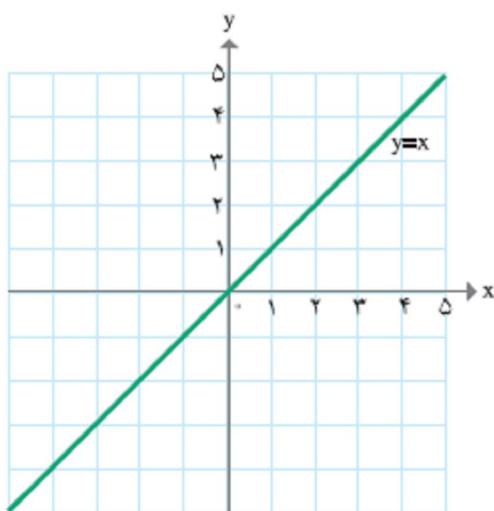
x	-۳	-۲	۰	۱	۲	۳
$g(x) = x^2 + ۵$	۱۴	؟	؟			

در ادامه سه تابع با نمایش‌های متفاوت ارائه شده است :

الف) توضیح دهید که چرا هر یک از نمونه‌های ارائه شده تابع همانی هستند؟

ب) آیا می‌توانید تفاوت‌های آن‌ها را بیان کنید؟

ج) دامنه و برد هر کدام را به دست آورید.

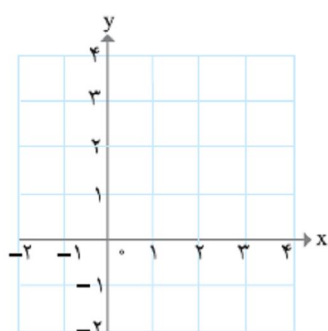




صفحه 59

با تکمیل جدول زیر تابع $f(x) = |x| + 3$ را رسم کنید.

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x) = x + 3$				3	$\frac{7}{2}$			

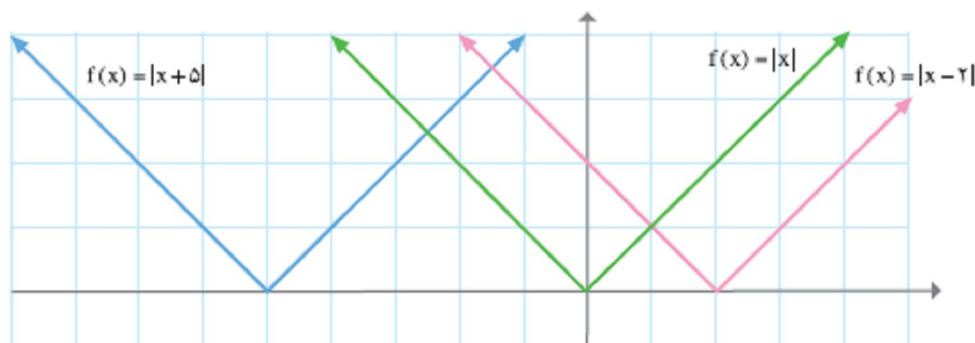
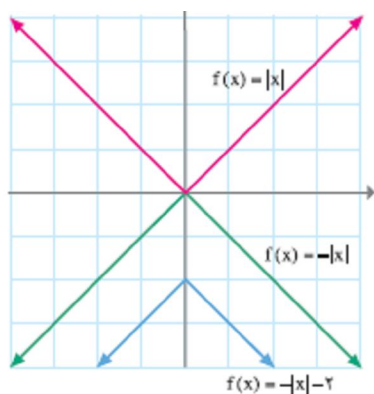


صفحه 61

در شکل های زیر دامنه و برد توابعی که به کمک تابع قدر

مطلق $f(x) = |x|$ رسم شده اند را بیابید. $f(x) = -|x|$

چگونه رسم شده است؟



صفحه 61

۱- نمودار تابع قدر مطلق $f(x) = |x - 4|$ را در حالت‌های زیر رسم کنید.

الف) $\{1, 2, 3, 4\}$ دامنه‌ی f

ب) مجموعه‌ی همه‌ی اعداد بزرگتر یا مساوی ۴ = دامنه‌ی f

ج) همه‌ی اعداد حقیقی = دامنه‌ی f

۲- توابع $f(x) = |x| + 2$ و $g(x) = |x + 2|$ و $h(x) = |x| - \frac{2}{3}$ را به کمک انتقال تابع قدر مطلق $f(x) = |x|$ رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را به دست آورید.

۳- توابع $h(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$ و $f(x) = |x|$ و $g(x) = |2x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و با یک‌دیگر مقایسه کنید. برای رسم این توابع از جدولی شبیه تابع قدر مطلق کمک بگیرید.

مسائل

صفحه 63

۱- در شکل‌های زیر نمودار توابع درجه دوم زیر رسم شده‌اند.

$$f(x) = (x - 5)^2 - 2$$

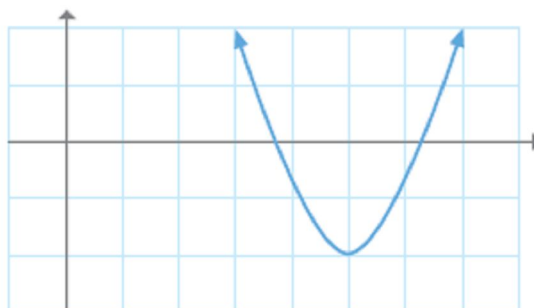
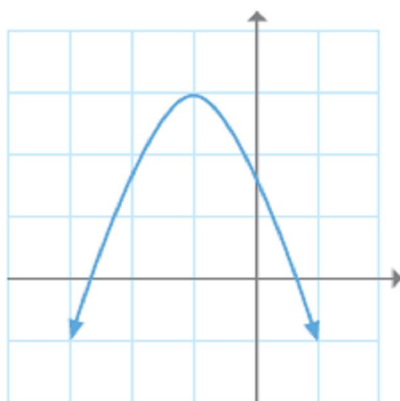
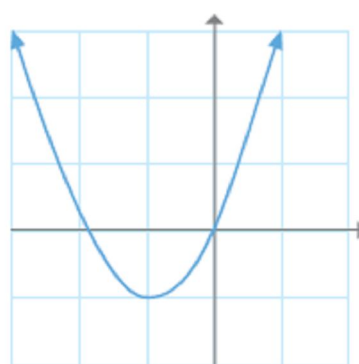
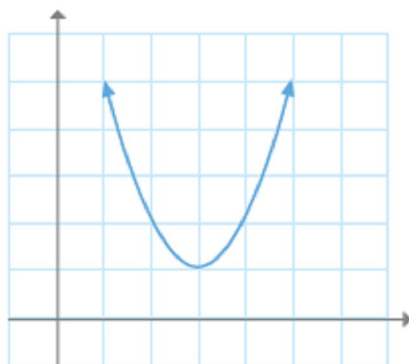
$$f(x) = (x + 1)^2 - 1$$

$$f(x) = (x - 3)^2 + 1$$

$$f(x) = -(x + 1)^2 + 3$$

الف) تعیین کنید که هر یک از نمودارها چه تابعی را نشان می‌دهند.

ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به دست آورید :



۲- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2$$

$$f(x) = -(x-1)^2 - 4$$

$$f(x) = 2x^2$$

$$f(x) = (x-5)^2$$

صفحه 65



دامنه‌ی توابع گویای زیر را به دست آورید:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$$

$$g(x) = \frac{255x}{100-x}$$

$$h(x) = \frac{x+7}{3x}$$

$$k(x) = \frac{\frac{1}{2}x-4}{x^2+1}$$



صفحه 68

۱- نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را به دست آورید.

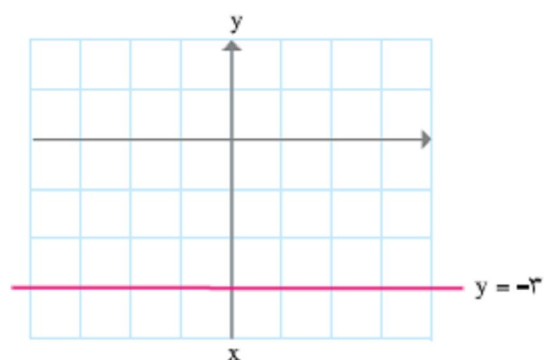
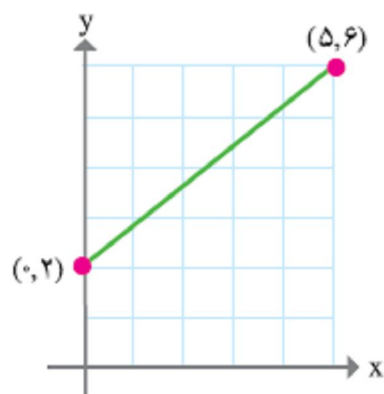
الف) $g(x) = \sqrt{x} + 4$

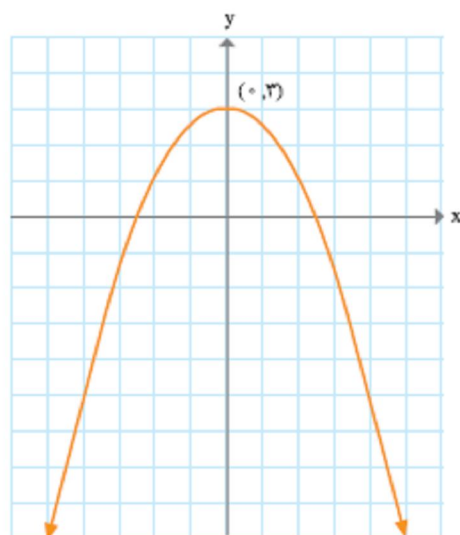
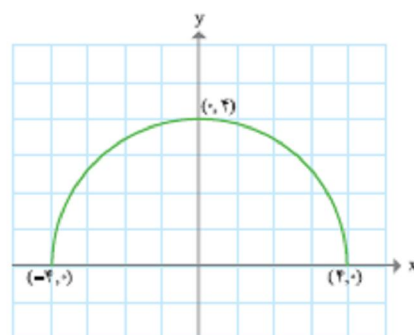
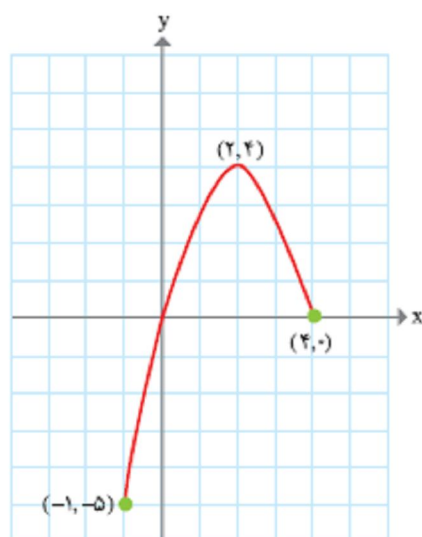
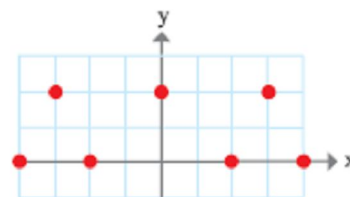
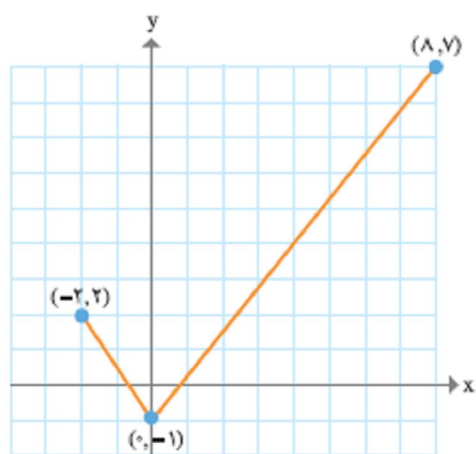
ب) $h(x) = \sqrt{x-4}$

ج) $t(x) = \sqrt{x} - 4$

د) $m(x) = \sqrt{2x-5}$

۲- در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هریک از این توابع را به کمک نمودار آن‌ها معلوم کنید. در هر مورد که امکان دارد دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید.





مسائل

صفحه 70

۱- نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و دامنه و برد هر یک را به دست آورید. کدام یک از این توابع خطی است؟

$$f(x) = \frac{1}{2}x \quad g(x) = \frac{1}{2}x + 2 \quad h(x) = \frac{1}{2}(x - 2)$$

۲- دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

$$y = \sqrt{2x} \quad y = \sqrt{-5+x} \quad y = \sqrt{-x+3} \quad y = \sqrt[3]{x}$$

$$f(x) = \sqrt{x-2} + 1 \quad g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+3} \quad h(x) = -\sqrt{x} - 1 \quad y = \sqrt{-2x+7}$$

۳- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) دامنه‌ی تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $(0, \infty)$ و بُرد آن نیز $(0, \infty)$ است.

ب) دامنه‌ی تابع $f(x) = 2|x| - \frac{1}{3}$ همه‌ی اعداد حقیقی و بُرد آن $(2, \infty)$ است.

ج) دامنه‌ی تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ است.

د) اگر $f(x) = 2x + 1$ آن گاه: $f(1) = \frac{f(2)}{2}$

۴- اگر $f(x) = 2x - 3$ مطلوب است:

$$f(0) \quad f(1) \quad f\left(\frac{3}{2}\right) \quad f(a) \quad f(2x) \quad f(x+1)$$

۵- دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{5}x - 1 \quad h(x) = \frac{5}{x^2 - 2x} \quad y = \frac{3x^2 - x + 7}{x^2 - 2x - 3} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{2x - 7}{4} \quad y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad f(z) = \frac{z + 2}{\sqrt{z - 2}} \quad y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

۶- نمودار یک تابع خطی f از نقاط $(3, -4)$ و $(-3, 0)$ می‌گذرد. مطلوب است:
 $f(-4)$, $f(-1)$

۷- دو مثال از دو تابع متفاوت ارائه کنید که هر دو دارای دامنه‌ها و بردهای مساوی باشند، ولی هیچ زوج مرتبی در بین آنها مشترک نباشد.

۸- فرض کنید برای تابعی مانند f داشته باشیم: $f(x-1) = 5x$ مطلوب است: $f(7)$.

۹- نمودار تابعی مانند y را رسم کنید که دامنه‌ی آن $[-3, 3]$ و برد آن $[0, 5]$ باشد، مشروط بر آن که:

الف) تابع y یک به یک باشد.

ب) تابع y یک به یک نباشد.

۱۰- یک شرکت حمل و نقل مسافر، برای هر گروه ۸۰ نفره یا بیش تر از افراد، نرخ حمل و نقل هر مسافر توسط اتوبوس درستی را از فرمول زیر تعیین می کند:

$$n \geq 80 \quad \text{نرخ حمل و نقل هر مسافر بر حسب هزار تومان} = 8 - 0.05(n - 80)$$

که در آن n تعداد مسافر است.

الف) نرخ حمل و نقل هر مسافر برای یک گروه ۱۰۰ نفره چه قدر است؟

ب) هزینه ی حمل و نقل ۱۰۰ مسافر چه قدر است؟

ج) تابعی بنویسید که هزینه ی حمل و نقل را بر حسب n به دست دهد.

د) جدول زیر را کامل کنید و سپس نمودار $R(n)$ را رسم نمایید. بیش ترین مقدار به دست آمده برای $R(n)$ را چگونه تفسیر می کنید؟

n (تعداد مسافر)	۹۰	۱۰۰	۱۱۰	۱۲۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۵۰
$R(n)$ (هزینه ی کل بر حسب هزار تومان)	...	...	...	...	۷۱۵	...	...

۱۱- فرض کنید $f(x) = 3x$ و $g(x) = 2x + 1$ کدام یک از روابط زیر در مورد f و g درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $g(a + b) = g(a) + g(b)$, $f(a + b) = f(a) + f(b)$

ب) $g(ab) = g(a).g(b)$, $f(ab) = f(a).f(b)$

ج) $g(kx) = kg(x)$, $f(kx) = kf(x)$

۱۲- فرض کنید $f(x) = mx + b$ یک تابع خطی باشد و داشته باشیم :

$f(2) = 5$ و $f(x + 2) = f(x) + 2$

الف) مطلوب است تابع f و رسم نمودار آن.

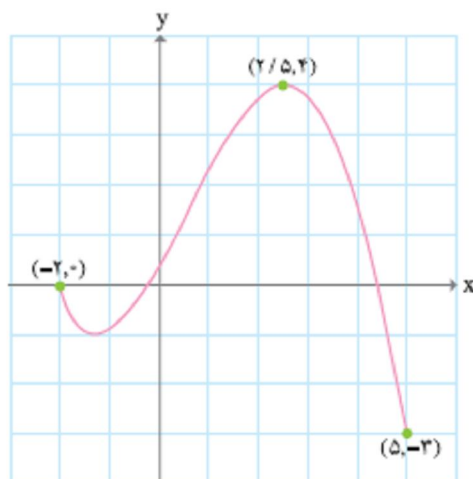
ب) آیا می توان گفت که در هر تابع خطی رابطه ی $f(x + 2) = f(x) + 2$ برقرار است؟

۱۳- یک تانکر گاز از یک استوانه و دونیم کره به شعاع r در دوانتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه 30 متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

۱۴- تابعی بنویسید که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی $f = \{0, 2, 5\}$ باشد و هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کند:

الف) یک به یک نباشد ب) $f(0) > f(2)$

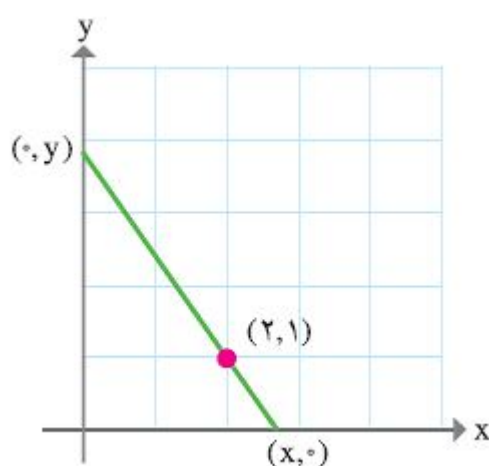
۱۵- دامنه و برد تابع زیر را پیدا کنید.



۱۶- اگر $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$ مطلوب است:

$f(0)$ و $f(1)$ و $f(\sqrt{2})$

۱۷- اگر $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ و $f(1) = 5$ و $f(-2) = -1$ مقدار $3a - 2b$ را به دست آورید.



۱۸- به ازای هر خط که از نقطه $(1, 2)$ می‌گذرد و جهت مثبت محورهای مختصات را در نقاط $(x, 0)$ و $(0, y)$ قطع می‌کند، یک مثلث قائم الزاویه در ناحیه‌ی اول محورهای مختصات تشکیل می‌شود. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که مساحت هر مثلث قائم الزاویه را به عنوان تابعی از x به دست دهد. دامنه‌ی این تابع را معلوم کنید.

۱۹- کدام یک از توابع زیر وارون پذیرند؟

$$f = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2)\} \quad g = \{(1, 2), (3, 4), (5, 2)\}$$

$$h = \{(4, 1), (5, 2), (6, 1)\} \quad k = \{(1, 1), (2, 5), (3, 6)\}$$



صفحه 76

۱- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{100 - 5x}$ را مشخص کنید.

۲- جدول تعیین علامت $y = ax + b$ را در حالتی که $a < 0$ رسم کنید.



صفحه 77

۱- عبارت $(2x - 1)(x - 4)$ را تعیین علامت کنید.

۲- نامعادله‌ی $x^2 - 7x + 10 \geq 0$ را با استفاده از تجزیه حل کنید.

۳- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x^2 \geq 25$ چیست؟

۴- تابع $g(x) = \sqrt{-(x-1)(x-3)}$ به ازای چه مقادیری از x قابل قبول است؟



صفحه 78

۱- با رسم نمودار $y = x^2 - 2$ جواب نامعادله $x^2 - 2 \geq 0$ را به دست آورید.

۲- نامعادله $x^2 + 1 > 0$ به ازای چه مقادیری از x برقرار است؟ با رسم نمودار $y = x^2 + 1$ وضعیت آن را نسبت به محور x ها بررسی کرده و به سؤال قبل جواب دهید.

۳- اگر $f(x) = (x-1)(x-2)$ ، با توجه به نمودار آن تمام مقادیر x که $f(x) \geq 2$ را روی شکل مشخص کنید.

۴- با توجه به نمودارهای درجه‌ی دومی که تا به حال در کتاب دیده‌اید آیا می‌توانید با رسم شکل حالاتی که نمودار محور x ها را قطع نمی‌کند مشخص کنید؟



صفحه 80

۱- توابع زیر را تعیین علامت کنید.

$$f(x) = 6x^2 - 8x + 2 \text{ (الف)}$$

$$g(x) = -3x^2 + 9x - 2 \text{ (ب)}$$

۲- اگر $y = ax^2 + bx + c$ و معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه مانند x_1 و x_2 داشته باشد و $a < 0$ جدول تعیین علامت آن را بکشید. تفاوت آن با حالتی که $a > 0$ چیست؟

۳- اگر $x_1 = x_2$ در هر دو حالت $a > 0$ و $a < 0$ جدول تعیین علامت $ax^2 + bx + c$ را مشخص کنید.

۴- با رسم نمودار $y = (x+1)^2$ و $y = -(x+1)^2$ این دو عبارت را تعیین علامت کنید. شباهت این سؤال با سؤال قبل چیست؟



صفحه 83

 ۱- نشان دهید اگر $x \in \mathbb{R}$ آنگاه $2x^2 - 2x + 1 \geq 0$.

 ۲- اگر $a > 0$ ثابت کنید $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

(یعنی حاصل جمع هر عدد مثبت با معکوس خودش حداقل دو است.)

 ۳- اگر $a, b > 0$ با استفاده از تمرین قبل نشان دهید: $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

۴- دامنه‌ی هریک از توابع زیر را بیابید.

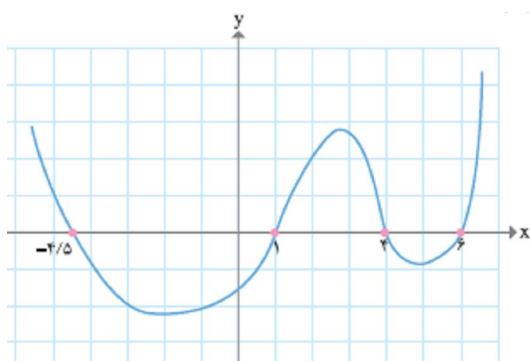
الف) $f(x) = \sqrt{-2x^2 - 3x + 1}$

ب) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

ج) $h(x) = \sqrt{x(x-3)^2}$

د) $i(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$

۵- نمودار تابع $f(x)$ مطابق شکل زیر است.
 به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟ $\sqrt{f(x)}$



۶- تمامی اعدادی که اگر جای a قرار گیرند عبارت $y = ax^2 + 3x + 1$ همواره مثبت می‌شود را بیابید.

۷- به ازای هریک از مقادیر a معادله $x^2 + 2x + a = 0$ یا ریشه‌ی حقیقی ندارد یا دو ریشه‌ی متمایز یا دو ریشه‌ی یکسان دارد. در هریک از این سه حالت تمام مقادیر ممکن برای a را بیابید.

۸- مهدی و امید در حال تمرین برای مسابقه‌ی فوتبال هستند. آن‌ها قرار است تمرین شوت زدن انجام دهند. با شنیدن صدای سوت مربی هرکدام به تویی که جلوی پایشان است ضربه‌ای می‌زنند. اگر $h(t) = -t^2 + 10t$ نشانگر ارتفاع توپ مهدی در زمان t و $g(t) = -3t^2 + 18t$ نشانگر ارتفاع توپ امید در زمان t باشد طی چند ثانیه توپ امید در ارتفاع بالاتر از ارتفاع توپ مهدی قرار دارد؟ t برحسب ثانیه و $h(t)$ و $g(t)$ برحسب متر هستند.

فصل چهارم

توابع نمایی

و

لگاریتمی



صفحه 89

آیا عبارت $(-2)^x$ را می‌توان به ازای تمام x های حقیقی محاسبه کرد؟



صفحه 90

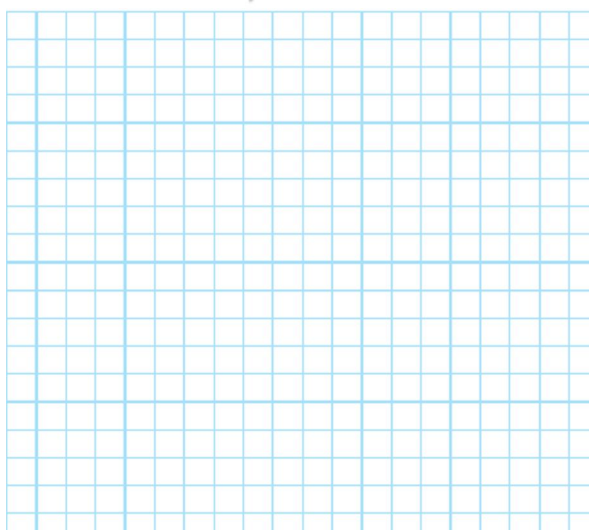
۱- دامنه و برد تابع $y = a^x$ را به دست آورید.

۲- آیا تابع نمایی $y = a^{-x}$ یک تابع یک به یک است؟ چرا؟



صفحه 91

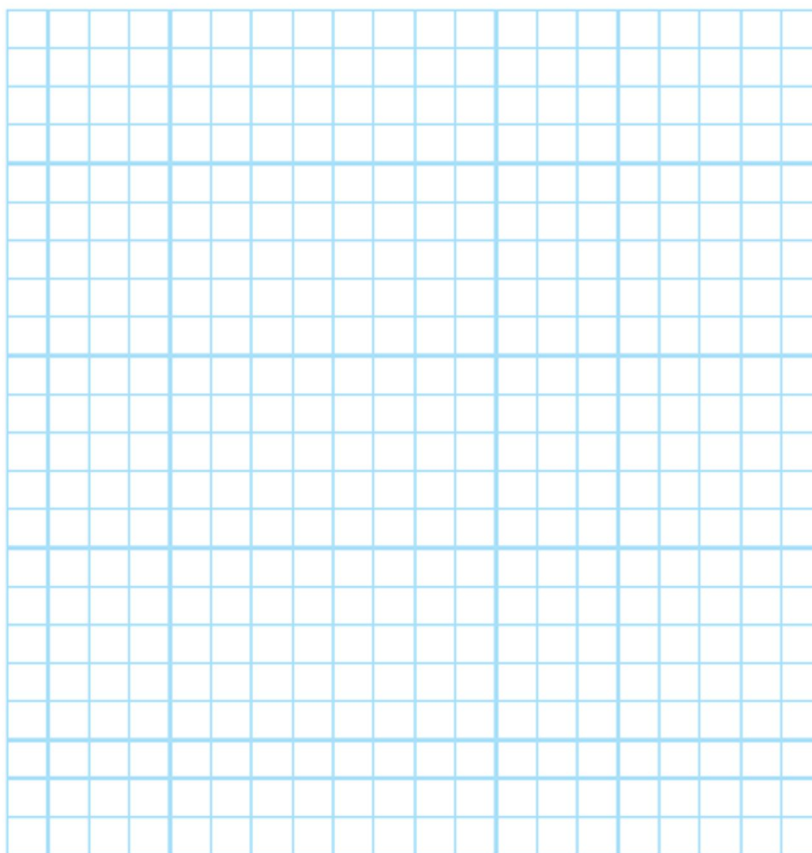
۱- نمودار تابع $y = 7^x$ را به ازای $-1 \leq x \leq 2$ رسم کنید.



۲- مقدار تقریبی $y = 7^{1/6}$ را با استفاده از نمودار تابع به دست آورید.

۳- نمودار توابع $y = 3^x$ و $y = 4^x$ و $y = 5^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و آن‌ها را با هم مقایسه کنید.

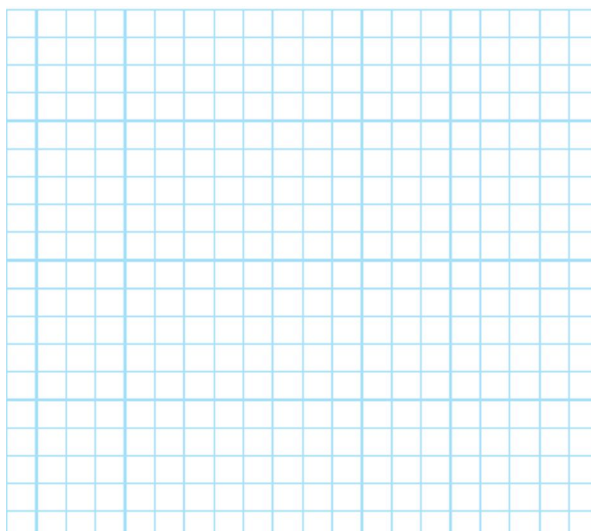
جدولی تنظیم کنید که مقادیر y را به ازای x های صحیح بین $-3 \leq x \leq 3$ به دست آورید. این سه تابع در چه چیزهایی با یکدیگر مشترک هستند؟



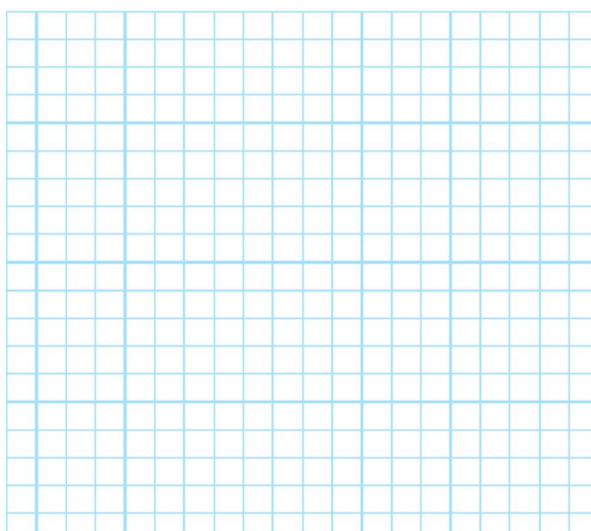


صفحه 93

۱- نمودار $y = (\frac{1}{3})^x + 2$ را رسم کنید. نقطه‌ی تقاطع منحنی با محور y ها، چیست؟



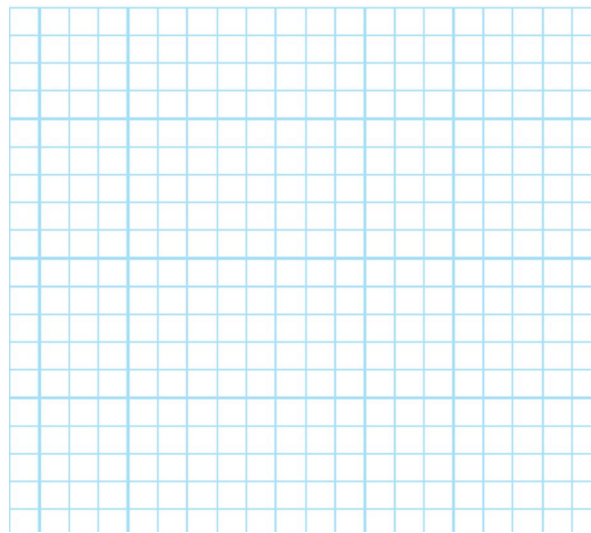
۲- با استفاده از نمودار تابع فوق، مقدار تقریبی $y = (\frac{1}{3})^{-1/5} + 2$ را به دست آورید.



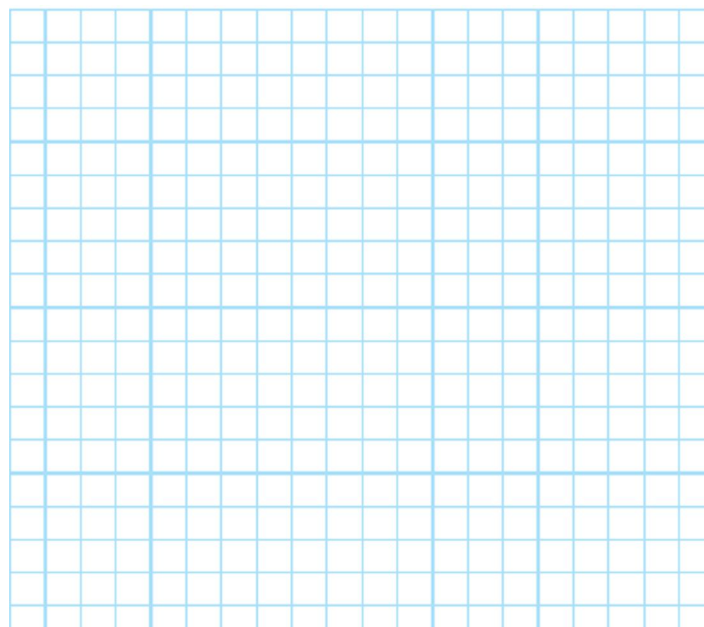
صفحه 94



۱- فکر می کنید توابع $y = 1^x$ و $y = (\frac{1}{2})^x$ در چه نقطه ای محور y ها را قطع می کنند. آیا می توانید بدون استفاده از جدول، نمودار تقریبی این دو تابع را رسم کنید؟



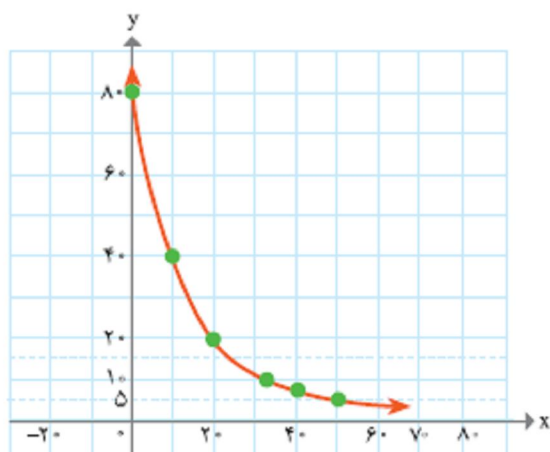
۲- نمودار توابع $y = 3^x$ و $y = 4^x$ و $y = 5^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و آن‌ها را در $0 < x < 1$ و $x > 1$ و $x < 0$ با هم مقایسه کنید.





صفحه 95

آیا می‌توانید عبارت دقیق تابع نمایی بالا را به دست آورید؟



صفحه 95

۱- نمودار هر دسته از تابع‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت آن‌ها را نسبت به هم مقایسه کنید.

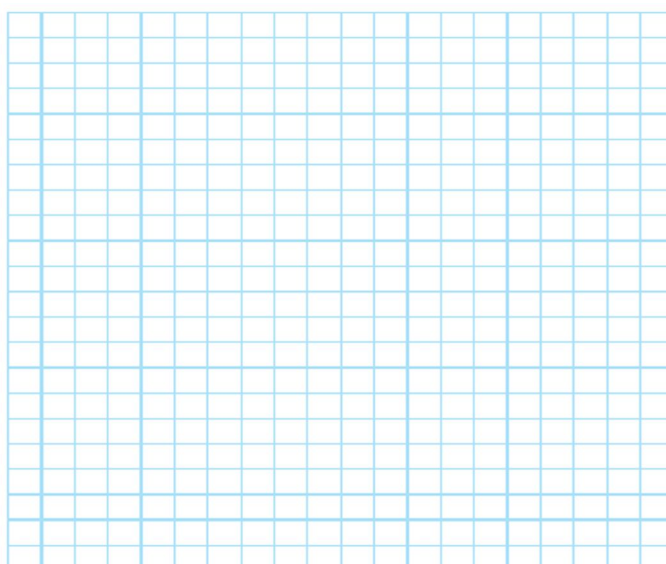
الف) $y = 2^x - 4$

,

$y = 2^x + 3$

,

$y = 2^x$



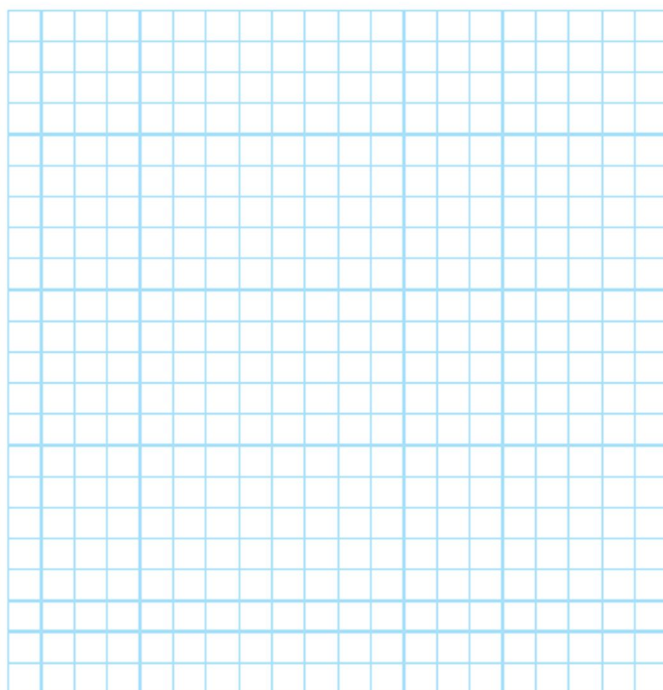
ب) $y = 2^{x-4}$

,

$y = 2^{x+5}$

,

$y = 2^x$



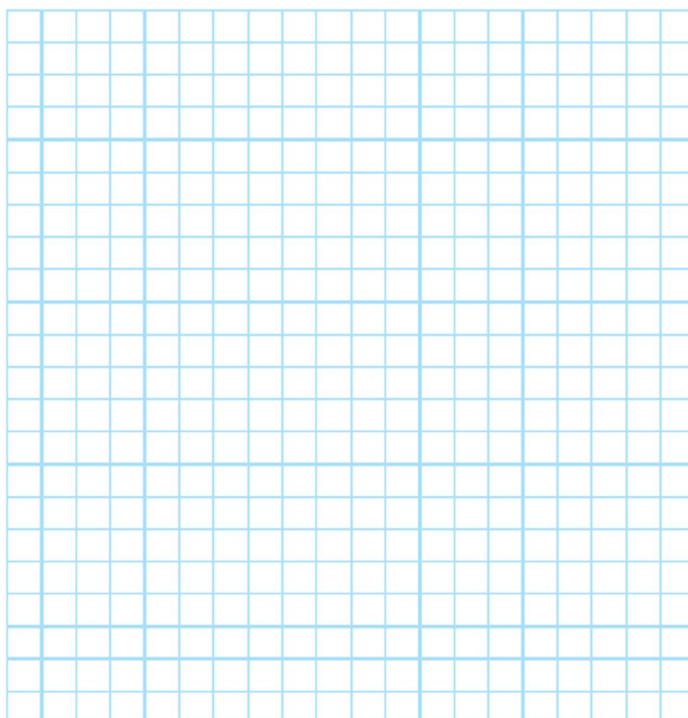
ج) $y = 5^x$

,

$y = 3^x$

,

$y = 2^x$



۲- در جدول زیر نقاطی از یک تابع داده شده است. آیا چگونگی تغییرات این تابع، نمایی است؟ چرا؟

x	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
y	۱۵	۲۱	۲۷	۳۳	۳۹	۴۵

۳- رفتار یا چگونگی تغییرات کدام یک از توابع زیر، نمایی است؟

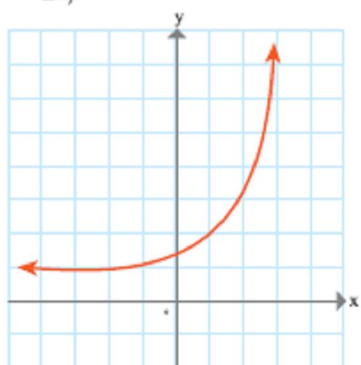
الف) $y = 4^x + 3$

ب) $y = 2x(x-1)$

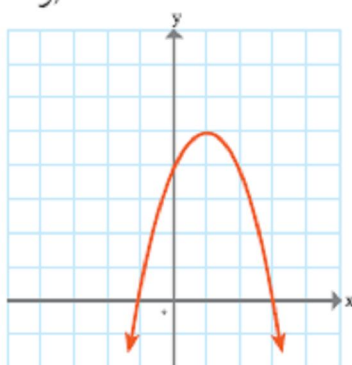
ج) $y + 5x = 8$

د) $y = x^4 + 3$

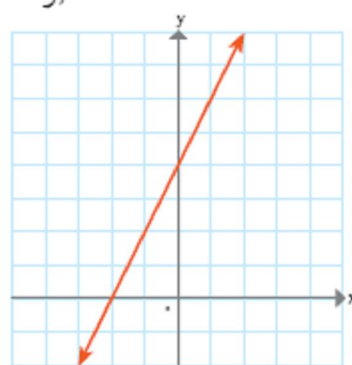
هـ)



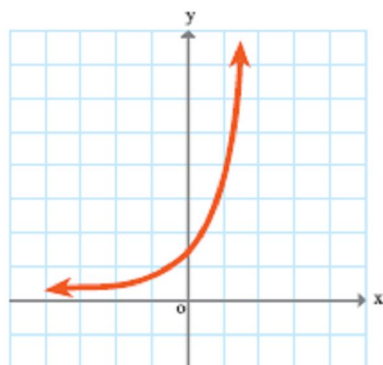
و)



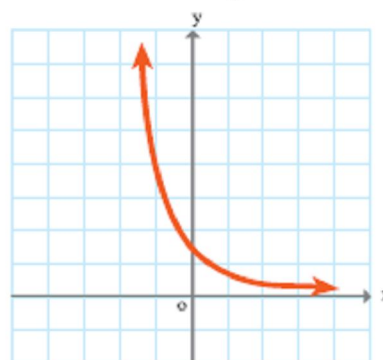
ز)



۴- نرگس و فاطمه نمودار $y = (\frac{1}{3})^x$ را رسم کرده‌اند. کدام یک از آن‌ها، نمودار را درست رسم کرده است؟ دلیل خود را توضیح دهید.



نمودار رسم شده توسط فاطمه

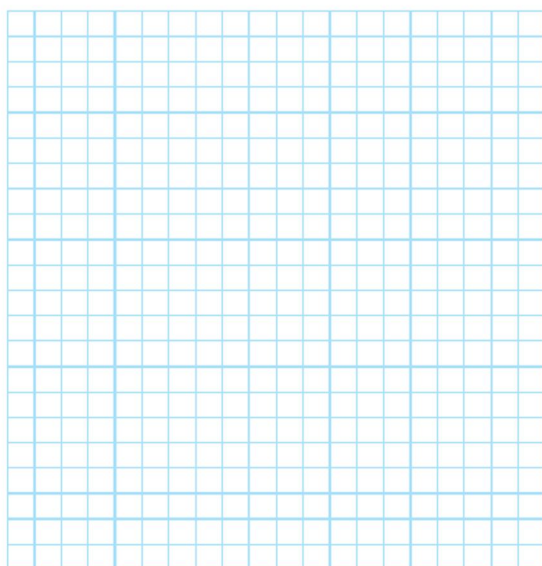


نمودار رسم شده توسط نرگس

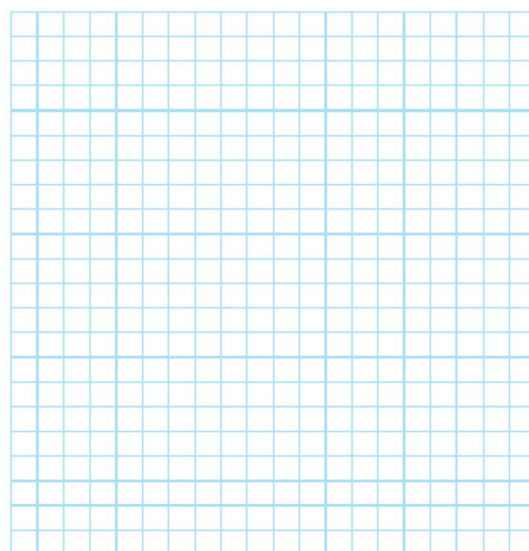
۵- توابع $y = 3^x$ و $y = x^3$ چه فرق اساسی با هم دارند؟

۶- نمودار توابع زیر را رسم کنید. محل تقاطع نقاط نمودار با محور y ها را پیدا کنید. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی تابع در نقطه‌ی داده شده را به دست آورید.

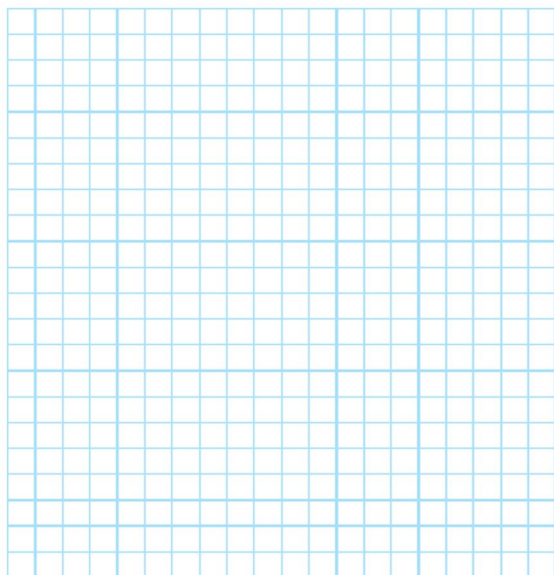
الف) $y = 9^x$; $x = 0/8$



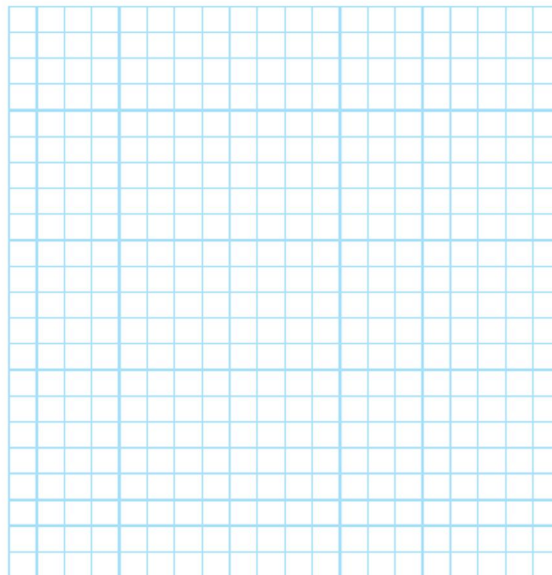
ب) $y = (\frac{1}{4})^x$; $x = 1/7$



ج) $y = 10^x$; $x = 0/3$



د) $y = (\frac{1}{10})^x$; $x = -1/3$



۷- مشخص کنید که آیا داده‌های زیر در هر جدول، بیانگر یک تابع نمایی است یا خیر؟ دلیل خود را توضیح دهید.

الف)

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۱	۶	۳۶	۲۱۶	۱۲۹۶	۷۷۷۶

ب)

x	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
y	۵	۹	۱۳	۱۷	۲۱	۲۵

ج)

x	۱	۰	-۱	-۲
y	۴	۱	-۲	-۵

د)

x	۰	۱	۲	۳
y	۱	۰/۵	۰/۲۵	۰/۱۲۵

هـ)

x	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
y	۱۶	۱۲	۹	۶/۷۵

و)

x	-۱	۰	۱	۲
y	-۰/۵	۱/۵	-۲	+۴

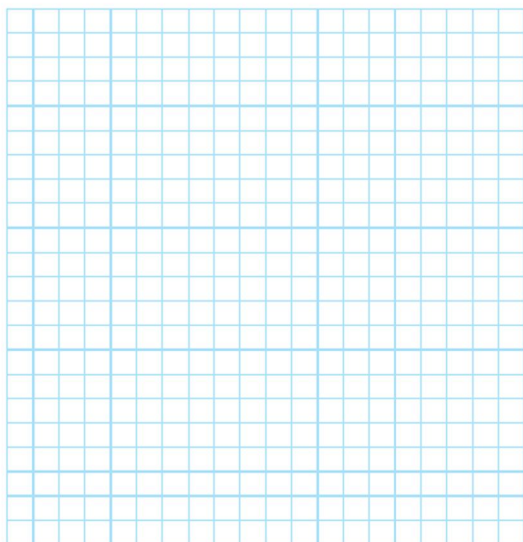
صفحه 105



نمودار تابع $f(x) = 3^x$ و نمودار تابع معکوس آن را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و به این سؤالات پاسخ دهید:

الف) دامنه و برد هر کدام از توابع را مشخص کنید.

ب) دامنه و برد تابع لگاریتمی و تابع معکوسش را با هم مقایسه کنید.



صفحه 107



کدام شکل نمودار کدام تابع می تواند باشد؟

الف) $y = \log_2^{(x-2)}$

ب) $y = \log_3^x$

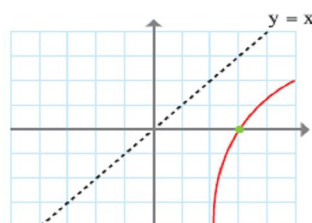
ج) $y = 2^{-x}$

د) $y = \log_{\frac{1}{2}}^x$

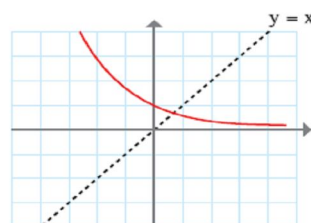
هـ) $y = 2 + \log_2^x$



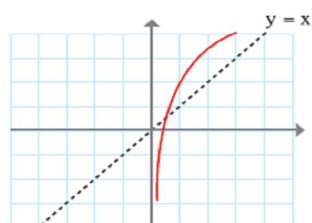
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)



صفحه 108

۱- نشان دهید که :

۱) $\log_4^{16} = 2$

۲) $\log_3^{\frac{1}{27}} = -3$

۲- مقدار $\log_5^5$ و $\log_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}}$ را محاسبه کنید. در حالت کلی $\log_a^a$ و $a > 0$ و $a \neq 1$ را محاسبه

و عبارت زیر را کامل کنید.

لگاریتم هر عدد a در پایه ی مساوی است.

۳- در عبارت های زیر y را بیابید.

الف) $\log_4^1 = y$

ب) $\log_2^8 = y$

ج) $\log_{10}^{100} = y$ د) $\log_{\frac{1}{6}}^{36} = y$



صفحه 109

معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\log_3^x = 4$

۲) $\log_2^{(x-1)} = -1$

۳) $\log_{\frac{x}{10}}^x = \frac{1}{2}$



صفحه 110

معادلات زیر را حل کنید: (جواب‌های قابل قبول برای معادلات زیر را مشخص کنید.)

۱) $\log_3^{(x^2-15)} = \log_3^{2x}$

۲) $\log_{\frac{x}{10}}^{(x^2-30)} = \log_{\frac{x}{10}}^x$

۳) $\log_x^{16} = 2$



صفحه 112

۱- درستی تساوی $\log_c^{abd} = \log_c^a + \log_c^b + \log_c^d$ را تحقیق کنید. (a و b و c و d اعداد حقیقی مثبت اند و $c \neq 1$ است.)

۲- از تساوی $a^n = \underbrace{a.a. \dots a}_n$ استفاده کنید و رابطه‌ی $\log_c^{a^n} = n \log_c^a$ را نتیجه بگیرید.
 $n \in \mathbb{N}$ بار n

۳- نشان دهید که : $\log_3^5 = 5 \log_3^5$

۴- حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید :

۱) $\log_1^{10}$ ۲) $\log_1^{100}$ ۳) $\log_1^{40} + \log_1^{25}$ ۴) $2 \log_1^{40} + \log_1^{40}$

۵- اگر $\log_1^{30} = n$, $\log_1^{20} = m$ باشد عبارات زیر را محاسبه کنید : (برحسب n,m)

۱) $\log_1^{18}$ ۲) $\log_1^{32} + \log_1^{27}$



صفحه 114

۱- معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$۱) \log_9^x = \frac{3}{2}$$

$$۲) \log_5^{(x+1)} = \frac{1}{2}$$

$$۳) \log_{10}^{(4-x)} = \log_{10}^{(6-x)} - \log_{10}^x.$$

$$۴) \log_7^6 + \log_7^x = \log_7^{10} \quad ۵) \log_4^a + \log_4^9 = \log_4^{27} \quad ۶) \log_{10}^{16} - \log_{10}^{2x} = \log_{10}^2.$$

$$۷) \log_5^{24} - \log_5^{(x+5)} = \log_5^8$$

$$۸) \log_2^n = \frac{1}{4} \log 16 + \log 49$$

۹ و ۱۰ را بر حسب n حل کنید.

$$۹) \log_a^{4n} - 2 \log_a^x = \log_a^x$$

$$۱۰) \log_b^8 + 3 \log_b^n = 3 \log_b^{(x-1)}$$

$$۱۱) \log_{10} z + \log_{10}^{(z+3)} = ۱$$

$$۱۲) \log_{\varphi}^{(a^{\varphi}+2)} + \log_{\varphi}^{\varphi} = 2$$

۲- برای هر عدد حقیقی و مثبت که c, b, a, x که $(c \neq ۱)$ است ثابت کنید.

$$۱) \log_c^{\frac{1}{x}} = -\log_c^x$$

$$۲) \log_c^a = \frac{\log_e^a}{\log_e^c}$$

$$۳) c^{\log_c^a} = a$$

۳- با استفاده از قوانین لگاریتم ها یا هر راه حل دیگر نشان دهید که :

$$۱) \log_{\varphi}^{\varphi} \times \log_{\varphi}^{\varphi} = ۱$$

$$۲) \log_{\varphi}^{\varphi^{\varphi}} = 2 \log_{\varphi}^{\varphi} = 2$$

$$۳) \log_{\varphi}^{(\log_{\varphi}^{\varphi})} = 0$$

۴- کدام راه حل درست و کدام یک نادرست است؟ استدلال کنید.

$$۱) \log_3^x = 9$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$x = 2$$

$$۲) \log_3^x = 9$$

$$x = 3^9$$

$$x = 19083$$

۵- آیا راه حل زیر درست است؟
استدلال کنید.

$$\log_{\frac{1}{2}}^{(2x-1)} = 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^{2x} - \log_{\frac{1}{2}}^1 = 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^{2x} - 0 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

۶- معادله ی $\log_{\frac{1}{2}}^{(x+2)} = \log_{\frac{1}{2}}^8 - \log_{\frac{1}{2}}^{(x-5)}$ را حل کنید.

چگونه می توانید از درستی جواب به دست آمده اطمینان حاصل کنید؟

۷- با توجه به نمودار تابع $y = \log_2^x$ نمودار تابع $y = \log_2^{(x+1)}$ و تابع معکوس آن را رسم کنید.

فصل 5

مثلثات



صفحه 122

۱- هر یک از عبارت‌های زیر را در موقعیت استاندارد به درجه بیان کنید.

الف) $\frac{1}{3}$ دور کامل در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت.

ب) $\frac{3}{4}$ دور کامل در جهت حرکت عقربه‌های ساعت.

۲- زوایای 40° و 120° درجه را در موقعیت استاندارد رسم کنید.

۳- اگر ستاره‌ای حول محور عبور کننده‌ی از مرکز زمین روی مسیر دایره‌ای شکل به شعاع یک واحد به طور ظاهری^۱ بگردد، دوران یافته نقطه‌ی $(1,0)$ را تحت زوایای $36^\circ, 27^\circ, 18^\circ, 3^\circ$ در موقعیت استاندارد مشخص کنید.

صفحه 125



۱- یک متحرک روی دایره، چه زاویه ای بر حسب رادیان بچرخد تا به جای اول خود باز گردد؟

۲- 200° درجه چند رادیان است؟ 72° درجه معادل چند رادیان است؟



۳- شکل مقابل دایره ای به شعاع واحد را نشان می دهد که اندازه های زوایا بر حسب درجه و رادیان با یک دیگر معادل هستند. با استفاده از روابط بالا جاهای خالی دایره ی فوق را تکمیل نمایید.

۴- $\frac{3\pi}{2}$ رادیان معادل چند درجه است؟ $-\frac{\pi}{3}$ رادیان معادل چند درجه است؟

۵- در فعالیت مربوط به پیست دوچرخه سواری اگر علی مسافت $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ کیلومتر را طی کرده باشد مقدار زاویه ای که چرخیده است را بر حسب درجه بیان کنید.



صفحه 126

۱- دایره‌ای به شعاع ۱ واحد رسم کنید روی این دایره انتهای کمان داده شده را در موقعیت استاندارد مشخص کنید.

الف) $\frac{3\pi}{2}$ ب) ۳ رادیان

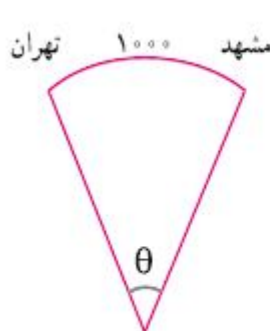
۲- زوایای ۳- رادیان و 3π - رادیان چه کسری از دایره‌ی طی شده می‌باشد؟ اندازه‌ی آن را بر حسب درجه بیان کنید. (با تقریب سه رقم اعشار)

۳- اندازه‌ی زاویه‌ی ای که عقربه‌ی ساعت شمار از ۱ بعدازظهر تا ۳ بعدازظهر حرکت می‌کند را بر حسب درجه و رادیان بیان کنید.

۴- چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه شمار به اندازه‌ی $2/5\pi$ رادیان دوران کند؟



۵- فرض کنید سوار چرخ و فلکی شده‌اید که 40° کابین دارد و کابین‌های آن شماره گذاری شده‌اند. اگر در آغاز حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، شما روی کابین شماره‌ی ۳ نشسته باشید بعد از $\frac{47\pi}{10}$ رادیان دوران شما در موقعیت کدام کابین قرار دارید؟



۷- فرض کنیم فاصله‌ی تهران تا مشهد روی قسمتی از سطح زمین تقریباً ۱۰۰۰ کیلومتر باشد. اگر شعاع زمین را ۶,۴۴۰,۰۰۰ کیلومتر فرض کنیم اندازه‌ی زاویه‌ای را بر حسب رادیان که رأس آن در مرکز زمین باشد پیدا کنید به طوری که تهران روی یک ضلع آن و مشهد روی ضلع دیگر آن باشد.



صفحه 130

۱- با فرض این که نقطه‌ی $A = (1, 0)$ به اندازه‌ی θ حول مبدأ مختصات دوران کند، نقاط حاصل از دوران به ازای مقادیر داده شده‌ی θ را به دست آورید.

الف) -81° درجه ب) -13π ج) $\frac{11\pi}{2}$

۲- با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی همه‌ی مقادیری از θ بین 0° و 2π به طوری که $\cos \theta = \frac{1}{4}$ می‌باشد را بیابید.



صفحه 131

۱- مقادیر دقیق عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$$\cos \frac{7\pi}{4} \text{ و } \sin 135^\circ \text{ و } \sin \frac{3\pi}{4} \text{ و } \cos 300^\circ \text{ و } \tan \frac{11\pi}{6}$$

۲- الف) اگر $\cos \theta = \frac{2}{5}$ باشد دو مقدار ممکن برای $\sin \theta$ بیابید.
 ب) با رسم شکل، مختصات فوق را روی شکل نشان دهید.

۳- اگر زاویه θ در موقعیت استاندارد باشد به طوری که نقطه‌ی انتهایی کمان θ دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ قطع کند مقادیر $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ را در نقطه‌ی فوق حساب کنید.

۴- با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی همه‌ی مقادیری از θ بین $0^\circ, 2\pi$ را بیابید به طوری که روابط زیر برقرار باشد:

$$\text{الف) } \sin \theta = \frac{1}{2} \quad \text{ب) } \tan \theta = -\sqrt{3} \quad \text{ج) } \cos \theta = 0$$

۵- اگر از نقطه‌ی $(1, 0)$ روی دایره‌ی مثلثاتی شروع به حرکت کنیم به اندازه‌ی 2π واحد فاصله را کلی می‌بینیم و می‌رسیم به جایی که ما حرکت را شروع کردیم. اگر حرکت را برای بار دوم ادامه دهیم همه‌ی مقادیر (x, y) ای که در دور اول به آن رسیدیم، مجدداً به آن می‌رسیم. با استفاده از بحث بالا مقادیر هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$$\begin{array}{ll} \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) & \cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) \\ \sin(2\pi - \frac{\pi}{4}) & \cos(2\pi + \frac{2\pi}{3}) \end{array}$$

۶- دو مقدار از θ بین $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{-\pi}{4}$ پیدا کنید به طوری که: $\cos \theta = \frac{1}{4}$ باشد.

۷- فرض کنیم: $\sin \theta = -\frac{1}{4}$

الف) دو مقدار از θ بین 2π و 0 پیدا کنید به طوری که رابطه‌ی فوق درست باشد.
ب) دو مقدار منفی از θ مشخص کنید که معادله‌ی فوق درست باشد.

۸- چهار مقدار از θ بین 2π و -2π پیدا کنید به طوری که $\cos \theta = \sin \theta$ باشد و به ازای مقادیر θ به دست آمده از بالا $\tan \theta$ را به دست آورید.



صفحه 132

مقادیر سینوس و کسینوس زوایای $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{6}$ را به دست آورید.



صفحه 133

رابطه‌ی بین $\cos \theta$ و $\sin(\theta + 90^\circ)$ همچنین رابطه‌ی $\sin \theta$ و $\cos(\theta + 90^\circ)$ را با استفاده از فعالیت بالا بنویسید.



صفحه 134

۱- با استفاده از پرگار و نقاله دایره مثلثاتی رسم نموده و به ازای یک زاویه دلخواه x روابط بالا را آزمایش کنید.

۲- روابط فوق را برای تانژانت هر زاویه دلخواه بررسی کنید.

۳- مقدار $4 \sin(2x + \pi)$ را به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ به دست آورید.



صفحه 135

۱- روابط فوق را برای تانژانت θ به دست آورید.

۲- مقادیر $\cos(\theta - 180^\circ)$ و $\sin(\theta - 180^\circ)$ را به دست آورید.



صفحه 136

۱- مقادیر هر یک از عبارت‌های زیر را به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ به دست آورید.

$$y = 4 - \frac{2}{3} \sin(3x - \pi) \quad \text{الف)}$$

$$y = -1 + \frac{3}{4} \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ب)}$$

۲- به ازای مقادیر مشخص شده مقادیر y متناظر آن را به دست آورده و سپس (x, y) را به صورت یک جفت مرتب بنویسید.

۳- عبارت $\cos 4 = \cos(-4)$ درست یا نادرست است؟ با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی جوابتان را بررسی کنید. (زوایای فوق بر حسب رادیان هستند.)

۴- اگر $\sin \theta = 0.4$ باشد (θ بر حسب درجه است) بدون ماشین حساب مقادیر $\sin(-\theta)$, $\sin(180^\circ - \theta)$ را به دست آورید.

۵- اگر $\cos \theta = 0/2$ باشد (θ بر حسب رادیان) بدون ماشین حساب مقادیر $\cos(\pi + \theta)$, $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ را به دست آورید.

۶- اگر عبارت‌های زیر درست است دلیل درستی و اگر نادرست است با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی دلیل نادرستی آن‌ها را بیان کنید.

$$\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6}$$

۷- با ارایه‌ی مثالی نشان دهید رابطه‌ی زیر همواره درست نیست.

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \pi - \sin \theta$$

۸- به ازای هر مقدار θ ثابت کنید $\cos \theta + \cos(\pi - \theta) = 0$



صفحه 146

۱- با استفاده از جداول دو فعالیت بالا توابع $y = \sin 2x$ و $y = 2 \sin x$ را از نظر حداقلی و حداکثری و نیز دوره‌ی تناوب مقایسه کنید.

۲- درستی جملات زیر را در یک دوره‌ی تناوب از صفر تا 2π بررسی کنید:

الف) تابع $y = \sin ax$ ($a \neq 0$) در $x = \frac{\pi}{2a}$ حداکثر و در $x = \frac{3\pi}{2a}$ حداقل مقدار را دارد.

ب) تابع $y = \cos ax$ ($a \neq 0$) در $x = \frac{2\pi}{a}$ حداکثر و در $x = \frac{\pi}{a}$ حداقل مقدار را دارد.



صفحه 147

۱- الف) جدول زیر را کامل کنید:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin -x$	0	-0.5			-1												
$-2 \sin -x$	0	-1			-2												

ب) نمودار $y = \sin(-x)$ و $y = 2 \sin(-x)$ را رسم کنید.

۲- نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = -2 \sin \frac{1}{3}x$

ب) $y = -3 \cos \frac{1}{3}x$

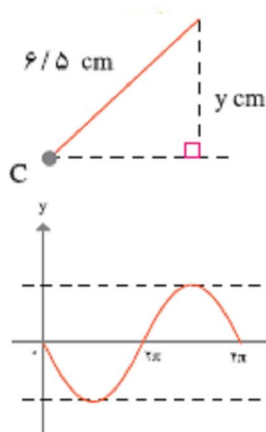
۳- با استفاده از تعیین مقادیر حداقلی و حداکثری و نیز دوره‌ی تناوب توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = 3 \sin 2x$

ب) $y = \cos \frac{1}{3}x$

ج) $y = -2 \cos \frac{\pi}{3}x$

۴- طول عقربه‌ی دقیقه‌ شمار یک ساعت $6/5$ cm است. عقربه با جهت محور افقی زاویه‌ی θ



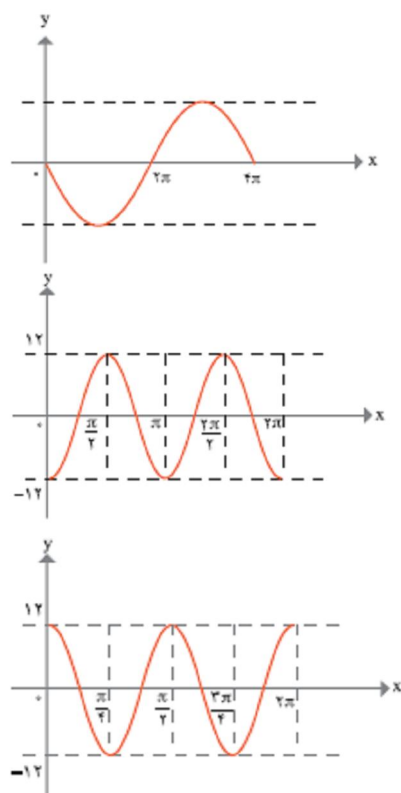
می‌سازد. با توجه به مثلث مقابل می‌بینید که $y = 6/5 \sin \theta$ نمودار ارتفاع را بر حسب زاویه مشاهده می‌کنید.

الف) حداکثر ارتفاع نوک عقربه چه قدر است؟

ب) حداقل ارتفاع آن را محاسبه کنید. در کدام زوایا ارتفاع صفر است؟

ج) طول عقربه‌ی ساعت شمار 5 cm و ارتفاع عمودی نوک آن از محور افقی زاویه‌ای به معادله‌ی $y = 5 \sin x$ است، نمودار تابع y را در این حالت رسم کنید.

۵- معادله‌ی هر یک از منحنی‌های زیر را به صورت $y = a \sin bx$ یا $y = a \cos bx$ که در آن x بر حسب رادیان باشد را بیان کنید.

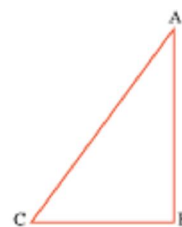


صفحه 150



۱- مسئله‌ی امداد و نجات را با استفاده از رابطه‌ی کسینوس‌ها حل کنید.

۱-۱) در مثلث ABC ، $AB = 8$ ، $AC = 10$ ، $\cos A = \frac{1}{8}$ ، مقدار BC را پیدا کنید.



۲-

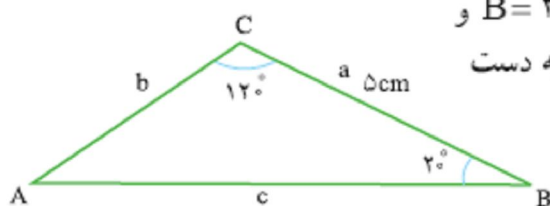
الف) رابطه‌ی کسینوس‌ها را برای یک مثلث قائم‌الزاویه بنویسید.
 ب) گزاره‌ی «رابطه‌ی کسینوس‌ها تعمیم رابطه‌ی فیثاغورث است» به نظر شما معنای تعمیم در این جا چیست؟

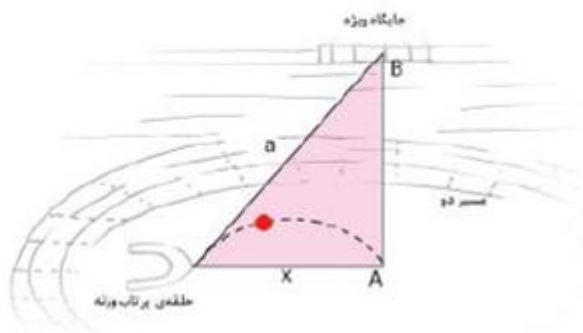
صفحه 152

در مثلث ABC ، اگر $AB = 14$ سانتی‌متر و $BC = 9$ سانتی‌متر و $\angle B = 30^\circ$ باشد مساحت مثلث را حساب کنید.

صفحه 152

۱- مثلث مقابل را در نظر بگیرید. اگر $B = 20^\circ$ و $C = 120^\circ$ و $a = 5\text{cm}$ باشد، مقادیر b و c را به دست آورید.





۲- با توجه به شکل مقابل در صورتی که $a=562$ متر و $B=32^\circ$ و $A=90^\circ$ باشد فاصله x را حساب کنید.

۳- اگر همان مسئله امداد و نجات را در نظر بگیرید فاصله در آن مسئله قبل دو زاویه A و دو طول AB و AC را داشت و با توجه به فرمول:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2ABAC \cos A$$

آن را حل نمود. اگر او به جای زاویه A تنها زاویه B را داشت چگونه می توانست مسئله را حل نماید؟

صفحه 153



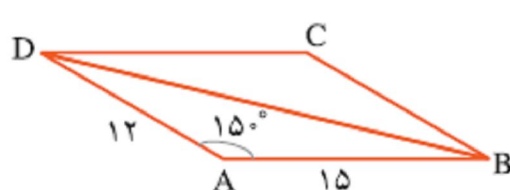
۱- محیط زمین کشاورزی که به شکل مثلث است را به دست آورید که یک ضلع آن ۴۵ کیلومتر و ضلع دیگر آن ۴۰ کیلومتر و زاویه بین آن ها 15° درجه باشد.

۲- طول قطر یک پنج ضلعی منتظم که یک ضلع آن به طول 10 می باشد را پیدا کنید.

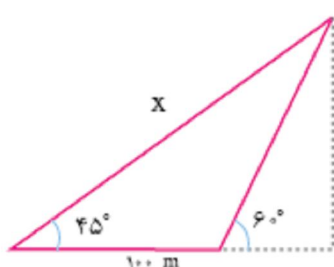
۳- سُرسره‌های یک پارک را در نظر بگیرید که نردبانی به طول $5/2$ متر جهت بالا رفتن دارد اگر طول سرسره $5/4$ متر باشد و نردبان زاویه‌ی 75 درجه با زمین بسازد، سینوس زاویه‌ای که سرسره با زمین می‌سازد را حساب کنید.

۴- قطرهای یک متوازی الاضلاع 12 و 22 سانتی‌متر است و تقاطع این دو یک زاویه‌ی 125° می‌سازد. طول اضلاع بزرگ‌تر متوازی الاضلاع را به دست آورید.

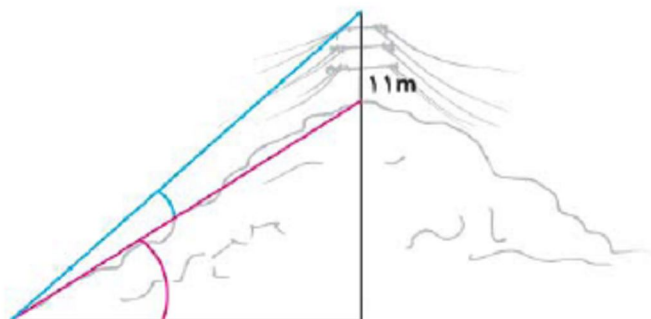
۵- باغی به شکل ذوزنقه وجود دارد که طول‌های اضلاع موازی آن 30° ، 2 کیلومتر و دو ضلع دیگر هر یک 10 کیلومتر است. اگر یکی از زوایای پایه 60° باشد مساحت باغ را حساب کنید.



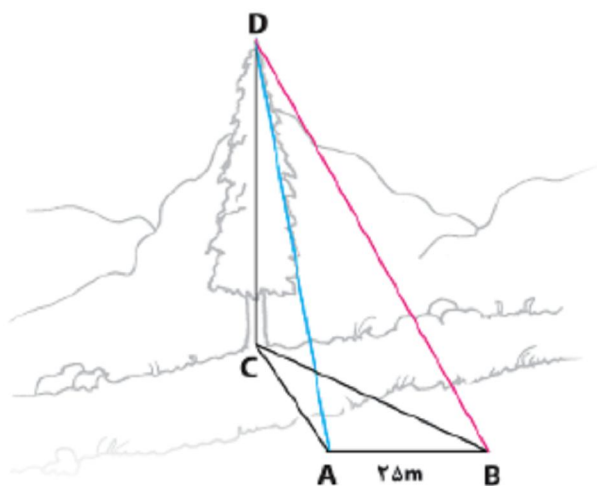
۶- اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع دارای اندازه‌های 12 و 15 است. اندازه‌ی یک زاویه‌ی آن 150° است. مساحت متوازی الاضلاع را پیدا کنید.



۷- شخصی نزدیک آنتن یک ایستگاه رادیویی ایستاده است. زاویه‌ی دید شخص که با نوک آنتن می‌سازد 60° است. اگر او 100 متر به عقب برود زاویه‌ای که با نوک آنتن در موقعیت جدید می‌سازد 45° است. ارتفاع آنتن را حساب کنید. (ابتدا مقدار x را پیدا کنید.)



۸- آنتنی به طول ۱۱ متر را بر روی تپه‌ای در نظر بگیرید به گونه‌ای که انتهای آنتن با سطح تپه زاویه‌ی $1/5^\circ$ مطابق شکل می‌سازد، اگر زاویه‌ای که ابتدای آنتن با سطح افقی زمین می‌سازد 25° باشد ارتفاع تپه را حساب کنید.
 $(\sin 25^\circ \approx 0/42)$



۹- رضا می‌خواهد درختی را که در سمت دیگر رودخانه است اندازه‌بگیرد. او روبروی درخت در نقطه‌ی A ایستاده است. زاویه‌ی دید رضا با نوک درخت حدوداً 6° است. او به اندازه‌ی 125° بر می‌گردد و بعد از طی ۲۵ متر به نقطه‌ی B می‌رسد. زاویه‌ی بین مسیر AB و خط BC (C پای درخت است) 45° می‌باشد. ارتفاع درخت را حساب کنید.

۱۰- محمد و جواد در فاصله‌ی ۳ کیلومتری از یک‌دیگر، راکتی که از یک پایگاه موشکی پرتاب شده است را مشاهده می‌کنند. اگر موقعیت محمد به جواد شمال به جنوب باشد به گونه‌ای که محمد راکت را به طرف غرب مشاهده می‌کند که با موقعیت او ۶۵ درجه زاویه دارد و جواد راکت را به طرف غرب مشاهده می‌کند که با موقعیت او ۷۵ درجه زاویه دارد. فاصله‌ی هر یک از آنها تا راکت چه قدر است؟



فصل 6

ماتریسی



صفحه 158

در هریک از ماتریس‌های داده شده سطرها در ستون‌ها را مانند نمونه‌ی زیر مشخص کنید و مرتبه‌ی ماتریس را بنویسید.

مثال: $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ سطر اول سطر دوم ستون اول ستون دوم ستون سوم

$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$ $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $V = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ $Z = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$



صفحه 159

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ هریک از درایه‌های $a_{3,1}$ ، $a_{1,2}$ ، $a_{2,1}$ ، $a_{2,2}$ ، $a_{3,1}$ و $a_{3,2}$ را مشخص کنید.



صفحه 159

۱- مانند مثال‌های بالا شما هم سه مثال از تساوی و عدم تساوی دو ماتریس را بنویسید.

۲- x و y را طوری بیابید که دو ماتریس زیر برابر باشند.

$$\begin{bmatrix} x+5 \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-1 \\ 2+y \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x+5=2x-1 \\ 2y=2+y \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

۳- مقادیر x و y و z را در عبارات زیر به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 2 & x-1 & y+4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+7 & y-2 \\ 0 & 4z+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

صفحه 162



ماتریس $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ماتریس $5A$ و $-3A$ را مشخص کنید.

اگر $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ باشد، قرینه‌ی ماتریس A عبارت است از:

۱- در مثال فوق مجموع ماتریس A و ماتریس قرینه‌اش را به دست آورید.

۲- قرینه‌ی هریک از ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید و سپس مجموع هر ماتریس با قرینه‌اش را به‌دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = [4 \quad 2 \quad 8] \quad H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 5 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

۳- درایه‌های ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و ماتریس $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & p \end{bmatrix}$ را در معادله‌های زیر مشخص کنید.

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} + A = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \quad B + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 7 & \circ & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

۴- معادله‌ی ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

الف) مرتبه‌ی ماتریس B را مشخص کنید.
ب) درایه‌های ماتریس B را معلوم کنید.



صفحه 163

۱- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

الف) حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$A+B, B+C, C+A$$

ب) عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$2A, 3C, 2A+B, B-C$$

ج) آیا رابطه‌ی $A+B=B+A$ برقرار است؟

آیا رابطه‌ی $(A+B)+C=A+(B+C)$ برقرار است؟

آیا این رابطه‌ها برای هر سه ماتریس $A_{m \times n}$ ، $B_{m \times n}$ ، $C_{m \times n}$ برقرار است؟ مثال بزنید.

۲- قرینه‌ی ماتریس‌های داده شده را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

۳- اگر $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ، $Q = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -6 & 4 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$ باشند ماتریس R را طوری بیابید که $P + Q + R = 0$.

۴- در رابطه‌ی زیر x و y را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 2x - 3y \\ x + 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

صفحه 166



۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

۲- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد: $A \times B$ ، $B \times A$ را محاسبه کنید.

نشان دهید: $A \times B \neq B \times A$

صفحه 167



ماتریس‌های A و B و C را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

ماتریس وارون ماتریس A کدام است؟

صفحه 169



۱- به نظر شما شرط وارون‌پذیری ماتریس 2×2 مانند A چیست؟

۲- دستگاه $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -x + y = 4 \end{cases}$ را حل کنید.



صفحه 169

۱- دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \text{ و } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲- وارون هر یک از ماتریس‌های زیر را پیدا کنید.

$$۱) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad ۲) A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

۳- کدام یک از عبارت‌های زیر برقرار نیست؟

الف) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ (فرض کنیم A و B و AB وارون پذیر باشند)

ب) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ (فرض کنیم A و B و $A+B$ وارون پذیر باشند)

۴- مثالی از یک ماتریس 2×2 بزنید که وارون آن با خودش برابر باشد.

۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ در این صورت $(A^{-1})^{-1}$ را پیدا کنید.

۶- مقدار a را به گونه‌ای پیدا کنید که ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & a+1 \\ a-2 & 4 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد.

۷- در هریک از دستگاه‌های دو معادله دو مجهولی زیر ماتریس ضرایب را نوشته و با استفاده از ماتریس معکوس ضرایب جواب دستگاه را به دست آورید.

$$\begin{array}{lll} \text{الف)} \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 2y = 3 \end{cases} & \text{ب)} \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 6x + 4y = 1 \end{cases} & \text{ج)} \begin{cases} -x + y = 7 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases} \end{array}$$

۸- رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$ مفروض است:

ماتریس سمت چپ را به صورت حاصل ضرب ۲ ماتریس بنویسید و مقادیر x و y را به دست آورید.

۹- معادلات زیر را با توجه به محاسبات، در ماتریس‌های مربعی مرتبه‌ی 2×2 حل کنید.

الف) $X + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

فصل 7

ترکیبیات



صفحه 175

۱- بین دو شهر X و Y دو جاده و بین دو شهر Y و Z چهار جاده وجود دارد. به چند طریق می‌توان از شهر X (از طریق Y) به شهر Z رفت؟

۲- محسن قصد دارد تعدادی از دوستان خود را در روز عید قربان دعوت کند، او می‌خواهد ناهار را خود آماده کند. برای این کار در نظر دارد یک غذا و یک سالاد درست کند. اگر او طرز تهیه ۴ نوع غذا و سه نوع سالاد را بداند به چند روش می‌تواند ناهار را آماده کند؟ با استفاده از نمودار درختی نیز به سؤال جواب دهید.

۳- سکه‌ای را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم، ممکن است در هر مرتبه به رو یا پشت به زمین بیافتد. چند حالت مختلف ممکن است رخ بدهد؟ اگر به رو آمدن را با H و به پشت آمدن را با T نشان دهیم کلیه حالت‌ها را با استفاده از نمودار درختی نشان دهید.

۴- قرار است یک آزمون ۳ سؤالی برگزار شود، هر سؤال یک تست چهار گزینه‌ای است با گزینه‌های الف، ب، ج و د. اگر قرار باشد در هر سؤال یک و تنها یک گزینه علامت زده شود به چند طریق مختلف ممکن است پاسخ‌نامه پر شود؟

- | | | | |
|-----|---|---|---|
| الف | ب | ج | د |
| ۱. | | | |
| الف | ب | ج | د |
| ۲. | | | |
| الف | ب | ج | د |
| ۳. | | | |

صفحه 177

مسائل

۱- با استفاده از دو رقم ۲ و ۱ چند عدد ۵ رقمی می توان ساخت؟

- ۲- هر زیرمجموعه از $\{1, 2, \dots, 6\}$ را می توان با یک کد ۶ تایی از ۱ و ۰ نشان داد. ۱، متناظر بودن عضو و ۰ متناظر نبودن است. به عنوان مثال کد 10110 متناظر مجموعه $\{2, 4, 5\}$ است. صفر در جایگاه اول کد یعنی عنصر یک در مجموعه نیست و یک در جایگاه چهارم یعنی ۴ در مجموعه هست و
- الف) کد 110011 متناظر چه زیر مجموعه ای است؟ کد متناظر زیر مجموعه ی تهی چیست؟
- ب) تعداد کدهای ۶ تایی از ۱ و ۰ چند است؟ تعداد زیر مجموعه های $\{1, 2, \dots, 6\}$ چند است؟
- ج) در حالت کلی تعداد زیر مجموعه های $\{1, 2, \dots, n\}$ چند است؟

- ۳- یک عدد سه رقمی را متقارن می نامیم اگر رقم یکان و صدگان آن برابر باشند مانند ۲۳۲. چند عدد سه رقمی متقارن داریم؟

۴- الف) عبارت $(r+s)(t+u+v)$ پس از محاسبه چند جمله دارد؟
 ب) عبارت $(x+y+z)(a+b)(c+d)$ پس از محاسبه چند جمله دارد؟

۵- چند عدد سه رقمی بدون رقم ۸ داریم؟

۶- با استفاده از سه رنگ آبی، قرمز و سبز به چند روش می‌توان خانه‌های شکل زیر را رنگ کرد طوری که خانه‌های مجاور رنگشان متفاوت باشد؟



۷- در سرزمین گج‌های نقاشی a_1, a_2, a_3 از شهر A، b_1, b_2, b_3 از شهر B و c_1, c_2, c_3, c_4 از شهر C برای گردش فضایی با فضایی آلفا ثبت نام کرده‌اند. می‌دانیم a_1 با b_1 ، a_2 با b_2 ، a_3 با c_1 و c_2 سازگار نبوده و نمی‌توانند با هم سوار فضاییما شوند. در ضمن فضاییما ظرفیت ۳ نفر دارد که قرار است از هر شهر یکی سوار بشود. به چند طریق می‌توان سه نفر را رهسپار کرد؟ (راهنمایی: از نمودار درختی استفاده کنید.)



صفحه 179

۱- با توجه به مباحث بالا در مورد واژه‌ی «جایگشت» و دلیل نام‌گذاری آن بحث کنید.

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید :

الف) $\frac{10!}{5!}$

ب) $1! + 2! + 3! + 4!$

ج) $\frac{n!}{(n-1)!}$

۳- حاصل ضرب $11 \times 10 \times 9 \times 8$ را با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

۴- 10 نامه‌ی مختلف را به چند طریق می‌توان در 10 پاکت مختلف قرار داد؟



با استفاده از تنها ۳ رقم صفر و چند نماد فاکتوریل و پرانتز و اعمال ریاضی عدد ۶ را بسازید.



صفحه 181

۱- در مورد معنای $P(n, n)$ بحث کرده و به دو روش نشان دهید $P(n, n) = n!$.

۲- چند رشته‌ی (کلمه‌ی) سه حرفی با حروف متفاوت انگلیسی می‌توان نوشت؟

۳- درون بشقاب‌های یک سیب، یک پرتقال و یک انار گذاشته شده است. اگر از بین ۶ نفر ۳ نفر به طرف بشقاب رفته و هر کدام یک میوه بردارند به چند روش ممکن است ۳ میوه توزیع شده باشند؟

۴- نشان دهید تعداد جایگشت‌های ۵ حرفی از حروف کلمه‌ی Computer که حرف اول بی‌صدا باشد برابر $5P(7, 4)$ است.



صفحه 181

- ۱- تمام جایگشت‌های حروف کلمه‌ی water را در نظر بگیرید.
 الف) تعداد آن‌ها چند تا است؟
 ب) در چند تا دو حرف a و w کنار هم هستند؟
 ج) در چند تا دو حرف a و w کنار هم قرار ندارند؟

- ۲- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی computer که در آن سه حرف o، m، c به صورت com قرار گرفته باشند چند تا است؟

- ۳- چند تابع $1-1$ از مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, \dots\}$ به مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, \dots\}$ قابل تعریف است؟

- ۴- چند عدد ۵ رقمی زوج با ارقام متمایز داریم؟

- ۵- در یک شرکت که ۲۵ عضو دارد قرار است یک رئیس، یک منشی و یک خزانه دار انتخاب شوند اگر هر عضو فقط در حداکثر یکی از این سمت‌ها بتواند باشد به چند طریق می‌توان انتخاب آنها را انجام داد؟

۶- به چند طریق می توان ۴ کتاب مختلف ریاضی و ۳ کتاب مختلف فیزیک را در یک قفسه کنار هم چید طوری که کتاب های فیزیک همگی کنار هم باشند؟

۷- اگر در یک سالن دو ردیف صندلی و هر ردیف ۱۰ صندلی باشد، مشخص کنید به چند طریق ۶ دانش آموز اول دبیرستان، ۳ دانش آموز دوم و ۴ دانش آموز سوم دبیرستان می توانند روی آنها بنشینند طوری که اولی ها در ردیف اول و دومی ها در ردیف دوم باشند؟



آرش، مهدی و حامد سوار بر اسب هستند و می خواهند با هم مسابقه بدهند. به چند طریق ممکن است به خط پایان برسند؟ (امکان هم زمان رسیدن را نیز در نظر داشته باشید!)



صفحه 185

۱- با مراجعه به متن درس بگویید تعداد گزینه‌های خرید سه نوع شیرینی برای زهرا چند تا است؟

۲- در مثال قبل با توجه به فرمول $\binom{n}{k}$ مشخص کنید n و k چه اعدادی هستند؟

۳- تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{الف)}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{ب)}$$

$$۴- \binom{n}{0} = 1 \quad \text{دو دلیل ذکر کنید که}$$

۵- ۱۰ چراغ در یک ردیف قرار دارند. به چند طریق می‌توان ۳ تا از آن‌ها را روشن کرد؟ به چند طریق می‌توان ۷ تا از آن‌ها را روشن کرد؟ مقدار دو پاسخ را با هم مقایسه کنید.

۶- تعداد زیر مجموعه‌های چهار عضوی مجموعه‌ی $A = \{1, 2, \dots, 7\}$ را بیابید. به چند طریق می‌توان ۳ عضو از مجموعه‌ی A حذف کرد؟ دو جواب را مقایسه کنید. چه توضیحی دارید؟

۷- با توجه به دو تمرین قبل یک تساوی برای $\binom{n}{k}$ بیان کنید.



صفحه 186

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

۱- نشان دهید :

۲- از میان ۷ کشتی گیر و ۵ وزنه بردار به چند روش می‌توان ۳ نفر انتخاب کرد که حداقل یک نفر کشتی گیر باشد؟

۳- در یک مسابقه ورزشی، ورزشکارانی از ایران، روسیه، فرانسه، ترکیه و سوریه شرکت کرده‌اند. قرار است برای ارتباط بهتر ورزشکاران با هم تعدادی دیکشنری (فرهنگ لغت) به منظور آشنایی هر ورزشکار با سایر زبان‌ها تهیه شود. چند نوع فرهنگ لازم است؟

۴- تعداد زیرمجموعه‌های زوج عضوی $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$ را بیابید. (مجموعه تهی با صفر عضو، زوج عضوی است.)

۵- هفت نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از بین هفت نقطه انتخاب شده باشد؟

۶- از هر یک از شهرهای بیرجند، بوشهر، سنندج، زاهدان و یزد ۲۰ دانش‌آموز به اردوگاه دانش‌آموزی میرزا کوچک خان دعوت شده‌اند، به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دو به دو غیر هم‌شهری هستند انتخاب کرد؟