جبرخطی کاربردی

درس۱

مقدمه ای بر بردارها و ماتریس ها

گروه سیستم و کنترل - ۱۳۸۸

مدرس: صدقی زاده

جبر خطی کاربردی

- جبر خطی شاخه ای از ریاضیات است که کاربردهای وسیعی در علوم تجربی، علوم اجتماعی و مهندسی دارد و کانون توجه آن بیشتر بر موارد زیر است،

- بردارها و ماتریس ها
- دستگاه معادلات خطی
- فضاهای برداری
- مقادیر ویژه و مقادیر منفرد

برخی از زمینه های کاربردی جبر خطی

- تئوری کد گذاری و تشخیص خطا
- رمزنگاری
- پردازش تصویر و فشرده سازی داده های تصویری
- شبکه ترافیک
- برنامه ریزی خطی
- مدلسازی سیستم های فیزیکی (مدارهای الکتریکی، مکانیکی، حرارتی و . . .)
- چهره شناسی و تشخیص هویت
- تخمین و شناسایی داده ها
- ژنتیک، مسائل اجتماعی، اقتصادی و . . . . .

بردارها و ماتریس ها

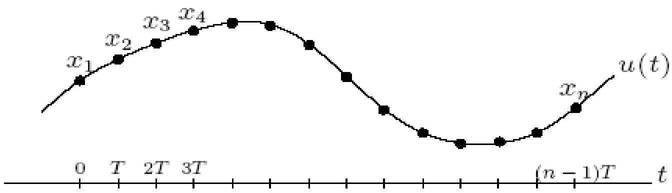
- آرایه ای از داده های مرتب شده را بردار گویند.

$$\boxed{\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}}$$

- اگر داده های به هم مرتبط را با ابعاد $m\times n$ ذخیره نماییم ماتریس بدست می آید.

$$\boxed{A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}}$$

- عناصر یک بردار یا ماتریس می تواند اطلاعاتی به شرح زیر باشد،
  - داده های آماری یک سیستم اجتماعی
  - پارامترهای توصیف کننده یک سیستم فیزیکی
  - داده های نمونه برداری شده یک سیگنال الکتریکی



سیگنال $u(t)$ پس از نمونه برداری با دوره تناوب T می توان بصورت یک بردار n تایی نمایش داد،

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u(0) \\ u(T) \\ \vdots \\ u((n-1)T) \end{bmatrix}$$

قوانین و تعاریف حاکم بر بردارها و ماتریس ها

- جمع و تفریق بردار و ماتریس
- ضرب اسکالر در بردارها و ماتریس ها
- ضرب داخلی بردارها و ضرب ماتریس ها
- دترمینان ماتریس ها
- محاسبه ماتریس معکوس
- ترکیب خطی بردارها
- نُرم بردارها و ماتریس ها

قوانین حاکم بر بردارها و ماتریس ها

– جمع و تفریق بردار و ماتریس

$$\mathbf{x}\pm\mathbf{y}=\begin{bmatrix} x_1\pm y_1 \\ x_2\pm y_2 \\ \vdots \\ x_n\pm y_n \end{bmatrix}, \qquad A\pm B=\begin{bmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 2j \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} 0 \\ -j \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}+\mathbf{y}=\begin{bmatrix} -5 \\ 6-j \\ 1+2j \end{bmatrix}$$

قوانین حاکم بر بردارها و ماتریس ها

– ضرب اسکالر در بردار و ماتریس

$$k\mathbf{x}=\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix}, \qquad kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad 2A=\begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 & -2 \\ 6 & 2 & 10 & 4 \\ -2 & 0 & 14 & 12 \end{bmatrix}$$

- ترکیب خطی بردارها (Linear Combination)

- بردار $\mathbf{u}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ می باشد،

اگر $\exists c_1, c_2, \ldots, c_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n}$

مثال

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u} = -3\mathbf{x} + 2\mathbf{y} + 5\mathbf{z}$$

مثال

در هر یک از سه حالت زیر بررسی نمایید، که آیا می توان بردار $\mathbf{u}$ را بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ نوشت.

برای این منظور در هر سه حالت باید معادله $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ را نوشته و حل کرد.

$\boxed{1. \quad \mathbf{u} = (-12,20), \quad \mathbf{v}_1 = (-1,2), \quad \mathbf{v}_2 = (4,-6)}$

معادله $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ بصورت زیر خواهد شد،

$$(-12,20) = c_1(-1,2) + c_2(4,-6) \rightarrow \begin{aligned} -c_1 + 4c_2 &= -12 \\ 2c_1 - 6c_2 &= 20 \end{aligned} \rightarrow \quad c_1 = 4, \quad c_2 = -2$$

بنابراین بردار $\mathbf{u}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ می باشد و می توان آن را بصورت $\mathbf{u} = 4\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$ نوشت.

$\boxed{2. \quad \mathbf{u} = (4,20), \quad \mathbf{v}_1 = (2,10), \quad \mathbf{v}_2 = (-3,-15)}$

معادلات به شکل می باشند،

$$(4,20) = c_1(2,10) + c_2(-3,-15) \rightarrow \begin{aligned} 2c_1 - 3c_2 &= 4 \\ 10c_1 - 15c_2 &= 20 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad c_1 = 2 + \frac{3}{2}c_2$$

در این حالت نیز بردار $\mathbf{u}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ می باشد، ولی برخلاف حالت قبل فقط یک جواب وجود ندارد و بینهایت ترکیب خطی مختلف می توان بدست آورد.

$3.\quad \mathbf{u}=(1,-4),\quad \mathbf{v}_1=(2,10),\quad \mathbf{v}_2=(-3,-15)$

در این حالت معادلات به شکل زیر خواهند بود،

$$(1,-4)=c_1(2,10)+c_2(-3,-15)\rightarrow \begin{array}{l} 2c_1-3c_2=1 \\ 10c_1-15c_2=-4 \end{array}$$

همانطور که از معادلات بالا مشاهده می شود، جوابی برای c_1 و c_2 وجود ندارد. بنابراین بردار $\mathbf{u}$ را نمی توان بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ نوشت.

قوانین حاکم بر بردارها و ماتریس ها

- ضرب داخلی بردارها

- ضرب داخلی یک بردار، قاعده ای است که به دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ یک کمیت اسکالر را نسبت می دهد،

ضرب داخلی دو بردار $\boxed{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle} \rightarrow$ برای بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$

- شرایط زیر را دارا باشد،

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\overline{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle} \\ 2. & \langle c\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\bar{c}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\langle \mathbf{u},\bar{c}\mathbf{v}\rangle \\ 3. & \langle \mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}+\mathbf{s}\rangle=\langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle+\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle+\langle \mathbf{u},\mathbf{s}\rangle+\langle \mathbf{v},\mathbf{s}\rangle \\ 4. & \forall \mathbf{u}\neq \mathbf{0}\rightarrow \qquad \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle>0 \end{array}}$$

تعریف ضرب داخلی

- ضرب داخلی دو بردار مختلط **u** و **v** بصورت زیر تعریف می شود،

$$\boxed{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2 + \cdots + \bar{u}_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i v_i}$$

مثال

ضرب داخلی بردارهای **u** و **v** را بدست آورید.

$$\mathbf{u} = [2 + j3, 3 + j, 4], \qquad \mathbf{v} = [4 - j6, 3, 3 + j2]$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \overline{(2 + j3)}(4 - j6) + \overline{(3 + j)}(3) + \overline{(4)}(3 + j2) \\
&= (2 - j3)(4 - j6) + (3 - j)(3) + (4)(3 + j2) \\
&= (-10 - j24) + (9 - j3) + (12 + j8) \\
&= 11 - j19
\end{aligned}$$

- محاسبه در نرم افزار MATLAB برای دو بردار ستونی،

محاسبه ضرب داخلی $\rightarrow$ u'*v

قوانین حاکم بر بردارها و ماتریس ها

- **ضرب ماتریس ها**

- فرض کنید $A_{n\times m} = \left[a_{ij}\right]$ و $B_{m\times r} = \left[b_{jk}\right]$ باشد،

$$A_{n\times m} \times B_{m\times r} = C_{n\times r} = \left[c_{ik}\right] \quad \rightarrow \quad \boxed{c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}}$$

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (2\times1)+(4\times2)+(3\times0)+(-1\times3) & (2\times4)+(4\times3)+(3\times-2)+(-1\times1) \\ (3\times1)+(1\times2)+(5\times0)+(2\times3) & (3\times4)+(1\times3)+(5\times-2)+(2\times1) \\ (-1\times1)+(0\times2)+(7\times0)+(6\times3) & (-1\times4)+(0\times3)+(7\times-2)+(6\times1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 11 & 7 \\ 17 & -12 \end{bmatrix}$$

حاصلضرب BA امکان پذیر نیست.

قوانین حاکم بر بردارها و ماتریس ها

– نُرم یک بردار (Vector Norm)

- نُرم یک بردار به تعبیری اندازه یا طول آن بردار می باشد،

نُرم بردار $\boxed{\|\mathbf{u}\|} \leftarrow \mathbf{u}$ برای هر بردار

- شرایط زیر را دارا باشد،

$$
\begin{array}{ll}
1. & \|\mathbf{u}\| > 0, \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \\
2. & \|\mathbf{u}\| = 0, \quad if \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \\
3. & \|k\mathbf{u}\| = |k|\,\|\mathbf{u}\| \\
4. & \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \longrightarrow \text{نامساوی مثلثاتی} \\
5. & |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \longrightarrow \text{نامساوی کوشی- شوارتز}
\end{array}
$$

یک نُرم کاربردی ← نُرم اقلیدُسی بردار

- نُرم اقلیدُسی یک بردار بصورت ریشه دوم نامنفی $\langle \mathbf{u},\mathbf{u} \rangle$ تعریف می شود،

$$\boxed{\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u},\mathbf{u} \rangle^{1/2} = \left(\mathbf{u}^*\mathbf{u}\right)^{1/2} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2}}$$

مثال

نُرم بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را بدست آورید.

$$\mathbf{u} = [\,j2,\ -1,\ 3+j\,], \qquad \mathbf{v} = [4,\ -1,\ 2,\ 0]$$

با توجه به رابطه بالا داریم،

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{|j2|^2 + |-1|^2 + |3+j|^2} = \sqrt{4+1+10} = \sqrt{15}$$

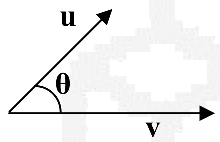
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|4|^2 + |-1|^2 + |2|^2 + |0|^2} = \sqrt{16+1+4+0} = \sqrt{21}$$

- محاسبه در نرم افزار MATLAB

norm(x) ← محاسبه نُرم اقلیدُسی ← sqrt(x'*x)

تعبیر هندسی ضرب داخلی و نُرم بردارها

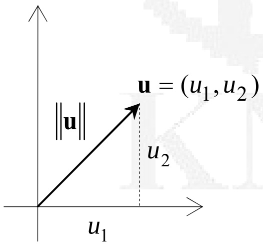
- ضرب داخلی دو بردار عددی است که به اندازه بردارها و زاویه بین آنها مربوط است،



$$\boxed{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|\;\|\mathbf{v}\|\cos\theta}$$

اگر $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0 \;\rightarrow$ متعامد (orthogonal) و اگر $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1 \rightarrow$ یکامتعامد (orthonormal)

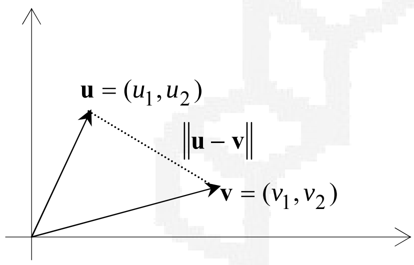
- کمیت $\|\mathbf{u}\|^2$ بصورت توان دوم فاصله مبدأ تا نقطه نشان داده شده با بردار **u** تعبیر می گردد.



$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2$$

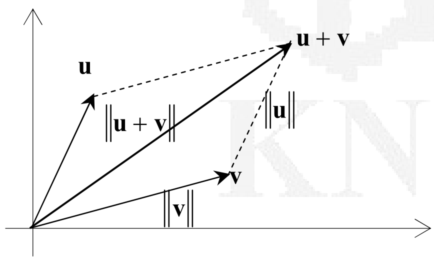
تعبیر هندسی نُرم بردارها

- برای دو بردار حقیقی **u** و **v** فاصله بین دو بردار بصورت زیر تعریف می گردد،



$$\|\mathbf{u}\text{-}\mathbf{v}\| = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2}$$

- تعبیر هندسی برای نامساوی مثلثاتی بصورت زیر می باشد،



$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

مثال

بردارهای زیر را در نظر بگیرید،

$$S:\left\{\mathbf{v}_1=[2,0,-1],\quad \mathbf{v}_2=[0,-1,0],\quad \mathbf{v}_3=[2,0,4]\right\}$$

الف) متعامد و یکامتعامد بودن بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را بررسی کنید.

برای متعامد بودن ضرب داخلی دو به دوی این بردارها را محاسبه می کنیم،

$$\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle=(2)(0)+(0)(-1)+(-1)(0)=0$$
$$\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3\rangle=(2)(2)+(0)(0)+(-1)(4)=0$$
$$\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\rangle=(0)(2)+(-1)(0)+(0)(4)=0$$

بنابراین مجموعه S یک مجموعه متعامد می باشد. برای بررسی یکامتعامد بودن، نُرم بردارها را محاسبه می کنیم.

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{(2)^2+(0)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$
$$\|\mathbf{v}_2\|=\sqrt{(0)^2+(-1)^2+(0)^2}=1$$
$$\|\mathbf{v}_3\|=\sqrt{(2)^2+(0)^2+(4)^2}=2\sqrt{5}$$

از آنجائیکه نُرم تمامی بردارها برابر یک نمی باشد، پس مجموعه S یک مجموعه یکامتعامد نیست.

ب) بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را به بردارهای یکامتعامد تبدیل کنید.

برای این منظور باید بردارها را به نحوی تبدیل کنیم که نرم آنها برابر یک گردد. اگر هر یک از بردارها را به نُرم خودش تقسیم کنیم چنین هدفی بدست می آید،

$$\mathbf{u}_1=\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$
$$\mathbf{u}_2=\frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2=\frac{1}{1}(0,-1,0)=(0,-1,0)$$
$$\mathbf{u}_3=\frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3=\frac{1}{2\sqrt{5}}(2,0,4)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

حال می توان براحتی نشان داد که بردارهای جدید $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ یکامتعامد هستند،

$$\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle=\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3\rangle=\langle \mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\rangle=0$$
$$\|\mathbf{u}_1\|=\|\mathbf{u}_2\|=\|\mathbf{u}_3\|=1$$

- نُرم ماتریس ها (Matrix Norm)

- نُرم یک ماتریس حداکثر بزرگنمایی یا بهره آن را تحت چنین تبدیلی نشان می دهد،

$$\mathbf{x} \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow A\mathbf{x}$$

نسبت $\|A\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ را می توان به عنوان بهره یا بزرگنمایی اپراتور $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ در جهت بردار $\mathbf{x}$ تعریف کرد،

$$gain(\mathbf{x}) = \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

نُرم یک ماتریس را بصورت بزرگترین بهره قابل دسترسی تعریف می گردد،

$$\boxed{\|A\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} gain(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}}$$

خواص نُرم ماتریس ها

- نُرم یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای خواص زیر است،

1. $\|A\| = \|A^*\|, \qquad \|A\| = \|A^T\|$
2. $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$
3. $\|AB\| \le \|A\| \; \|B\|$
4. $\|A\mathbf{x}\| \le \|A\| \; \|\mathbf{x}\|$
5. $\|kA\| = |k| \; \|A\|$
6. $\|A\| \ge 0 \quad , \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}$

- در نرم افزار MATLAB دستور norm(A) برای محاسبه نُرم ماتریس وجود دارد.

مثال

به مثال های زیر توجه نمایید،

$$1.\qquad A=0\rightarrow A\mathbf{x}=0 \quad\rightarrow\quad \|A\|=\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}=\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\frac{0}{\|\mathbf{x}\|}=0$$

$$2.\qquad A=I\rightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{x} \quad\rightarrow\quad \|A\|=\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}=\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}=1$$

$$3.\qquad A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\rightarrow A\mathbf{x}=[x_2,-x_3,x_1]$$

$$\|A\mathbf{x}\|=\sqrt{x_2^2+x_3^2+x_1^2}\rightarrow\|A\|=1$$

$$4.\qquad A=\begin{bmatrix}\alpha_1&0&\cdots&0\\0&\alpha_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\alpha_n\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad A\mathbf{x}=[\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\ldots,\alpha_nx_n]$$

$$\|A\|=\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}=\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\frac{\sqrt{\alpha_1^2x_1^2+\alpha_2^2x_2^2+\cdots+\alpha_n^2x_n^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}=\max\{|\alpha_1|,|\alpha_2|,\ldots,|\alpha_n|\}$$

برای اثبات فرض کنید داریم،

$$\alpha_1^2\geq\alpha_2^2\geq\cdots\geq\alpha_n^2\qquad\Rightarrow\qquad|\alpha_1|=\max_i\{|\alpha_i|\}$$

از آنجاییکه $\mathbf{x}\neq 0$ است، می توان نوشت،

$$\alpha_1^2x_1^2+\alpha_2^2x_2^2+\cdots+\alpha_n^2x_n^2\leq\alpha_1^2(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$$

$$\sqrt{\alpha_1^2x_1^2+\alpha_2^2x_2^2+\cdots+\alpha_n^2x_n^2}\leq|\alpha_1|\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha_1^2x_1^2+\alpha_2^2x_2^2+\cdots+\alpha_n^2x_n^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}\leq|\alpha_1|$$

بنابراین داریم،

$$\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\sqrt{\alpha_1^2x_1^2+\alpha_2^2x_2^2+\cdots+\alpha_n^2x_n^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}\right\}=|\alpha_1|\rightarrow\|A\|=\max\{|\alpha_1|,|\alpha_2|,\ldots,|\alpha_n|\}$$

دترمینان ماتریس ها

برای هر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ عددی را به عنوان دترمینان (Determinant) می توان نسبت داد،

$$\boxed{\det(A)=|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})}$$

A_{ij} یک ماتریس مربعی $(n-1)\times(n-1)$ است که از حذف سطر iام و ستون jام در ماتریس $A_{n\times n}$ بدست می آید.

- دستور det(A) در نرم افزار MATLAB وجود دارد.

خواص دترمینان

۱- با تعویض جای دو سطر (یا دو ستون) دترمینان، تنها علامت دترمینان تغییر می کند.

۲- اگر یک سطر(یا یک ستون) دترمینان را با یک سطر(یا یک ستون) دیگر جمع کنیم مقدار دترمینان تغییر نمی کند.

۳- اگر یک ماتریس دو سطر(یا دو ستون) یکسان داشته باشد، آنگاه دترمینان آن صفر است.

۴- برای دو ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ داریم،

$$\boxed{|AB|=|A||B|=|BA|}$$

۵- اگر در یک ماتریس یک سطر (یا یک ستون) در یک عدد اسکالر k ضرب شود، آنگاه دترمینان آن ماتریس در k ضرب می شود.

۶- اگر تمامی درایه های یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ در عدد اسکالر k ضرب شوند، آنگاه دترمینان آن ماتریس در k^n ضرب خواهد شد.

$$\boxed{|kA|=k^n|A|}$$

ماتریس های منفرد، غیر منفرد و ماتریس معکوس

- برای ماتریس مربعی $A_{n\times n}$

$$\exists\, B_{n\times n} \quad \rightarrow \quad \boxed{AB = BA = I} \quad \Rightarrow$$ $A_{n\times n}$ غیر منفرد (Nonsingular) یا نا ویژه

$$\boxed{A^{-1}}$$

ماتریس معکوس (Inverse Matrix)

- اگر A^{-1} وجود نداشته باشد، ماتریس A را منفرد(Singular) یا ویژه گویند.

- ماتریس معکوس A^{-1} زمانی وجود دارد که $|A| \neq 0$ باشد.

- دستور inv(A) در نرم افزار MATLAB وجود دارد.

نکته۱:

اگر $\underbrace{A_{n\times n}, B_{n\times n}}_{\text{غیر منفرد}} \quad \Rightarrow \quad AB \rightarrow$ غیر منفرد $\rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

نکته۲: اگر $k \neq 0$ و $|A| \neq 0$ باشد،

$$\boxed{(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \qquad , \qquad (A^{-1})^{-1} = A}$$

نکته۳: دترمینان ماتریس معکوس A^{-1} همان معکوس دترمینان A است،

$$\boxed{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \rightarrow \quad |AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = 1}$$

نکته۴: اگر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ غیرمنفرد باشد،

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}}$$

نحوه محاسبه معکوس ماتریس های متداول

- برای یک ماتریس غیرمنفرد 2×2،

$$\boxed{A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}a_{22} & (-1)^{1+2}a_{12} \\ (-1)^{2+1}a_{21} & (-1)^{2+2}a_{11}\end{bmatrix}}$$

$adj(A)$ همان ماتریس الحاقی (Adjoint) است، که هر عنصر ترانهاده آن از دترمینان ماتریس متناظر با حذف سطر iام و ستون j ام بدست آمده است.

مثال

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{bmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

برای یک ماتریس غیرمنفرد 3×3،

$$\boxed{A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{bmatrix}}$$

مثال

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix} \rightarrow |A|=1(0-9)-1(0+6)+2(9-0)=3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -9 & 6 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \\ 9 & -5 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 4/3 & 1 \\ 3 & -5/3 & -1\end{bmatrix}$$

روابط کاربردی از ماتریس های بلوکی و دترمینان ها

- برای ماتریس های $A_{n\times n}$، $B_{n\times m}$، $C_{m\times n}$ و $D_{m\times m}$ روابط زیر برقرار هستند،

الف) اگر $|A|\neq 0$ و $|D|\neq 0$ باشند، داریم،

$$\boxed{\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|}$$

ب) اگر $|A|=0$ یا $|D|=0$ یا $|A|=|D|=0$ باشند، داریم،

$$\boxed{\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & D \end{vmatrix} = 0}$$

ج) اگر $|A|\neq 0$ باشد، آنگاه،

$$\boxed{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B|}$$

د) اگر $|D|\neq 0$ باشد، آنگاه،

$$\boxed{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D||A-BD^{-1}C|}$$

ه) اگر $|A|\neq 0$ و $|D|\neq 0$ باشند، داریم،

$$\boxed{\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}}$$

روابط کاربردی از ماتریس های بلوکی و دترمینان ها

برای ماتریس های $A_{n\times m}$ و $B_{m\times n}$ روابط زیر برقرار است،

الف)

$$\boxed{|I_n + AB| = |I_m + BA|}$$

ب) اگر $m=1$ باشد،

$$\boxed{|I_n + AB| = 1 + BA}$$

ج) اگر $|I_n + AB| \neq 0$ باشد،

$$\boxed{(I_n + AB)^{-1} = I_n - A(I_m + BA)^{-1}B}$$

د) برای ماتریس های $A_{n\times n}$، $B_{n\times m}$، $C_{m\times n}$ و $D_{m\times m}$ با فرض اینکه معکوس های نشان داده شده وجود دارند، لم معکوس سازی ماتریس (Matrix Inversion Lemma) بصورت زیر برقرار است،

$$\boxed{(A+BDC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}}$$

اثبات: ابتدا طرفین معادله را در $(A+BDC)$ ضرب می کنیم،

$$(A+BDC)(A+BDC)^{-1} = (A+BDC)[A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}]$$

در اینصورت داریم،

$$\begin{aligned}
I &= (A+BDC)A^{-1} - (A+BDC)A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\
&= I + BDCA^{-1} - (B + BDCA^{-1}B)(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\
&= I + BDCA^{-1} - BD(D^{-1} + CA^{-1}B)(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\
&= I + BDCA^{-1} - BDCA^{-1} = I
\end{aligned}$$

معرفی چند ماتریس خاص

- ماتریس مختلط (Complex): ماتریسی است که همه یا برخی از عناصر آن اعداد مختلط باشند.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ -1+j & -1 & -2+3j\\ -1+4j & 3-3j & -2\end{bmatrix}$$

- ماتریس مختلط مزدوج (Complex Conjugated): درایه های آن مزدوج مختلط درایه های متناظر در ماتریس مختلط A باشد.

$$\boxed{\overline{A}=[\overline{a}_{ij}]} \quad \rightarrow \quad \overline{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ -1-j & -1 & -2-3j\\ -1-4j & 3+3j & -2\end{bmatrix}$$

معرفی چند ماتریس خاص

- ماتریس ترانهاده (Transposed):

$$\boxed{A^T=[a_{ji}]} \quad \rightarrow \quad A^T=\begin{bmatrix}0 & -1+j & -1+4j\\ 1 & -1 & 3-3j\\ 3 & -2+3j & -2\end{bmatrix}$$

- عملگر '. در نرم افزار MATLAB وجود دارد. ← A .'

- ماتریس ترانهاده مزدوج (Conjugate Transposed): مزدوج ترانهاده یک ماتریس است.

$$\boxed{A^*=\overline{A}^T=[\overline{a}_{ji}]} \quad \rightarrow \quad A^*=\begin{bmatrix}0 & -1-j & -1-4j\\ 1 & -1 & 3+3j\\ 3 & -2-3j & -2\end{bmatrix}$$

- عملگر ' در نرم افزار MATLAB وجود دارد. ← A'

نکته۱: اگر $A \rightarrow$ ماتریس حقیقی $\Rightarrow$ $\boxed{A^T = A^*}$

نکته۲: $\forall A \rightarrow$ $\boxed{(A^*)^* = A}$ و $\boxed{(A^T)^T = A}$

نکته۳: اگر $A+B$ و AB قابل تعریف باشند،

$$\boxed{(A+B)^T = A^T + B^T \quad , \quad (AB)^T = B^T A^T}$$

$$\boxed{(A+B)^* = A^* + B^* \quad , \quad (AB)^* = B^* A^*}$$

نکته۴: اگر $A_{n\times n} \rightarrow$ ماتریس مربعی $\Rightarrow$ $\boxed{|A^*| = |\bar{A}|}$ و $\boxed{|A^T| = |A|}$

نکته۵: اگر $A_{n\times n} \rightarrow$ ماتریس غیرمنفرد $\Rightarrow$ $\boxed{(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*}$ و $\boxed{(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T}$

نکته۶: اگر $c \rightarrow$ عدد مختلط $\Rightarrow$ $\boxed{(cA)^* = \bar{c}A^*}$

معرفی چند ماتریس خاص

- ماتریس متقارن (Symmetric) : ماتریسی است که ترانهاده اش با خودش برابر باشد.

$$\boxed{A = A^T \quad , \quad a_{ij} = a_{ji}} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 3 \\ 11 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

- ماتریس شبه متقارن (Skew-Symmetric): ماتریسی است که با منفی ترانهاده اش برابر باشد،

$$\boxed{A = -A^T \quad , \quad a_{ij} = -a_{ji}} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

نکته۱: اگر $A_{n\times n} \rightarrow$ ماتریس مربعی $\Rightarrow \underbrace{A+A^T}_{\downarrow}$ و $\underbrace{A-A^T}_{\downarrow}$

ماتریس متقارن   ماتریس شبه متقارن

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 5 & 6 & 7\end{bmatrix} \rightarrow \quad A+A^T=\begin{bmatrix}8 & -3 & 8\\ -3 & 0 & 8\\ 8 & 8 & 14\end{bmatrix} \quad , \quad A-A^T=\begin{bmatrix}0 & -3 & -2\\ 3 & 0 & -4\\ 2 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

نکته۲: اگر $A\rightarrow$ ماتریس غیر مربعی $\Rightarrow AA^T, A^TA \rightarrow$ ماتریس متقارن

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -4\\ 9 & 5\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad AA^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 9\\ 2 & 20 & -2\\ 9 & -2 & 106\end{bmatrix}, \quad A^TA=\begin{bmatrix}86 & 37\\ 37 & 41\end{bmatrix}$$

نکته۳: اگر $A_{n\times n} \rightarrow$ ماتریس متقارن و غیرمنفرد $\Rightarrow A^{-1} \rightarrow$ ماتریس متقارن

$$AA^{-1}=I \rightarrow (A^{-1})^T A^T = I^T \xrightarrow[I=I^T]{A=A^T} (A^{-1})^T A = I = A^{-1}A \Rightarrow (A^{-1})^T = A^{-1}$$

معرفی چند ماتریس خاص

- ماتریس هرمیتی (Hermitian): یک ماتریس مختلط که رابطه زیر را برآورده سازد،

$$\boxed{A^* = A \quad , \quad a_{ij}=\bar{a}_{ji}} \qquad A=\begin{bmatrix}-1 & 1-2j & 3\\ 1+2j & 0 & -j\\ 3 & j & 1\end{bmatrix}$$

ماتریس هرمیتی باید مربعی بوده و درایه های قطر اصلی آن صفر یا حقیقی باشند.

ماتریس شبه هرمیتی (Skew-Hermitian): یک ماتریس مختلط که رابطه زیر را برآورده سازد،

$$\boxed{A^* = -A \quad , \quad a_{ij}=-\bar{a}_{ji}} \qquad A=\begin{bmatrix}j & 1+j & 2j\\ -1+j & 5j & 3\\ 2j & -3 & 0\end{bmatrix}$$

ماتریس شبه هرمیتی مربعی بوده و عناصر روی قطر اصلی آن موهومی یا صفر باشند.

نکته۱: اگر $A_{n\times n} \to$ ماتریس هرمیتی $\to A = C + jD \Rightarrow \boxed{C = C^T \qquad , \qquad D = -D^T}$

ماتریس شبه متقارن ماتریس متقارن

ماتریس های حقیقی

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1-2j & 3 \\ 1+2j & 0 & -j \\ 3 & j & 1 \end{bmatrix} \qquad A = C + jD = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته۲: اگر $A_{n\times n} \to$ ماتریس شبه هرمیتی $\to A = C + jD \Rightarrow \boxed{C = -C^T \qquad , \qquad D = D^T}$

ماتریس متقارن ماتریس شبه متقارن

ماتریس های حقیقی

$$A = \begin{bmatrix} j & 1+j & 2j \\ -1+j & 5j & 3 \\ 2j & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = C + jD = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نکته۳: اگر $A_{n\times n} \to$ ماتریس هرمیتی $\Rightarrow |A| \to$ عددی حقیقی

$$\boxed{|A| = |A^*| = |\bar{A}|}$$

نکته۴: اگر $A_{n\times n} \to$ ماتریس هرمیتی $\Rightarrow A^{-1} \to$ ماتریس هرمیتی

$$\boxed{A^{-1} = (A^{-1})^*}$$

نکته۵: $\forall A_{n\times n} \to$ ماتریس مربعی $\Rightarrow A = G + jH$

ماتریس های هرمیتی

$$\boxed{G = \frac{1}{2}(A + A^*) \qquad , \qquad H = \frac{1}{2j}(A - A^*)}$$

معرفی چند ماتریس خاص

- ماتریس یکین (Unitary): ماتریس مختلطی است که در آن معکوس ماتریس برابر با مزدوج ترانهاده آن است.

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{15}}(2+j) & \frac{1}{\sqrt{15}}(3+j)\\ \frac{1}{\sqrt{15}}(-3+j) & \frac{1}{\sqrt{15}}(2-j)\end{bmatrix} \qquad \boxed{A^{-1}=A^{*}}$$

- ماتریس نرمال (Normal): ماتریس مربعی است که با ترانهاده مزدوج خود جابجایی پذیر باشد،

$$A=\begin{bmatrix} j & 0\\ 0 & 3-j5\end{bmatrix}$$

اگر $A\rightarrow$ ماتریس حقیقی $\rightarrow \boxed{AA^{T}=A^{T}A}$

اگر $A\rightarrow$ ماتریس مختلط $\rightarrow \boxed{AA^{*}=A^{*}A}$

نکته۱: اگر $A\rightarrow$ ماتریس یکین $\Rightarrow \boxed{AA^{*}=A^{*}A=I}$

نکته۲: اگر $A\rightarrow$ ماتریس یکین $\Rightarrow \boxed{|\det(A)|=1}$

نکته۳: اگر $A\rightarrow$ ماتریس یکین $\Rightarrow A^{-1}\rightarrow$ ماتریس یکین

$$\boxed{\begin{aligned}(A^{-1})^{*}(A^{-1})&=(A^{*})^{*}(A^{-1})=(A)(A^{-1})=I\\(A^{-1})(A^{-1})^{*}&=(A^{-1})(A^{*})^{*}=(A^{-1})(A)=I\end{aligned}}$$

نکته۴: اگر $A_{n\times n},B_{n\times n}\rightarrow$ ماتریس های یکین $\Rightarrow AB\rightarrow$ ماتریس یکین

$$\boxed{\begin{aligned}(AB)(AB)^{*}&=ABB^{*}A^{*}=AA^{*}=I\\(AB)^{*}(AB)&=B^{*}A^{*}AB=B^{*}B=I\end{aligned}}$$

نکته۵: یک ماتریس نرمال است اگر متقارن حقیقی یا هرمیتی یا شبه متقارن حقیقی یا شبه هرمیتی یا یکین و یا متعامد باشد.

معرفی چند ماتریس خاص

- **ماتریس قطری** (Diagonal): ماتریس مربعی است که تمام درایه های آن به جز عناصر روی قطر اصلی همگی صفر هستند.

$$\boxed{a_{ij}=0 \quad , \quad i\neq j}$$ و $$\boxed{A=diag(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}$$

- **ماتریس بالا مثلثی** (Upper Triangular): ماتریس مربعی است که تمام درایه های زیر قطر اصلی صفر هستند.

$$\boxed{U=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad U_{ij}=\begin{cases} a_{ij} & i\leq j \\ 0 & i>j \end{cases}}$$

- **ماتریس پایین مثلثی** (Lower Triangular): ماتریس مربعی است که تمام درایه های بالای قطر اصلی صفر هستند.

$$\boxed{L=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad L_{ij}=\begin{cases} a_{ij} & i\geq j \\ 0 & i<j \end{cases}}$$

نکته ۱: دترمینان یک ماتریس قطری و مثلثی برابر با حاصلضرب کلیه عناصر قطری می باشد،

$$\boxed{|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}$$

- دستور diag(A) و triu(A) و tril(A) در نرم افزار MATLAB وجود دارد.

معرفی چند ماتریس خاص

- ماتریس های متعامد (Orthogonal): ماتریس متعامد است، اگر حقیقی بوده و رابطه زیر را برآورده سازد،

$$A=\begin{bmatrix}1/3 & -2/3 & 2/3\\ 2/3 & -1/3 & -2/3\\ 2/3 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix} \qquad \boxed{A^T A = AA^T = I}$$

نکته۱: اگر $A \rightarrow$ ماتریس متعامد $\Rightarrow \boxed{|A| = \pm 1} \rightarrow$ غیرمنفرد

نکته۲: اگر $A \rightarrow$ ماتریس متعامد $\Rightarrow \boxed{A^{-1} = A^T}$

نکته۳: اگر $A_{n\times n}, B_{n\times n} \rightarrow$ ماتریس های متعامد $\Rightarrow AB$ و A^T ، A^{-1} ماتریس های متعامد

نکته۴: اگر $A \rightarrow$ ماتریس متعامد $\Rightarrow \boxed{AA^* = A^* A = I} \rightarrow$ یکین

نکته۵: برای ماتریس متعامد A داریم،

$$\boxed{\begin{array}{ll}\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| \quad , & \mathbf{x} \in \Re^n\\ \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \quad , & \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n\end{array}}$$