باسمه‌تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون گراف

چهارشنبه ۲۸ مرداد ۱۳۹۴ مدرسین: جبل‌عاملی، میری وقت: ۴ ساعت و ۴۵ دقیقه

توضیحات:

- آزمون شامل ۶ پرسش است. ۳ پرسش در این برگه و ۳ پرسش دیگر در برگه‌ی دوم هستند. در صورتی که تمایل دارید، می‌توانید برگه‌ی دوم را پس از گذشت حدود دو ساعت و ربع از آزمون بگیرید (برگه‌ی یکم از شما گرفته نمی‌شود) تا تعداد زیاد پرسش‌ها، تمرکزتان را برهم نزند.
- هر پرسش ۲۰ امتیاز دارد. در نهایت نمره‌ی هر کس از ۱۲۰ ضرب در $\frac{۵}{۶}$ شده و به نمره‌ای از ۱۰۰ تبدیل می‌شود و نمره‌ی نهایی او خواهد بود.

مسأله‌ی یکم .... ۲۰ امتیاز

از دو پرسش زیر یکی را به دل‌خواه انتخاب کرده و پاسخ دهید:

۱) در گراف ساده‌ی G، دور به طول ۳ و دور به طول ۴ وجود ندارد. ثابت کنید:

$$m(G) \leq \frac{n\sqrt{n-۱}}{۲}$$

۲) فرض کنید H گرافی است که مجموعه‌ی رئوس آن به صورت

$$V(H) = \{(a,b) | ۰ < a < p, ۰ \leq b < p\}$$

است و هم‌چنین از رأس (a,b) به رأس (c,d) یال وجود دارد، اگر و تنها اگر $ac \equiv b+d \pmod{p}$ باشد. ثابت کنید گراف H دور به طول ۴ ندارد و و تعداد یال‌های آن از $\theta(n\sqrt{n})$ است.

مسأله‌ی دوم .... ۲۰ امتیاز

به یک تورنمنت، *منتظم مضاعف* گوییم؛ هرگاه درجه‌ی خروجی تمام رئوس برابر k و هم‌چنین تعداد هم‌سایه‌های خروجی مشترک هر دو رأس برابر l باشد. فرض کنید D یک تورنمنت منتظم مضاعف nـ‌رأسی باشد.

ا) نشان دهید در D هر یال در دقیقن $\frac{n-۳}{۴}$ مثلث جهت‌دار حضور دارد.

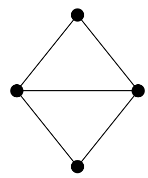
ب) تعداد مثلث‌های جهت‌دار D را بر حسب n به دست آورید.

پ) فرض کنید $n = ۱۱$ باشد. می‌دانیم تورنمنت منتظم مضاعف ۱۱ـ‌رأسی وجود دارد. هم‌چنین فرض کنید $f(D)$ کمینه‌ی تعداد یال‌هایی از D است که باید حذف شود تا گراف باقی‌مانده، دور جهت‌دار نداشته باشد. نشان دهید:

$$f(D) > \frac{\binom{n}{۲}}{۳}$$

مسأله‌ی سوم .... ۲۰ امتیاز

فرض کنید G یک گراف ساده‌ی nـرأسی است که حداقل $\lfloor \frac{n^۲}{۴} \rfloor + ۱$ یال دارد ($n > ۳$). نشان دهید G دارای زیرگراف (نه لزومن القایی) به شکل



است.