

**بسم الله الرحمن الرحيم**

**بخش یازدهم**

**ابزار اندازه گیری و کنترل  
ترم دوم سال تحصیلی ۹۶-۹۷**

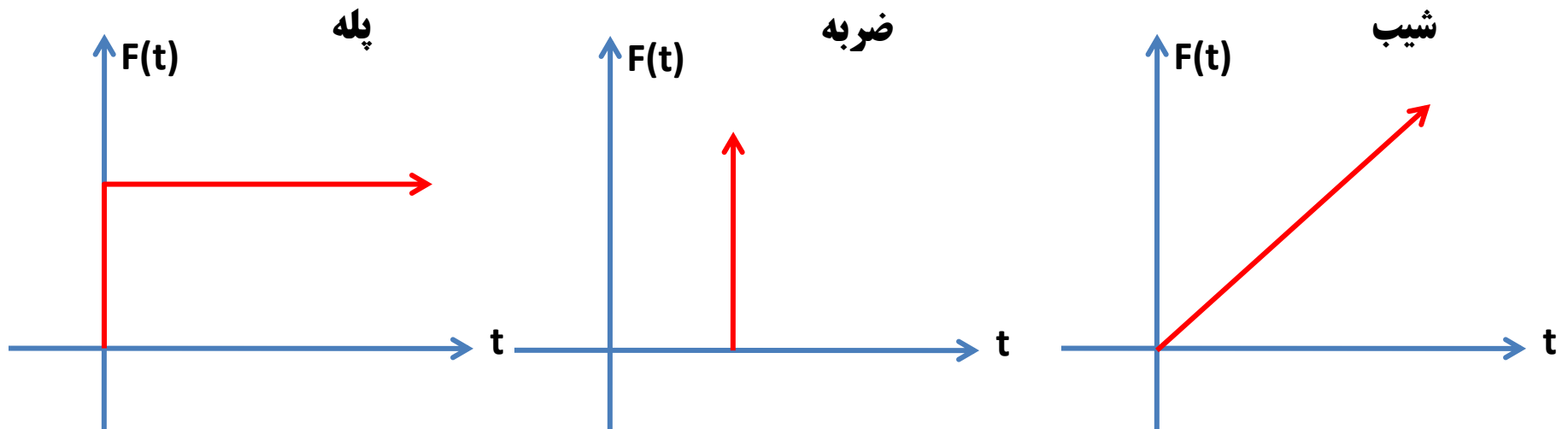
**محمد مزیدی**

[Mazidi.blog.ir](http://Mazidi.blog.ir)

[Mohammad.mazidi@iran.ir](mailto:Mohammad.mazidi@iran.ir)

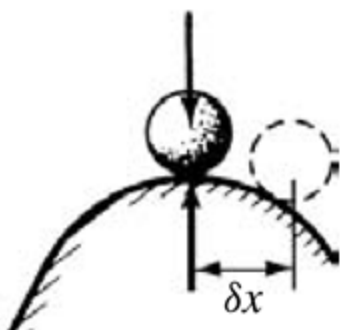
## ورودی های سیستم

- ورودی های مختلف و متنوعی به یک سیستم کنترلی اعمال می گردد. اما برای مقایسه و تحلیل پاسخ سیستم های کنترلی، معمولا از سیگنال های ورودی خاصی استفاده می شود.
- سیگنال های ورودی آزمایشی متداول:



## پایداری سیستم

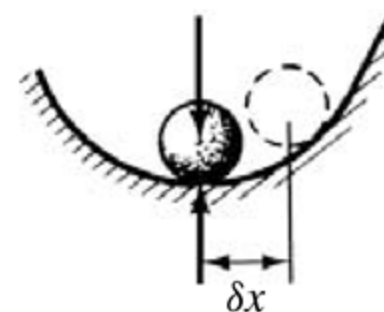
- سیستم پایدار: سیستمی که از شرایط اولیه مختلف بتواند به نقطه تعادل برسد
- سیستم ناپایدار: سیستمی که از شرایط اولیه مختلف نتواند به نقطه تعادل برسد.
- سیستم با پایداری بحرانی: سیستمی که در مرز پایداری باشد و با کوچکترین اغتشاش ناپایدار گردد.



سیستم ناپایدار



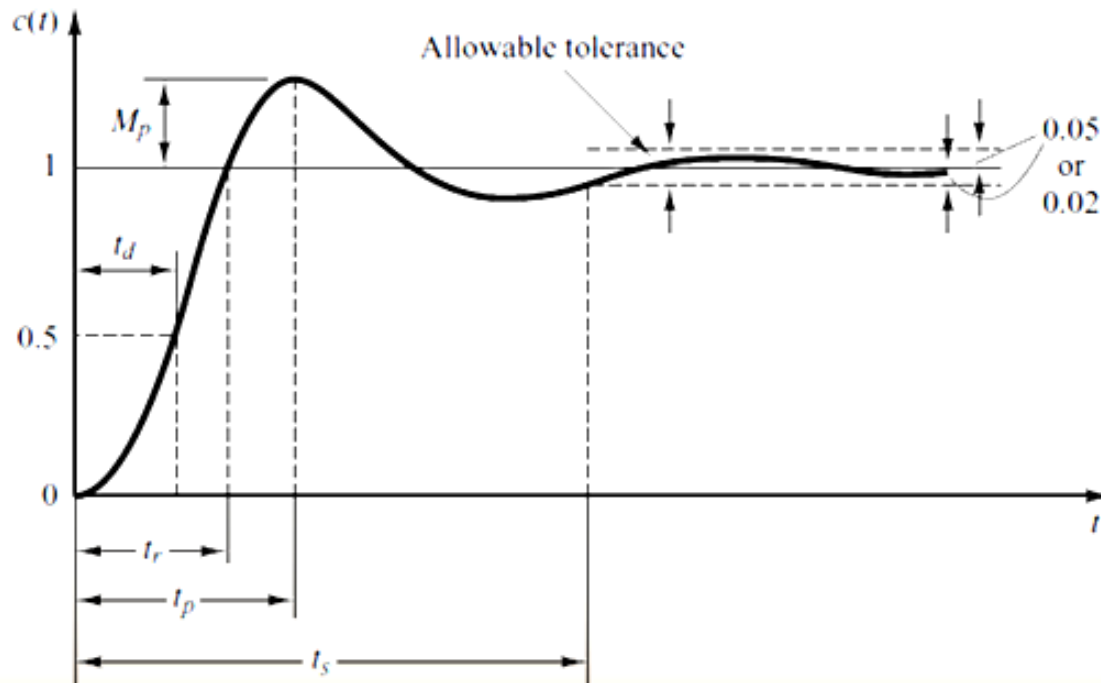
سیستم با پایداری  
بحرانی



سیستم پایدار

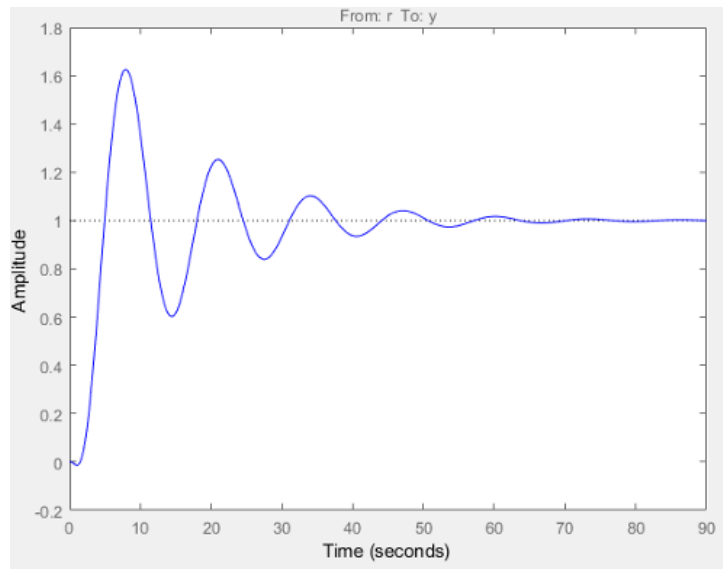
## اجزای پاسخ گذرای سیستم ها

- **زمان صعود ( $t_r$ ):** زمان مورد نیاز برای رسیدن به مقدار نهایی (برای اولین بار)
- **زمان اوج ( $t_p$ ):** زمان مورد نیاز برای رسیدن به نخستین نقطه اوج فراجهش
- **بیشینه فراجهش ( $M_p$ ):** بیشترین فراجهش نسبت به مقدار نهایی
- **زمان نشست ( $t_s$ ):** زمان مورد نیاز برای رسیدن و باقی ماندن در محدوده ای پیرامون مقدار نهایی (۲٪ تا ۵٪)



# مدلسازی سیستم ها

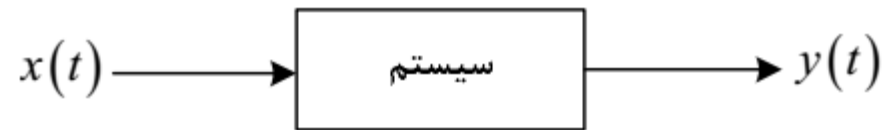
- پاسخ یک سیستم نسبت به ورودی معمولاً رفتار مطلوبی نمی باشد.
- در نتیجه می بایست تنظیماتی در سیستم اعمال شود تا پاسخ مطلوب دریافت شود.
- منظور از پاسخ مطلوب همان انطباق بیشتر ورودی و پاسخ سیستم می باشد که در تصویر زیر بعنوان نمونه اختلاف دارند.



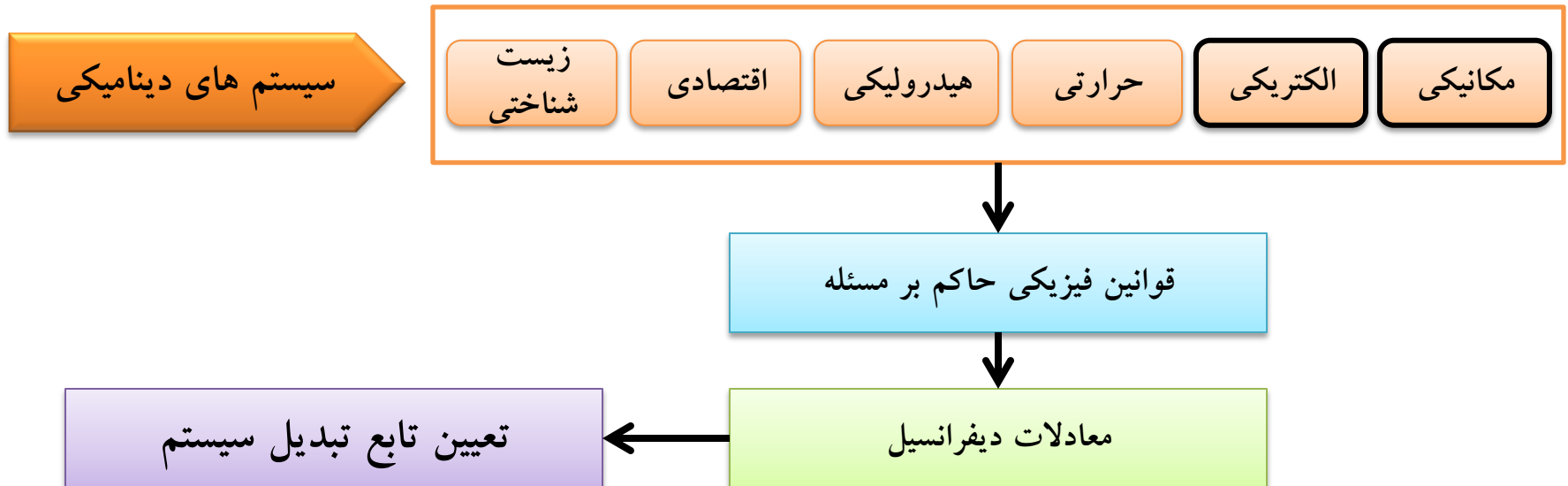
- برای اعمال تنظیمات کنترلی ابتدا باید سیستم مورد نظر را مدل کنیم.
- سپس براساس پارامترهای مدل تغییرات مورد نظر را اعمال کنیم تا پاسخ سیستم مطلوب شود.

# مدلسازی سیستم ها

- مدل ریاضی سیستم دینامیکی یک معادله ریاضی است که رفتار دینامیکی سیستم را تا حد امکان به خوبی نمایش می دهد.

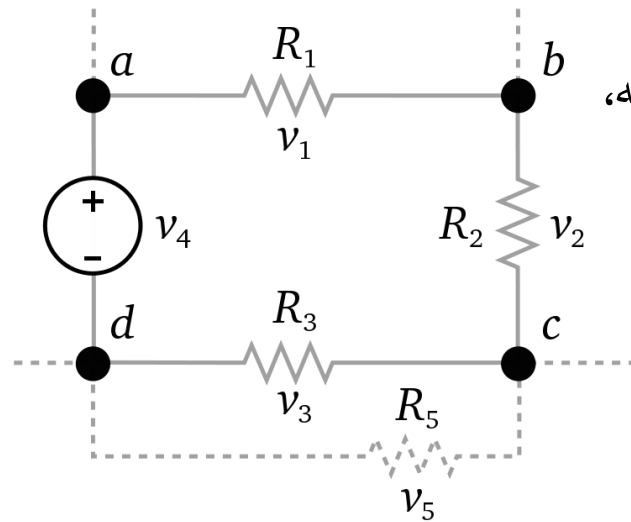


- رابطه ریاضی بین ورودی-خروجی یک سیستم خطی اینگونه مدلسازی می شود:



# مدلسازی ریاضی سیستم های الکتریکی

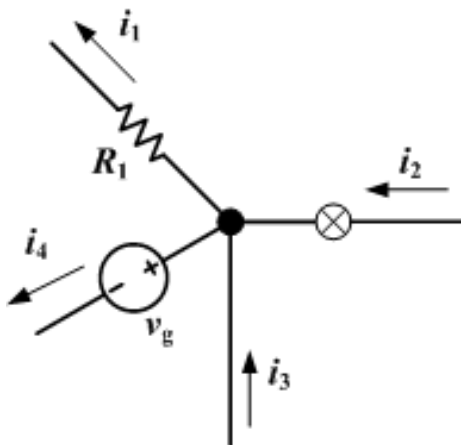
❖ قوانین حاکم بر مدارهای الکتریکی



**1. قانون ولتاژ:** در یک مدار الکتریکی در هر حلقه یا هر مسیر بسته، مجموع جبری اختلاف پتانسیل در المان های مدار، برابر صفر است.

$$\sum_{k=1}^n V_k = 0$$

**2. قانون جریان:** در یک مدار الکتریکی فشرده جمع جبری جریان هایی که به یک گره وارد می شود یا از آن خارج می شوند در هر لحظه برابر با صفر است.



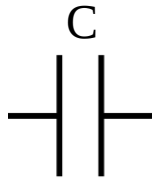
$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

# مدلسازی ریاضی سیستم های الکتریکی

المان های  
مدار

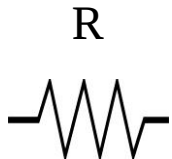
رابطه ولتاژ و جریان

تبدیل لاپلاس



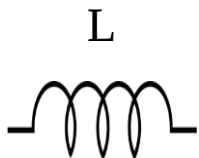
$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$



$$v(t) = Ri(t)$$

$$V(s) = RI(s)$$



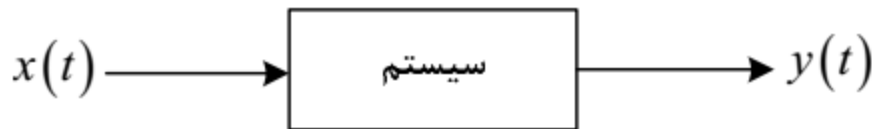
$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$V(s) = LsI(s)$$

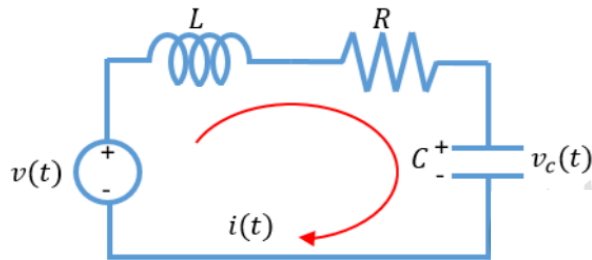
# مدلسازی ریاضی سیستم های الکتریکی

- ❖ **تابع تبدیل:** نمایش ریاضی رابطه میان ورودی و خروجی یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان است.
- در ساده ترین شکل برای یک سیستم پیوسته زمان با ورودی  $x(t)$  و خروجی  $y(t)$ ، تابع تبدیل نگاشت خطی تبدیل لاپلاس ورودی  $X(s)$  و خروجی  $Y(s)$  است:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$



# مدلسازی ریاضی سیستم های الکتریکی



❖ مثال) تابع تبدیل مدار روبرو را بدست آورید.

□ جواب)

1. ابتدا ورودی و خروجی مدار را تعیین می کنیم. ورودی اختلاف پتانسیل منبع توان است  $v(t)$  و خروجی ولتاژ خازن  $v_c(t)$  می باشد.

2. قانون ولتاژ را برای مدار می نویسیم:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

3. از معادله بدست آمده لاپلاس می گیریم:

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs} I(s) = V(s)$$

4. برای تابع تبدیل باید لاپلاس خروجی به ورودی تقسیم شود. لاپلاس ورودی در معادله ظاهر شده است و لاپلاس خروجی را باید در معادله داشته باشیم. برای این کار تبدیل انجام می دهیم:

$$V_c(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \Rightarrow I(s) = CsV_c(s)$$

5. در لاپلاس معادله که در مرحله ۳ بدست آمده هرجایی که  $I(s)$  داشتیم به جای آن  $CsV_c(s)$  میگذاریم.

$$LsCsV_c(s) + RCsV_c(s) + \frac{1}{Cs} CsV_c(s) = V(s)$$

## مدلسازی ریاضی سیستم های الکتریکی

6. معادله را ساده سازی می کنیم:

$$(LsCs + RCs + 1)V_c(s) = V(s)$$

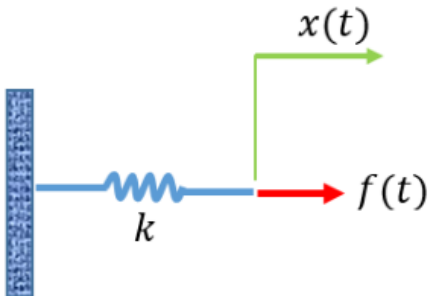
7. تابع تبدیل را می نویسیم:

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{(LCs^2 + RCs + 1)}$$

# مدلسازی ریاضی سیستم های مکانیکی

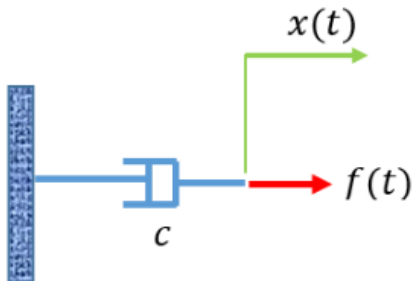
رابطه نیرو و جابجایی

تبدیل لاپلاس



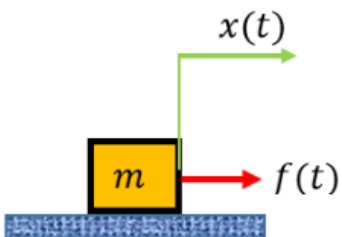
$$f(t) = kx(t)$$

$$F(s) = kX(s)$$



$$f(t) = c\dot{x}(t)$$

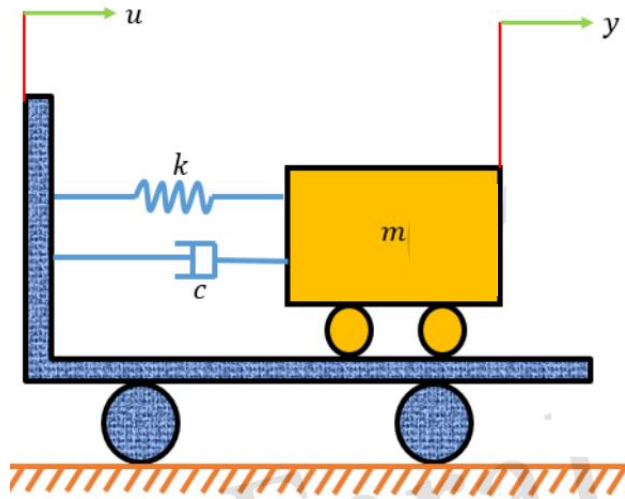
$$F(s) = csX(s)$$



$$f(t) = m\ddot{x}(t)$$

$$F(s) = ms^2X(s)$$

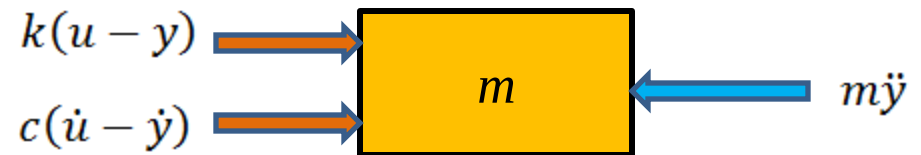
# مدلسازی ریاضی سیستم های مکانیکی



- مثال) تابع تبدیل سیستم روبرو را بدست آورید:

□ جواب

1. ورودی، جابجایی  $u$  و خروجی، جابجایی  $y$  می باشد.
2. نمودار جسم آزاد را می کشیم :



3. معادله تعادل نیرو را می نویسیم:

$$\sum f = ma \Rightarrow k(u - y) + c(\dot{u} - \dot{y}) = m\ddot{y}$$

4. از دوطرف معادله لاپلاس می گیریم:

$$csU(s) + kU(s) = ms^2Y(s) + csY(s) + kY(s)$$

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k}$$

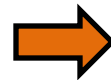
## محاسبه پاسخ سیستم به ورودی ها

- با مشخص شدن تابع تبدیل سیستم می توانیم پاسخ سیستم به ورودی های مختلف را محاسبه کنیم.
- برای ورودی های ضربه و پله و شیب می توان پاسخ سیستم را محاسبه کرد:
- ابتدا لاپلاس توابع ضربه، پله و شیب را محاسبه می کنیم.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

تابع ضربه

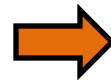
$$x(t) = \delta(t) \rightarrow X(s) = 1$$



$$Y(s) = G(s)$$

تابع پله

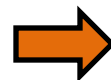
$$x(t) = u(t) \rightarrow X(s) = \frac{1}{s}$$



$$Y(s) = \frac{G(s)}{s}$$

تابع شیب

$$x(t) = tu(t) \rightarrow X(s) = \frac{1}{s^2}$$



$$Y(s) = \frac{G(s)}{s^2}$$

## محاسبه پاسخ سیستم به ورودی ها

- مثال) تابع تبدیل مدار الکتریکی در چند اسلاید قبل بدست آمده است. پاسخ سیستم به ورودی پله را محاسبه نمایید.

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{(LCs^2 + RCs + 1)}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \square \text{ (جواب)}$$

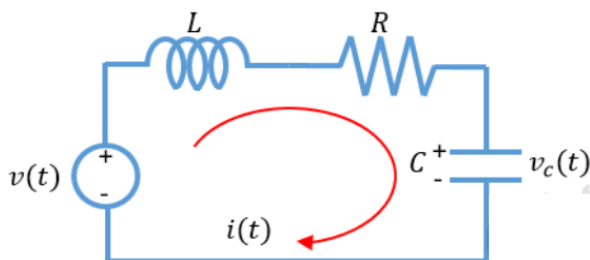
$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(LCs^2 + RCs + 1)}$$

- این پاسخ با استفاده از عکس تبدیل لاپلاس تبدیل به تابعی از زمان شده و قابل رسم می شود.
- با فرض اینکه مقاومت، خازن و سلف همگی برابر یک باشند، تابع خروجی برحسب زمان برابر است با:

$$y(t) = e^{-t/2} \left( \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \left(\sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) / 3 \right)$$

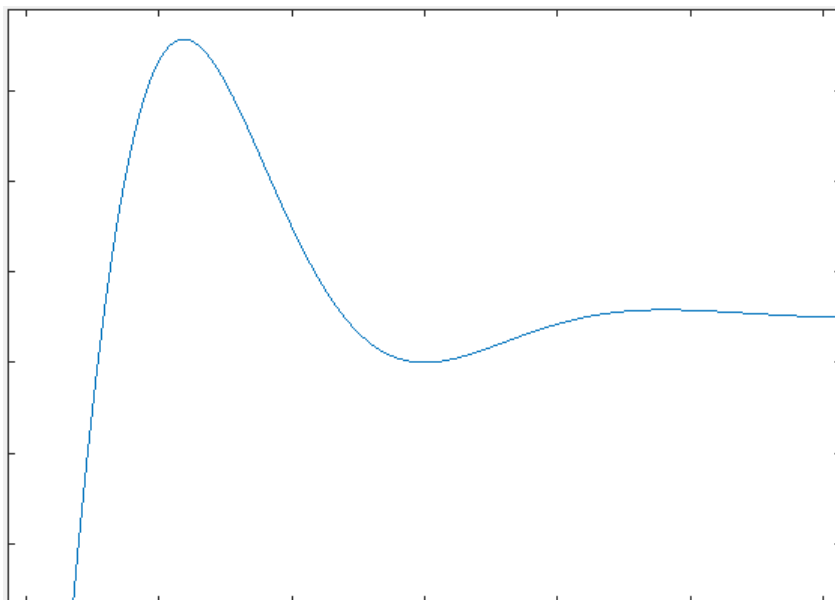
## ترسیم پاسخ سیستم به ورودی ها

- با در نظر گرفتن  $c=1$ ،  $L=1$  و  $R=1$  پاسخ سیستم روبرو (ولتاژ خازن) به ورودی پله را رسم می کنیم:



$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(LCs^2 + RCs + 1)}$$

$$y(t) = e^{-t/2} \left( \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \left(\sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)/3 \right)$$



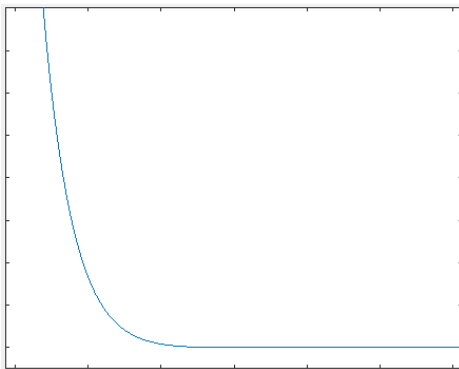
اگر بخواهیم پاسخ سیستم را تغییر  
بدهیم چکاری باید انجام دهیم؟

## ترسیم پاسخ سیستم به ورودی ها

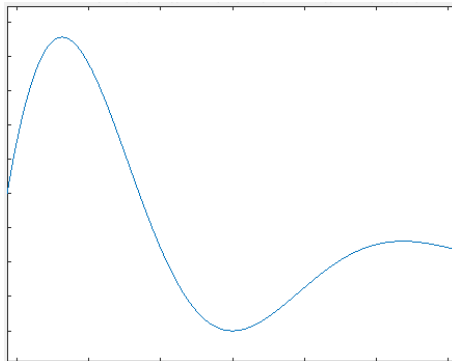
- برای تغییر پاسخ سیستم به ورودی مورد نظر می بایست مقادیر المان های سیستم را تغییر دهیم. در مثال قبل همانطور که در تابع خروجی سیستم مشاهده می کنیم سه المان  $R$ ،  $L$  و  $C$  قابل تغییر می باشند.

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(LCs^2 + RCs + 1)}$$

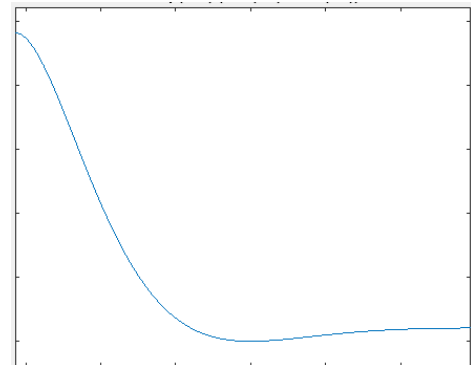
$R=2, C=1, L=1$



$R=1, C=1, L=2$

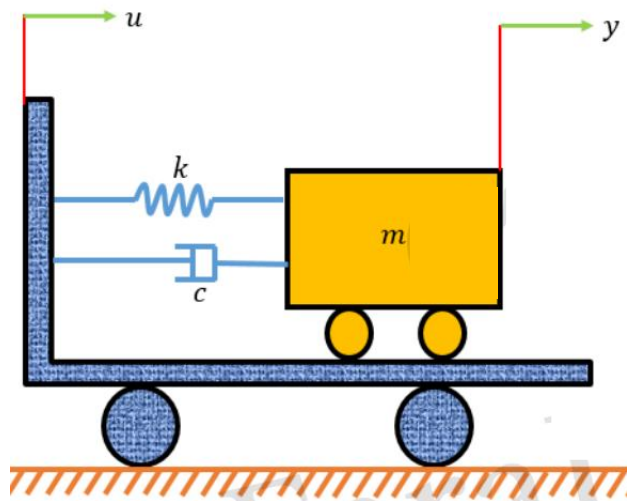


$R=1, C=2, L=1$



## ترسیم پاسخ سیستم

- مثال) اگر به سیستم روبرو یک ضربه وارد شود (ورودی)، خروجی آن چه می باشد (جابه جایی  $y$ )؟



$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k}$$

□ جواب)

- لاپلاس ورودی ضربه برابر است با یک در نتیجه:

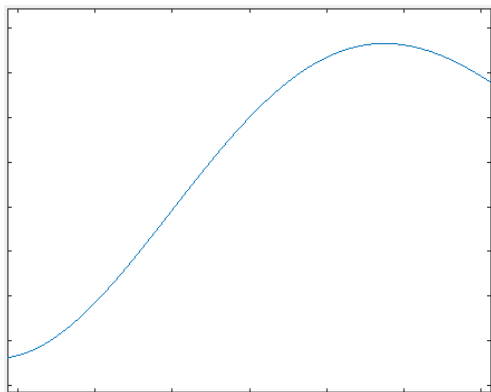
$$Y(s) = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k}$$

- عکس لاپلاس از خروجی می گیریم:

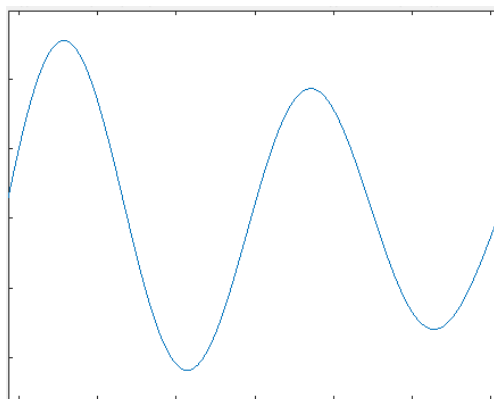
$$y(t) = \frac{c \exp(-(c \cdot t)/(2 \cdot m)) \cdot (\cosh((t \cdot (c^2/4 - k \cdot m)^{1/2})/m) + (m \cdot \sinh((t \cdot (c^2/4 - k \cdot m)^{1/2})/m) \cdot (k/c - c/(2 \cdot m))) / (c^2/4 - k \cdot m)^{1/2})}{m}$$

# انواع پاسخ ها

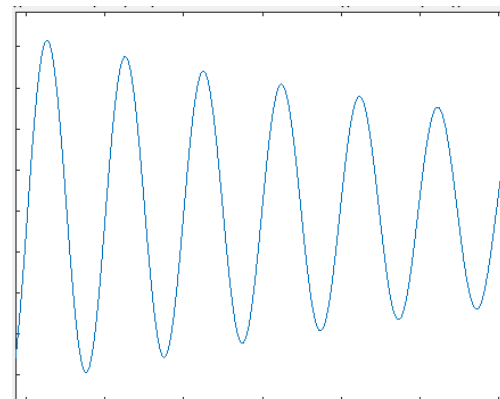
$m=10, k=1, c=1$



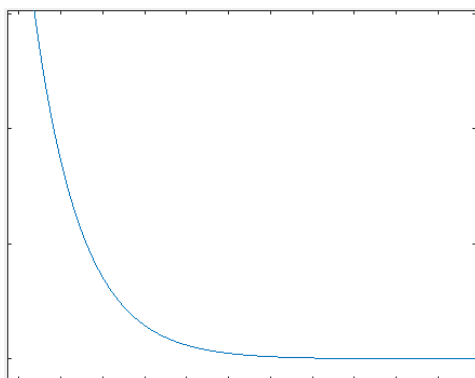
$m=10, k=10, c=1$



$m=10, k=100, c=1$



$m=10, k=1, c=10$



$m=10, k=1, c=100$

