تابع نمایی

به توابعی مانند $y=۴^x$، $y=۳^{۲x+۱}$، $y=(\frac{۱}{۲})^{x^۲+۳}$ و در حالت کلی $y=a^{f(x)}$ که در آن a (یعنی پایه) عددی مثبت و مخالفِ ۱ و $f(x)$ یک چندجمله‌ای بر حسب x می‌باشد را تابعی نمایی گویند.

مثال ۱ نمودار هر یک از توابع زیر را به‌صورت نقطه‌یابی رسم کرده و دامنه و برد هر یک از آن‌ها را بیابید.

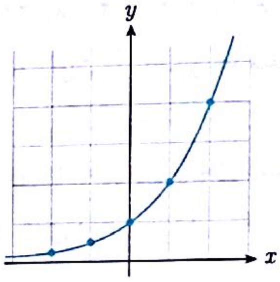
الف) $y=۲^x$ ب) $y=۴^x$ ج) $y=(\frac{۱}{۲})^x$

حل:

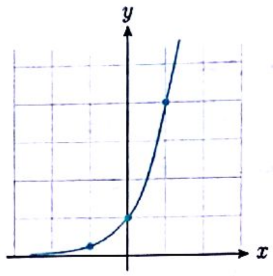
الف) دامنه‌ی تابع مجموعه اعداد حقیقی و برد تابع مجموعه اعداد حقیقی مثبت می‌باشد. (شکل ۴-۱)

ب) دامنه‌ی تابع مجموعه اعداد حقیقی و برد تابع مجموعه اعداد حقیقی مثبت می‌باشد. (شکل ۴-۲)

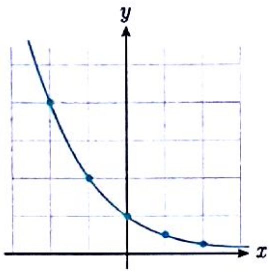
ج) دامنه‌ی تابع مجموعه اعداد حقیقی و برد تابع مجموعه اعداد حقیقی مثبت می‌باشد. (شکل ۴-۳)



شکل ۴-۱



شکل ۴-۲



شکل ۴-۳

مثال ۲ نمودار هر یک از توابع زیر را به روش انتقال رسم کرده و دامنه و برد هر یک از آن‌ها را بیابید.

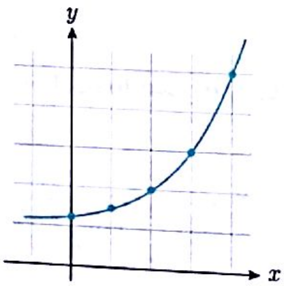
الف) $y=۲^{x-۲}+۱$ ب) $y=۴^{x+۳}+۲$ ج) $y=(\frac{۱}{۲})^{x+۱}-۳$

حل:

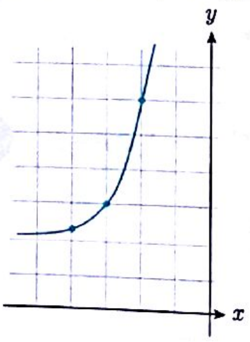
الف) این نمودار همان نمودار $y=۲^x$ است که ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا می‌رود. معلوم است که دامنه‌ی چنین تابعی $\mathbb{R}$ و برد آن $(۱,+\infty)$ می‌باشد. (شکل ۴-۴)

ب) نمودار این تابع همان نمودار تابع $y=۴^x$ می‌باشد که ۳ واحد به چپ و ۲ واحد به بالا رفته است. معلوم است دامنه‌ی چنین تابعی $\mathbb{R}$ و برد آن $(۲,+\infty)$ می‌باشد. (شکل ۴-۵)

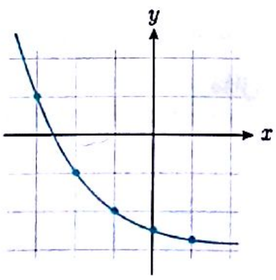
ج) نمودار این تابع نیز همانند نمودار $y=(\frac{۱}{۲})^x$ می‌باشد که ۱ واحد به چپ و ۳ واحد به پایین رفته است. دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $(-۳,+\infty)$ می‌باشد. (شکل ۴-۶)



شکل ۴-۴



شکل ۴-۵



شکل ۴-۶

مثال ۳ **جنسی به ارزش ۱ میلیون تومان در اختیار است و بعد از گذشت هر یک سال ۲۰٪ به ارزش آن افزوده می‌شود.**

الف) **تابع قیمت آن را وقتی که گذشت زمان متغیر مستقل و قیمت متغیر وابسته است را بیابید.**

ب) **بعد از گذشت ۵ سال قیمت آن جنس چقدر خواهد شد؟**

ج) **بعد از گذشت چه زمانی قیمت آن جنس ۱۰ برابر خواهد شد؟**

حل. الف) اگر قیمت جنس را بعد از گذشت t سال y در نظر بگیریم معلوم است که در انتهای سال اول قیمت آن جنس $y_۱ = ۱ + \frac{۲۰}{۱۰۰}$، در انتهای سال دوم قیمت آن جنس $y_۲ = y_۱ + \frac{۲۰}{۱۰۰}y_۱$، در انتهای سال سوم قیمت آن $y_۳ = y_۲ + \frac{۲۰}{۱۰۰}y_۲$ و ... خواهد بود که اگر y_iها را جاگذاری کنید به تابع $y = (۱ + \frac{۲۰}{۱۰۰})^t$ خواهید رسید.

ب) کافی است $f(۵)$ را حساب کنید:

$$f(۵) = (۱ + \frac{۲۰}{۱۰۰})^۵ = (۱/۲)^۵ = ۲/۴۸۸۳۲$$

یعنی در انتهای سال پنجم ارزش آن جنس دو میلیون و چهارصد و هشتاد و هشت هزار و سیصد و بیست تومان خواهد بود.

ج) کافی است معادله‌ی $f(t) = ۱۰$ را حل کنیم.

$$f(t) = ۱۰ \Rightarrow (۱ + \frac{۲۰}{۱۰۰})^t = ۱۰ \Rightarrow (۱/۲)^t = ۱۰$$

فعلاً این معادله را به شیوه‌ی عددگذاری و غیرمعمول حل کنید. اگر t را برابر ۱۲ قرار دهید آن‌گاه $f(۱۲) \simeq ۸/۹۱۶۱$ و اگر t را برابر ۱۳ قرار دهید آن‌گاه $f(۱۳) \simeq ۱۰/۷$ بنابراین بعد از گذشت حدوداً ۱۲ سال و ۹ ماه ارزش آن جنس ۱۰ برابر یعنی ۱۰ میلیون تومان خواهد شد.

لگاریتم

اگر به تابع $y = ۳^x$ توجه کنید، به راحتی می‌توانید ثابت کنید که این تابع یک تابع یک‌به‌یک می‌باشد، بنابراین دارای تابع وارون می‌باشد که برای نوشتن ضابطه‌ی تابع وارون باید x را بر حسب y به‌دست آوریم که با نمادهای معمولی غیرممکن است. نماد جدید به کار رفته برای این منظور **لگاریتم** می‌باشد که به‌صورت $x = \log_۳ y$ نمایش داده می‌شود. عدد ۳ را پایه‌ی لگاریتم گویند. بنابراین

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

باید توجه داشت که در تعریف فوق مبنای لگاریتم؛ یعنی a عددی مثبت و مخالف ۱ است.

مثال ۴ حاصل عبارت $\log_۴ ۶۴$ را بیابید.

حل.

$$x = \log_۴ ۶۴ \Rightarrow ۴^x = ۶۴ \Rightarrow ۴^x = (۴)^۳ \Rightarrow x = ۳$$

مثال ۵ از تساوی $\log_a(۳ - \sqrt{۲}) = -۱$ مقدار a را بیابید.

حل.

$$\log_a(۳ - \sqrt{۲}) = -۱ \Rightarrow (a)^{-۱} = ۳ - \sqrt{۲} \Rightarrow a = \frac{۱}{۳ - \sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{۱}{۳ - \sqrt{۲}} \times \frac{۳ + \sqrt{۲}}{۳ + \sqrt{۲}} \Rightarrow a = \frac{۳ + \sqrt{۲}}{۷}$$

تعیین دامنه و برد توابع لگاریتمی

اگر تابع $y = \log_a x$ را در نظر بگیریم با توجه به مثبت و غیر یک بودن عدد a و با توجه به این‌که معادل تساوی نوشته شده به‌صورت $x = a^y$ می‌باشد معلوم می‌شود که دامنه‌ی تابع داده شده مجموعه اعداد حقیقی مثبت می‌باشد. چون اگر a به هر توان حقیقی (مثبت، منفی یا صفر) برسد حاصل منفی یا صفر نمی‌شود. در ضمن معلوم است که در تساوی $x = a^y$، و در نتیجه در تساوی $y = \log_a x$، مقدار y هر عدد حقیقی می‌تواند باشد، به این معنا که برد تابع $y = \log_a x$ مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد.

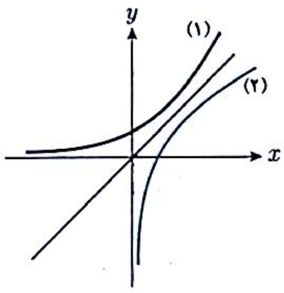
بررسی برد و دامنه‌ی تابع $y = \log_a x$ با رسم نمودار آن تابع نیز امکان‌پذیر است. باید توجه داشت که تابع $y = \log_a x$ معکوس تابع $y = a^x$ می‌باشد، بنابراین اگر نمودار تابع $y = a^x$ را به طریق نقطه‌یابی رسم کنیم نمودار تابع $y = \log_a x$ قرینه‌ی آن منحنی نسبت به نیمساز ربع اول و سوم خواهد بود. پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) $a < ۱$

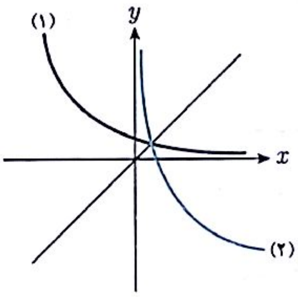
در این حالت نمودار تابع $y = a^x$ مطابق شکل (۴-۷) به‌صورت (۱) و در نتیجه نمودار تابع $y = \log_a x$ به‌صورت (۲) خواهد بود.

ب) $a > ۱$

در این حالت نیز نمودار تابع $y = a^x$ مطابق شکل (۴-۸) به‌صورت (۱) و در نتیجه نمودار تابع $y = \log_a x$ به‌صورت (۲) خواهد بود.



شکل ۴-۸



شکل ۴-۷

همان‌طور که مشاهده می‌شود در هر دو حالت دامنه‌ی تابع مجموعه اعداد حقیقی مثبت و برد تابع مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد.

مثال ۶ دامنه و برد تابع $f(x) = \log_{۱۰}(x^۲ + ۱)$ را بیابید.

حل. واضح است که $x^۲ + ۱$ همیشه مثبت است، بنابراین دامنه‌ی تابع مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد. می‌نیمم مقدار $x^۲ + ۱$ برابر با ۱ می‌باشد که در این حالت x برابر با ۰ و مقدار $f(۰)$ یا $f(x)$ برابر با ۰ پیدا می‌شود. از روی شکل نیز معلوم است که برد تابع مجموعه اعداد حقیقی نامنفی می‌باشد.

ویژگی‌های لگاریتم

در تمامی عبارت‌های زیر مبنای لگاریتم عددی مثبت و مخالف یک فرض می‌شوند:

۱. $\log_n ۱ = ۰$

۲. $\log_n n = ۱$

۳. $\log_n a + \log_n b = \log_n ab$

۴. $\log_n x_1 + \log_n x_2 + \cdots + \log_n x_k = \log_n x_1 x_2 \cdots x_k$

۵. $\log_n \frac{1}{a} = -\log_n a$
۶. $\log_n \frac{a}{b} = \log_n a - \log_n b$

۷. $\log_n a^m = m \log_n a$
۸. $\log_{n^k} a^m = \frac{m}{k} \log_n a$

۹. $\log_n m = \frac{1}{\log_m n}$ یا $\log_n m \times \log_m n = 1$

۱۰. $\log_{mn} a = \frac{1}{\log_a m + \log_a n}$
۱۱. $\log_b a \times \log_c b = \log_c a$

۱۲. $\log_n m = \frac{\log_x m}{\log_x n}$
۱۳. $a = n^{\log_n a}$

به عنوان مثال تعدادی از روابط فوق را اثبات کرده و اثبات مابقی آنها را به شما خوانندگان گرامی می‌سپاریم.

اثبات رابطه‌ی ۸

فرض می‌کنیم $x = \log_n a$ و $y = \log_{n^k} a^m$ در این‌صورت خواهیم داشت:

$$y = \log_{n^k} a^m \Rightarrow (n^k)^y = a^m \Rightarrow n^{ky} = a^m \Rightarrow n^{ky} = (n^x)^m$$
$$\Rightarrow n^{ky} = n^{mx} \Rightarrow ky = mx \Rightarrow y = \frac{m}{k}x$$
$$\Rightarrow \log_{n^k} a^m = \frac{m}{k}\log_n a$$

اثبات رابطه‌ی ۹

مقدار $\log_m n$ را x و مقدار $\log_n m$ را y در نظر گرفته و می‌خواهیم ثابت کنیم $xy = 1$

$$x = \log_m n \Rightarrow n = m^x \Rightarrow n^{\frac{1}{x}} = m$$

از طرف دیگر از تساوی $y = \log_n m$ تساوی $n^y = m$ نتیجه می‌شود که با قیاس دو تساوی اخیر به برابری $xy = 1$ خواهیم رسید.

اثبات رابطه‌ی ۱۳

فرض می‌کنیم مقدار $n^{\log_n a}$ برابر با x باشد که در این‌صورت می‌خواهیم ثابت کنیم x با a برابر است:

$$x = n^{\log_n a}$$

از طرفین تساوی فوق در مبنای n لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_n x = \log_n (n^{\log_n a}) \Rightarrow \log_n x = \log_n a . \log_n n$$
$$\Rightarrow \log_n x = \log_n a \Rightarrow x = a$$

توجه کنید که اگر مبنای یک لگاریتم نوشته نشود، آن‌گاه مبنای آن ۱۰ محسوب می‌شود.

مثال ۷ اگر $\log_{۱۰} ۲ = a$، آن‌گاه $\log_{۱۰} ۵۰۰$ را بر حسب a بیابید.

حل:

$$\log_{۱۰} ۵۰۰ = \log_{۱۰} \frac{۱۰۰۰}{۲} = \log_{۱۰} ۱۰۰۰ - \log_{۱۰} ۲ = \log_{۱۰} ۱۰^{۳} - \log_{۱۰} ۲$$

$$= ۳\log_{۱۰} ۱۰ - \log_{۱۰} ۲ = ۳ - a$$

مثال ۸ مقدار عددی عبارت $۱۰^{۲\log \sqrt[۴]{۶} - \log ۲}$ را بیابید.

حل:

$$۱۰^{۲\log \sqrt[۴]{۶} - \log ۲} = ۱۰^{\log \sqrt{۶} - \log ۲} = ۱۰^{\log \frac{\sqrt{۶}}{۲}} = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

مثال ۹ اگر $\log_{۴} ۲۷ = a$، آن‌گاه حاصل $\log_{۶۴} ۸۱ \times \log_{۳} ۱۸$ را بر حسب a بیابید.

حل:

$$\log_{۴} ۲۷ = a \Rightarrow \log_{۲^{۲}} ۳^{۳} = a \Rightarrow \frac{۳}{۲}\log_{۲} ۳ = a$$

$$\Rightarrow \log_{۲} ۳ = \frac{۲}{۳}a \Rightarrow \log_{۳} ۲ = \frac{۳}{۲a}$$

$$\log_{۶۴} ۸۱ \times \log_{۳} ۱۸ = \log_{۲^{۶}} ۳^{۴} \times \log_{۳}(۳^{۲} \times ۲) = \frac{۴}{۶}\log_{۲} ۳ \times [۲\log_{۳} ۳ + \log_{۳} ۲]$$

$$= \frac{۲}{۳}(\frac{۲}{۳}a)[۲ + \frac{۳}{۲a}] = \frac{۴a}{۹} \times \frac{۴a + ۳}{۲a} = \frac{۸a + ۶}{۹}$$

فصل چهارم

مسائل نمونه

۱ اگر $\log ۲ = \alpha$ و $\log ۳ = \beta$، آن‌گاه حاصل $\log_{۱۵} \sqrt[۵]{۱۱/۲۵}$ را محاسبه کنید.

۲ اگر $\log_{۱۲} ۲۷ = a$، آن‌گاه حاصل $\log_{۶} ۱۶$ را بیابید.

۳ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log ۵ \times \log ۲۰ + (\log ۲)^{۲}$

ب) $۱۰ \times ۱۰۰^{\frac{۱}{۲}\log ۹ - \log ۲}$

ج) $\sqrt{۱۰^{۲+\frac{۱}{۲}\log ۱۶}}$

د) $۱۰۰^{\frac{۱}{۲} - \log \sqrt[۴]{۴}}$

ه) $a^{\frac{\log^{\log a}}{\log a}}$

و) $۴۹^{۱-\log_{۷} ۲} + ۵^{-\log_{۵} ۴}$

۴ اگر $۴a^{۲} + ۹b^{۲} = ۱۳ab$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\log \frac{۲a + ۳b}{۵} = \frac{\log a + \log b}{۲}$$

۵ اگر $x = \log_b c$، $y = \log_c a$ و $z = \log_a b$، آن‌گاه ثابت کنید:

الف) $x.y.z = ۱$

ب) $\frac{x}{xy + x + ۱} + \frac{y}{yz + y + ۱} + \frac{z}{zx + z + ۱} = ۱$

۶ معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\log_{۴} \log_{۳} \log_{۲} x = ۰$

ب) $\log_a\{۱ + \log_b[۱ + \log_c(۱ + \log_d x)]\} = ۰$

ج) $\log_{۱۶} x + \log_{۴} x + \log_{۲} x = ۷$

د) $۲۵^{\log x} = ۵ + ۴(۵^{\log x})$

ه) $\log_{۲}(x - ۱) + \log_{۲}(x + ۲) = ۲$

۷ نامعادلات زیر را حل کنید:

الف) $\log_{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱}}(x^{۲} - ۳x + ۱) \geq ۰$

ب) $\log_{\frac{۱}{۴}}(x^{۲} - ۴x - ۳۲) \geq \log_{\frac{۱}{۴}}(x^{۲} - ۸x - ۲۰)$

۸ دامنه هر یک از توابع زیر را بیابید:

الف) $f(x) = \sqrt{\frac{۸}{|x|} - ۱} + \log(x^{۲} - ۱)$

ب) $f(x) = \log[\log(\log x)]$

۹ برد هر یک از توابع زیر را بیابید:

الف) $f(x) = \log_{۱۰}(x^{۲} + ۱)$

ب) $f(x) = \log_{۲}(۴ - x^{۲})$

۱۰ اگر به ازای $-۱ < x < ۱$ تابع f به‌صورت $f(x) = \log(\frac{۱ + x}{۱ - x})$ باشد، آن‌گاه ثابت کنید:

$$f(\frac{۳x + x^{۳}}{۱ + ۳x^{۲}}) = ۳f(x)$$

پاسخ مسائل نمونه فصل چهارم

۱

$$\log_{۱۵}\sqrt[۵]{۱۱{,}۲۵}=\frac{۱}{۵}\log_{۱۵}\frac{۱۱۲۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۵}\log_{۱۵}\frac{۴۵}{۴}=\frac{۱}{۵}\frac{\log\frac{۴۵}{۴}}{\log ۱۵}$$
$$=\frac{۱}{۵}\frac{\log ۴۵-\log ۴}{\log ۵+\log ۳}=\frac{۱}{۵}\frac{\log ۹+\log ۱۰-\log ۲-۲\log ۲}{\log ۱۰-\log ۲+\log ۳}$$
$$=\frac{۱}{۵}\frac{۲\beta+۱-۳\alpha}{۱-\alpha+\beta}$$

۲

$$\log_{۱۲}۲۷=a\Rightarrow\ \log_{۳\times ۲^۲}۳^۳=a\ \Rightarrow\ ۳\log_{۳\times ۲^۲}۳=a$$
$$\Rightarrow\ \frac{۳}{\log_۳(۳\times ۲^۲)}=a\ \Rightarrow\ \frac{۳}{\log_۳ ۳+۲\log_۳ ۲}=a$$
$$\Rightarrow\ ۳=a+۲a\log_۳ ۲\ \Rightarrow\ \log_۳ ۲=\frac{۳-a}{۲a}\ \Rightarrow\ \log_۲ ۳=\frac{۲a}{۳-a}$$
$$\log_۶ ۱۶=\log_{۲\times ۳}۲^۴=۴\log_{۲\times ۳}۲=\frac{۴}{\log_۲(۲\times ۳)}=\frac{۴}{\log_۲ ۲+\log_۲ ۳}$$
$$=\frac{۴}{۱+\frac{۲a}{۳-a}}=\frac{۴}{\frac{۳+a}{۳-a}}=\frac{۱۲-۴a}{۳+a}$$

۳

الف)

$$\log ۵\times\log ۲۰+(\log ۲)^۲=\log ۵\times\log(۱۰\times ۲)+(\log ۲)^۲$$
$$=\log ۵\times(۱+\log ۲)+(\log ۲)^۲=\log ۵+\log ۵\times\log ۲+(\log ۲)^۲$$
$$=\log ۵+\log ۲(\log ۵+\log ۲)=\log ۵+\log ۲(۱)=\log ۵+\log ۲=۱$$

ب)

$$۱۰\times ۱۰۰^{\frac{۱}{۲}\log ۹-\log ۲}=۱۰\times ۱۰۰^{\log ۳-\log ۲}=۱۰\times ۱۰۰^{\log\frac{۳}{۲}}$$
$$=۱۰\times(۱۰^۲)^{\log\frac{۳}{۲}}=۱۰\times ۱۰^{۲\log\frac{۳}{۲}}=۱۰\times ۱۰^{\log\frac{۹}{۴}}=۱۰\times\frac{۹}{۴}=۲۲{,}۵$$

ج)
$$\sqrt{۱۰^{۲+\frac{۱}{۲}\log ۱۶}}=\sqrt{۱۰^{۲+\log ۴}}=\sqrt{۱۰^۲\times ۱۰^{\log ۴}}=\sqrt{۱۰^۲\times ۴}=۲۰$$

د)
$$۱۰۰^{\frac{۱}{۲}-\log\sqrt[۴]{۴}}=(۱۰^۲)^{\frac{۱}{۲}-\log\sqrt{۲}}=۱۰^{۱-۲\log\sqrt{۲}}=۱۰^{۱-\log ۲}$$
$$=\frac{۱۰^۱}{۱۰^{\log ۲}}=\frac{۱۰}{۲}=۵$$

$$a^{\frac{\log\log a}{\log a}}=a^{\log_a\log a}=\log_{۱۰}a$$

د)

و)

$$۴۹^{۱-\log_۷ ۲} + ۵^{-\log_۵ ۴} = \frac{۴۹^۱}{۴۹^{\log_۷ ۲}} + ۵^{\log_۵ ۴^{-۱}}$$

$$= \frac{۴۹}{(۷^۲)^{\log_۷ ۲}} + ۴^{-۱} = \frac{۴۹}{۷^{\log_۷ ۴}} + \frac{۱}{۴} = \frac{۴۹}{۴} + \frac{۱}{۴} = ۱۲/۵$$

۴

$$\log \frac{۲a+۳b}{۵} = \frac{۱}{۲}\log(\frac{۲a+۳b}{۵})^۲ = \frac{۱}{۲}\log\frac{۴a^۲+۹b^۲+۱۲ab}{۲۵}$$

$$= \frac{۱}{۲}\log\frac{۱۳ab+۱۲ab}{۲۵} = \frac{۱}{۲}\log ab = \frac{\log ab}{۲} = \frac{\log a + \log b}{۲} =$$ سمت راست

۵

الف)

$$x.y.z = \log_b c.\log_c a.\log_a b = (\log_b c.\log_c a).\log_a b = \log_b a.\log_a b = ۱$$

ب)

$$\frac{x}{xy+x+۱} = \frac{\log_b c}{\log_b c.\log_c a + \log_b c + ۱} = \frac{\log_b c}{\log_b a + \log_b c + \log_b b}$$

$$= \frac{\log_b c}{\log_b abc} = \log_{abc} c$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که:

$$\frac{y}{yz+y+۱} = \log_{abc} a \quad , \quad \frac{z}{zx+z+۱} = \log_{abc} b$$

بنابراین:

$$\frac{x}{xy+x+۱} + \frac{y}{yz+y+۱} + \frac{z}{zx+z+۱}$$

$$= \log_{abc} c + \log_{abc} a + \log_{abc} b = \log_{abc} abc = ۱$$

۶

الف)

$$\log_۴ \log_۳ \log_۲ x = ۰ \Rightarrow \log_۳ \log_۲ x = ۱ \Rightarrow \log_۲ x = ۳ \Rightarrow x = ۲^۳ = ۸$$

ب)

$$\log_a\{۱ + \log_b[۱ + \log_c(۱ + \log_d x)]\} = ۰$$

$$\Rightarrow ۱ + \log_b[۱ + \log_c(۱ + \log_d x)] = ۱$$

$$\Rightarrow \log_b[۱ + \log_c(۱ + \log_d x)] = ۰ \Rightarrow ۱ + \log_c(۱ + \log_d x) = ۱$$

$$\Rightarrow \log_c(۱ + \log_d x) = ۰ \Rightarrow ۱ + \log_d x = ۱ \Rightarrow \log_d x = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

ج)

$$\log_{۱۶} x + \log_{۴} x + \log_{۲} x = ۷ \Rightarrow \log_{۲^۴} x + \log_{۲^۲} x + \log_{۲} x = ۷$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}\log_{۲} x + \frac{۱}{۲}\log_{۲} x + \log_{۲} x = ۷$$
$$\Rightarrow (\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} + ۱)\log_{۲} x = ۷$$
$$\Rightarrow \frac{۷}{۴}\log_{۲} x = ۷ \Rightarrow \log_{۲} x = ۴ \Rightarrow x = ۲^۴ = ۱۶$$

د)

$$۲۵^{\log x} = ۵ + ۴(۵^{\log x})$$
$$\Rightarrow (۵^۲)^{\log x} = ۵ + ۴(۵^{\log x}) \Rightarrow (۵^{\log x})^۲ - ۴(۵^{\log x}) - ۵ = ۰$$
$$\Rightarrow (۵^{\log x} - ۵)(۵^{\log x} + ۱) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۵^{\log x} = -۱ & \text{غ‌ق} \\ ۵^{\log x} = ۵ \Rightarrow \log x = ۱ \Rightarrow x = ۱۰ \end{cases}$$

ه)

$$\log_{۲}(x-۱) + \log_{۲}(x+۲) = ۲ \Rightarrow \log_{۲}(x-۱)(x+۲) = ۲$$
$$\Rightarrow (x-۱)(x+۲) = ۲^۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰$$
$$\Rightarrow (x+۳)(x-۲) = ۰ \Rightarrow x = -۳ \text{ غ‌ق یا } x = ۲$$

۷

الف)

$$\log_{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱}}(x^۲ - ۳x + ۱) \geq ۰$$

پایه‌ی لگاریتم، یعنی $\sqrt{x+۱} - \sqrt{x-۱}$ به ازای جمیع مقادیر حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۱ مقداری مثبت و مخالف ۱ می‌شود. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

I)

$$۰ < \sqrt{x+۱} - \sqrt{x-۱} < ۱ \Rightarrow \sqrt{x+۱} < ۱ + \sqrt{x-۱}$$
$$\Rightarrow x + ۱ < ۱ + x - ۱ + ۲\sqrt{x-۱}$$
$$\Rightarrow ۱ < ۲\sqrt{x-۱}$$
$$\Rightarrow ۱ < ۴x - ۴ \Rightarrow ۵ < ۴x$$
$$\Rightarrow \frac{۵}{۴} < x \qquad (۱)$$

در این حالت برای آن‌که نابرابری برقرار باشد لازم است عبارت $(x^۲ - ۳x + ۱)$ بین ۰ و ۱ باشد:

$$۰ < x^۲ - ۳x + ۱ \leq ۱$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲ - ۳x + ۱ > ۰ \Rightarrow x > \frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} \text{ یا } x < \frac{۳-\sqrt{۵}}{۲} & (۲) \\ x^۲ - ۳x + ۱ \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۳ & (۳) \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

اشتراک محدوده‌های (۱)، (۲) و (۳) به‌صورت $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} < x \leq ۳$ می‌باشد.

(II

$$۱ < \sqrt{x+۱} - \sqrt{x-۱} \Rightarrow ۱ \leq x < \frac{۵}{۴} \qquad (۱)$$

در این حالت نیز شرط لازم برای برقراری نابرابری آن است که عبارت $(x^۲ - ۳x + ۱)$ بزرگ‌تر یا مساوی ۱ باشد:

$$x^۲ - ۳x + ۱ \geq ۱ \Rightarrow x(x-۳) \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۰ \text{ یا } x \geq ۳ \qquad (۲)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این حالت محدوده‌های (۱) و (۲) اشتراک ندارند.

بنابراین مجموعه جواب نامعادله‌ی داده شده به‌صورت $(\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}, ۳]$ می‌باشد.

ب)

$$\log_{\frac{۱}{۴}}(x^۲ - ۴x - ۳۲) \geq \log_{\frac{۱}{۴}}(x^۲ - ۸x - ۲۰)$$

$$x^۲ - ۴x - ۳۲ > ۰ \Rightarrow (x-۸)(x+۴) > ۰ \Rightarrow x < -۴ \text{ یا } x > ۸ \qquad (۱)$$

$$x^۲ - ۸x - ۲۰ > ۰ \Rightarrow (x-۱۰)(x+۲) > ۰ \Rightarrow x < -۲ \text{ یا } x > ۱۰ \qquad (۲)$$

چون پایه‌های لگاریتم برابر $\frac{۱}{۴}$ یعنی کمتر از ۱ می‌باشد، بنابراین شرط لازم برای برقراری نابرابری داده شده، برقراری نابرابری زیر می‌باشد:

$$x^۲ - ۴x - ۳۲ \leq x^۲ - ۸x - ۲۰ \Rightarrow ۴x \leq ۱۲ \Rightarrow x \leq ۳ \qquad (۳)$$

اشتراک محدوده‌های (۱)، (۲) و (۳) بازه‌ی $(-\infty, -۴)$ می‌باشد.

۸

الف)

$$f(x) = \sqrt{\frac{۸}{|x|} - ۱} + \log(x^۲ - ۱)$$

$$\frac{۸}{|x|} - ۱ \geq ۰ \Rightarrow \frac{۸}{|x|} \geq ۱ \Rightarrow |x| \leq ۸ \,,\, x \neq ۰$$

$$\Rightarrow x \in [-۸, ۸] - \{۰\} \qquad (۱)$$

$$x^۲ - ۱ > ۰ \Rightarrow x^۲ > ۱ \Rightarrow x \in (-\infty, -۱) \cup (۱, +\infty) \qquad (۲)$$

اشتراک ناحیه‌های (۱) و (۲) به‌صورت $[-۸, -۱) \cup (۱, ۸]$ می‌باشد.

ب)

$$f(x) = \log[\log(\log x)]$$

$$\log(\log x) > ۰ \Rightarrow \log x > ۱ \Rightarrow x > ۱۰$$

بنابراین دامنه‌ی تابع داده شده بازه‌ی $(۱۰, +\infty)$ می‌باشد.

۹

الف)

$$f(x)=\log_{10}(x^2+1)$$
$$x^2+1\geq 1 \Rightarrow f(x)\geq \log_{10}1 \Rightarrow f(x)\in[0,+\infty)$$

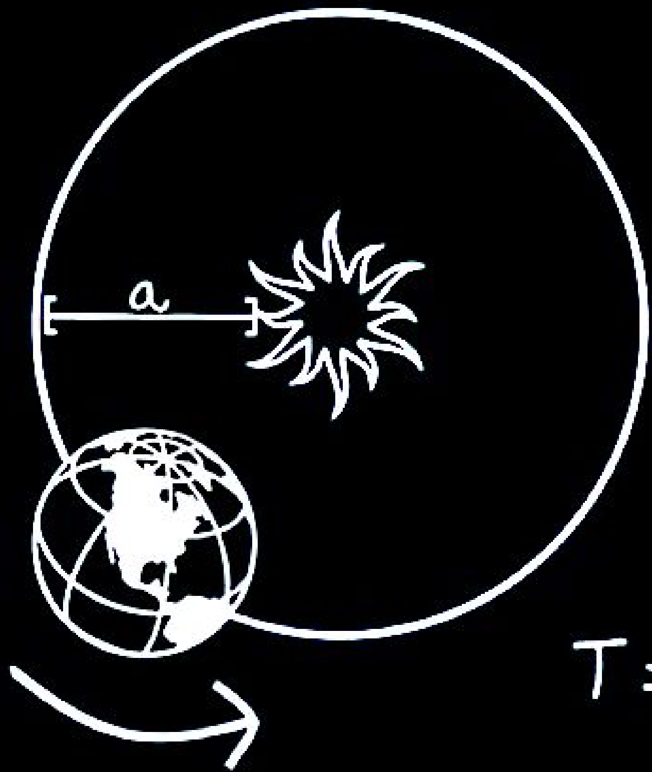
ب)

$$f(x)=\log_2(4-x^2)$$
$$0<4-x^2\leq 4 \Rightarrow \log_2 0^+ < f(x)\leq \log_2 4 \Rightarrow f(x)\in(-\infty,2]$$

در عبارت فوق منظور از 0^+ عددی مثبت و غیر صفر و به اندازه‌ی کافی نزدیک به صفر می‌باشد.

۱۰

$$f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)=\log\left(\frac{1+\frac{3x+x^3}{1+3x^2}}{1-\frac{3x+x^3}{1+3x^2}}\right)=\log\left(\frac{1+3x^2+3x+x^3}{1+3x^2-3x-x^3}\right)$$
$$=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3=3\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=3f(x)$$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

$$\mu = G \times M(\text{sun})$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{149{,}597{,}887.5^3\ \text{km}}{132{,}712{,}440{,}018\ \text{km}^3\ \text{s}^{-2}}}$$

$$T = 2\pi(5022643.737)\,\text{s}$$

$$T = 31558201.33 \text{ seconds}$$

$$31558201.33\,\text{s} \times \frac{1 \text{ minute}}{60 \text{ seconds}} = 525{,}970 \text{ minutes}$$

$$525{,}970 \times \frac{1 \text{ hour}}{60 \text{ minutes}} \times \frac{1 \text{ day}}{24 \text{ hours}} \approx \underline{\underline{365.25}}$$