

امتحانات نیمسال دوم ۹۷ - ۹۶		
نام درس: معادلات دیفرانسیل	مدت زمان امتحان: ۱۰۰ دقیقه	مبنای نمره کل: ۱۰۰
مشخصه درس:	نام و نام خانوادگی دانشجو:	نمره فعالیت کلاسی:
نام و نام خانوادگی استاد: بهروز آدینه	شماره دانشجویی:	نمره میان ترم:
تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۰۳/۲۹	رشته تحصیلی و مقطع: کارشناسی ناپیوسته برق	نمره پایان نیمسال:
ساعت امتحان: ۱۱:۰۰	شماره صندلی:	نمره کل:
امتحان جزوه باز <input type="checkbox"/> جزوه بسته <input checked="" type="checkbox"/>		دانشجو مجاز به استفاده از ماشین حساب می باشد <input type="checkbox"/> نمی باشد <input checked="" type="checkbox"/>

نمره	سوال																											
در جدول زیر چیزی ننویسید.																												
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>جمع</th> <th>سوال ۸</th> <th>سوال ۷</th> <th>سوال ۶</th> <th>سوال ۵</th> <th>سوال ۴</th> <th>سوال ۳</th> <th>سوال ۲</th> <th>سوال ۱</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۱۰۰</td> <td>۱۸</td> <td>۱۱</td> <td>۱۴</td> <td>۱۱</td> <td>۱۴</td> <td>۱۶</td> <td>۸</td> <td>۸</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	جمع	سوال ۸	سوال ۷	سوال ۶	سوال ۵	سوال ۴	سوال ۳	سوال ۲	سوال ۱	۱۰۰	۱۸	۱۱	۱۴	۱۱	۱۴	۱۶	۸	۸									
جمع	سوال ۸	سوال ۷	سوال ۶	سوال ۵	سوال ۴	سوال ۳	سوال ۲	سوال ۱																				
۱۰۰	۱۸	۱۱	۱۴	۱۱	۱۴	۱۶	۸	۸																				
	<p>سوال ۱: نوع، مرتبه، درجه و خطی یا غیرخطی بودن معادلات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف- $x^2 y'''(v'')^{\frac{3}{4}} + e^{4x} \sin y' = y^3 + x(y')^5$</p> <p>ب- $(y'')^3 + 6(y')^4 + 2x = 3$</p> <p>حل:</p> <p>الف- دیفرانسیل- مرتبه سوم- بدون درجه- غیرخطی</p> <p>ب- دیفرانسیل- مرتبه دوم- درجه سوم- خطی</p> <p>سوال ۲: معادله دیفرانسیل $y' = -1 + \frac{1}{x+y}$ را حل کنید.</p> <p>حل:</p> $u = x + y \Rightarrow y' = u' - 1 \Rightarrow u' - 1 = -1 + \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$ $\Rightarrow u du = dx \Rightarrow \int u du = \int dx \Rightarrow \frac{1}{2} u^2 = x + c \Rightarrow (x + y)^2 = 2x + c$ <p>سوال ۳: معادله دیفرانسیل $y' + 2y = e^x$ را حل کنید.</p> <p>حل: مشاهده می شود که این معادله از نوع خطی مرتبه اول است و داریم:</p> $P(x) = 2, \quad Q(x) = e^x$ <p>پس داریم:</p> $y = e^{-\int 2 dx} \left[\int e^x e^{\int 2 dx} dx + c \right] \Rightarrow y = e^{-2x} \left[\int e^{3x} dx + c \right] \Rightarrow$ $y = e^{-2x} \left(\frac{1}{3} e^{3x} + c \right) = \frac{1}{3} e^x + c e^{-2x}$ <p>سوال ۴: مقادیر a و b چگونه باشد تا معادله دیفرانسیل $(x^2 + \frac{1}{y} + by^2) dx + axy^{-2} dy = 0$ کامل باشد.</p> <p>حل: شرط کامل بودن را بررسی می کنیم:</p> $\begin{cases} P(x, y) = x^2 + \frac{1}{y} + by^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + 2by \\ Q(x, y) = axy^{-2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = ay^{-2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{y^2} + 2by = ay^{-2}$ $\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$ <p>سوال ۵: یک عامل انتگرال ساز برای معادله $(y + x^4 y^2) dx + x dy = 0$ پیدا کنید.</p>																											

نمره	سوال
	<p>حل:</p> $\begin{cases} P(x, y) = y + x^2 y^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + 2x^2 y \\ Q(x, y) = x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{yQ - xP} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$ $\Rightarrow \frac{2x^2 y}{xy - xy - x^2 y^2} = -\frac{2}{xy}$ <p>با در نظر گرفتن $z = xy$ داریم:</p> $\mu(z) = e^{-2 \int \frac{dz}{z}} = e^{-2 \ln z} = \frac{1}{z^2} \Rightarrow \mu(xy) = \frac{1}{x^2 y^2}$ <p>سوال ۶: جواب عمومی معادله $y'' - (3y' + \cos x)y' + 3y' \cos x = 0$ را بیابید. حل: با تجزیه معادله به صورت $(y' - \cos x)(y' - 3y') = 0$ داریم:</p> $y' = \cos x \Rightarrow y = \sin x + k_1$ $y' = 3y' \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = 3dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = 3x + k_2$ <p>بنابراین جواب عمومی عبارت است از:</p> $(y - \sin x - k_1) \left(3x + \frac{1}{y} + k_2 \right) = 0$ <p>سوال ۷: لاپلاس‌های زیر را بدست آورید.</p> <p>الف- $f(t) = 4t^2 - 3 \cos 2t + 5e^{-t} \cos 2t$</p> <p>ب- $f(t) = \sin^2 t$</p> <p>حل:</p> <p>الف-</p> $L\{4t^2 - 3 \cos 2t + 5e^{-t}\} = 4L\{t^2\} - 3L\{\cos 2t\} + 5L\{e^{-t}\} = \frac{8}{s^3} - \frac{3s}{s^2 + 4} + 5 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}$ <p>ب- داریم:</p> $f'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t, f(0) = 0$ <p>و $L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) = sL\{f(t)\}$</p> <p>از طرفی $L\{f'(t)\} = L\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4}$</p> <p>بنابراین $L\{f(t)\} = \frac{2}{s(s^2 + 4)}$</p> <p>سوال ۸: جواب مساله مقدار اولیه (معادله) زیر را بدست آورید. $y'(t) + 2y(t) = 4t, y(0) = 0$ حل: از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم. داریم:</p> $L\{y'(t)\} + 2L\{y(t)\} = 4L\{t\} \Rightarrow sL\{y(t)\} - y(0) + 2L\{y(t)\} = \frac{4}{s^2}$ <p>فرض کنید $L\{y(t)\} = Y(s)$. آنگاه داریم:</p> $(s+2)Y(s) = \frac{4}{s^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{4}{s^2(s+2)}$

نمره	سوال
	<p data-bbox="997 107 1463 145">با تجزیه کسر به کسرهای ساده، بدست می آوریم:</p> $\frac{4}{s^2(s+2)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+2} \Rightarrow (As+B)(s+2) + Cs^2 = 4 \Rightarrow$ $\begin{cases} s=0 \Rightarrow 2B=4 \Rightarrow B=2 \\ s=-2 \Rightarrow 4C=4 \Rightarrow C=1 \\ s=1 \Rightarrow (A+2)(2) + 1 \times 1^2 = 4 \Rightarrow A+2=1 \Rightarrow A=-1 \end{cases}$ $Y(s) = \frac{-s+2}{s^2} + \frac{1}{s+2} = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+2}$ <p data-bbox="1364 470 1463 504" style="text-align: right;">بنابراین:</p> $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = -L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = -1 + 2t + e^{-2t}$