سوالات « المپیاد های ریاضی لنینگراد »
۱۹۶۱

سال ششم

۱. سه نفر می توانند کاری را انجام دهند. زمانی که طول می کشد تا دومی و سومی با هم، کار را تمام کنند، برابر نصف زمانی است که اولی، به تنهایی کار را به انجام می رساند. ولی اگر اولی و سومی با هم کار کنند، به اندازه ی یک سوم زمانی وقت لازم دارند که دومی بخواهد به تنهایی کار را انجام دهد. اولی و دومی، با هم، چقدر سریع تر از سومی، کار را به پایان می رسانند؟

۲. ثابت کنید، بزرگترین بخشیاب مشترک بین مجموع دو عدد با کوچکترین مضرب مشترک آن ها، برابر است با بزرگترین بخشیاب مشترک این دو عدد.

۳. 20 دانش آموز، برای حل، 20 مساله، گرد هم آمدند. هر دانش آموز دو مساله را حل کرد، در ضمن هر مساله به وسیله ی دو دانش آموز حل شد. ثابت کنید، می توان ترتیبی داد که هر دانش آموز راه حل یکی از مساله ها را بیان کند، به نحوی که همه ی مساله ها توضیح داده شده باشند.

۴. دو نفر به نام های A و B، می خواهند از نقطه ی M، واقع در ۱۵ کیلومتری N، خود را به نقطه ی N برسانند. سرعت پیاده روی آن ها، ۶ کیلومتر در ساعت است. در ضمن، دوچرخه ای دارند که می توانند، با آن، با سرعت ۱۵ کیلومتر در ساعت حرکت کنند. A و B، از نقطه ی M، با هم به راه افتادند: A پیاده و B با دوچرخه. وقتی B، به C رسید، که از N به طرف M، پیاده می رفت، دوچرخه را به او داد، B مسیر خود را پیاده ادامه داد و C با دوچرخه، خود را به A رسانید. A دوچرخه را گرفت و سوار بر آن، مسیر خود را به طرف N ادامه داد. C، چه موقع از N حرکت کرده است، به شرطی که می دانیم، A و B با هم به N رسیده اند؟ سرعت پیاده و سواره C، همان سرعت های A و B است.

۵. ثابت کنید، از بین هر شش نفر، می توان سه نفر طوری جدا کرد، که یا دو به دو با هم آشنا ، و یا دو به دو با هم ناآشنا باشند.

سال هفتم

۶. همان مسأله ی ۱.

۷. دایره ی O، مربع K و خط راست L، داده شده اند. پاره خط راستی به طول معلوم، طوری رسم کنید که با خط راست L موازی باشد و، در ضمن، دو انتهای آن، به ترتیب، روی محیط دایره ی O و محیط مربع K قرار گیرد.

۸. عدد سه رقمی abc (که a رقم صدگان، b دهگان و c رقم یکان اش است) بر ۳۷ بخش پذیر است، ثابت کنید، مجموع دو عدد bca و cab هم بر ۳۷ بخش پذیر است.

۹. نقطه ی C، نقطه ی وسط پاره خط راست AB است. روی نیم خط راست به مبدأ C و غیر واقع بر خط راست AB، سه نقطه ی پیاپی P، M و Q را طوری انتخاب کرده ایم که |PM|=|MQ|. ثابت کنید:

$$|AP|+|BQ|>2|CM|$$

۱۰. 2n+1 چیز در اختیار داریم. ثابت کنید، تعداد دسته های انتخابی از این چیز ها، به نحوی که، در هر یک از آن ها، تعداد چیز ها، فرد باشد، برابر است با تعداد دسته های انتخابی، به شرطی که در هر یک، تعداد چیز ها زوج باشد.

سال هشتم

۱۱. اگر از یک چهارضلعی، طول ضلع ها و فاصله ی بین دو نقطه ی وسط قطر ها معلوم باشد، آن را رسم کنید.

۱۲. می دانیم A، B و $\sqrt{A}+\sqrt{B}$، عدد های گویا هستند. ثابت کنید $\sqrt{A}$ و $\sqrt{B}$ هم، عدد هایی گویا هستند.

۱۳. معادله ی $x^3-[x]=3$ را حل کنید.

۱۴. ثابت کنید، اگر نیمساز یک زاویه ی مثلث، زاویه ی بین میانه و ارتفاع را که از همان رأس می گذرند، نصف می کند، یا مثلث متساوی الساقین است و یا قائم الزاویه.

۱۵. n عدد x_1، x_2، ...، x_n داده شده اند. هر یک از این عدد ها، یا برابر است با ۱ و یا 1-، در ضمن

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0$$

ثابت کنید، عدد n بر ۴ بخش پذیر است.

۱۶. n نقطه روی محیط دایره ای قرار دارند و می دانیم، برای هر دو نقطه ی دلخواه، یکی از دو کمانی که آن ها را به هم پیوسته، از 120 درجه کمتر است. ثابت کنید، همه ی این n نقطه، روی کمانی برابر 120 درجه واقع اند.

سال نهم

۱۷. از مثلثی، یک رأس و خط های راستی که نیمساز های مثلث روی آن ها قرار دارند، معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۱۸. همان مسأله ی ۱۳.

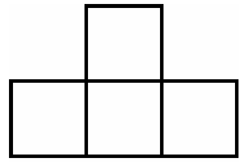
۱۹. 2n نقطه، روی یک صفحه داده شده اند. ثابت کنید، می توان آن ها را به یاری خط شکسته ی بسته ای چنان به هم وصل کرد که هیچ دو پاره خط راستی (از ضلع های این خط شکسته ی بسته) یکدیگر را قطع نکرده باشند.

۲۰. α زاویه ای معلوم است و می دانیم، در مثلث ABC

$$A+B=\alpha$$

مسیر حرکت رأس C از این مثلث را پیدا کنید، به شرطی که رأس های A و B روی ضلع های زاویه ای می لغزند.

۲۱. ثابت کنید صفحه ی شطرنجی 10×10 را، نمی توان با شکل های شبیه شکل ۱ پوشاند.



شکل ۱

۲۲. سه عدد درست و غیر صفر k، m و n مفروض اند و می دانیم k و m نسبت به هم اول اند. ثابت کنید، عدد درست x وجود دارد، به نحوی که mx+n بر k بخش پذیر باشد.

۲۳. ثابت کنید، همه ی عدد های به صورت

۱۱۵۶, ۱۱۱۵۵۶ , ۱۱۱۱۵۵۵۶ ,...

مجذور کامل اند.

سال های دهم و یازدهم

۲۴. قاعده ی یک هرم با حجم برابر V را، ذوزنقه ای تشکیل می دهد که طول قاعده های آن، برابر m و n است. به کمک صفحه ای، هرمی به حجم U را از آن جدا کرده ایم، به نحوی که مقطع صفحه با هرم اصلی، ذوزنقه ای با قاعده های به طول های m_1 و n_1 شده است. ثابت کنید:

$$\frac{U}{V}=\frac{(m_1+n_1)m_1n_1}{(m+n)mn}$$

۲۵. مطلوب است کمترین مقدار عبارت $\frac{a^2+x^2}{x}$، به شرطی که a>0 مقداری ثابت و x>0 کمیتی متغیر است.

۲۶. این چندجمله ای با ضریب های درست داده شده است:

$$f(x)=x^n+a_1x^{n+1}+a_2x^{n-2}+...+a_n$$

می دانیم p، ریشه ی گویای این چندجمله ای است. ثابت کنید: p عددی است درست و f(m)، برای هر عدد درست m، بر عدد p-m بخش پذیر است.

۲۷. ثابت کنید:

$$\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ = 3\sqrt{3}$$

۲۸. هر وجه مکعب را به دو مثلث قائم الزاویه تقسیم کرده، یکی از آن ها را به رنگ سفید و دیگری را به رنگ سیاه درآورده ایم. ثابت کنید، در واقع، تنها دو نوع رنگ آمیزی وجود دارد که، در آن ها، در هر رأس مکعب، مجموع زاویه های سفید با مجموع زاویه های سیاه برابر است. دو حالتی را که در اثر دوران مکعب، بر هم منطبق می شوند، یک حالت به حساب می آوریم.

۲۹. حلزونی با سرعت ثابت روی سطح میز می خزد. بعد از هر ۱۵ دقیقه، 90 درجه، به طرفی می چرخد و در فاصله ی بین هر دو چرخش، روی خط راست حرکت می کند. ثابت کنید، تنها بعد از تعداد درستی ساعت، می تواند به جای نخست خود برگردد.

۱۹۶۲

سال ششم

۱. سه نفر می خواهند از شهر A به شهر B بروند. آن ها، یک موتورسیکلت دارند که تنها دو نفر می توانند روی آن بنشینند. چگونه باید عمل کنند تا آخرین نفری از آن ها که به شهر B می رسد، کمترین زمان را صرف کرده باشد؟ این زمان را پیدا کنید. سرعت پیاده ۵ کیلومتر در ساعت، سرعت موتورسیکلت ۲۵ کیلومتر در ساعت و فاصله ی بین دو شهر A و B، برابر 60 کیلومتر است.

۲. دو عدد a و b، نسبت به هم اول اند. دو عدد a+b و a-b، چه بخشیاب مشترکی می توانند داشته باشند؟

۳. سن کسی، در سال ۱۹۶۲، از مجموع رقم های سال تولد اوف یک واحد بیشتر است. او چند سال دارد؟

۴. ۱۵ روزنامه، روی میزی را به طور کامل پوشانده اند. ثابت کنید، می توان هشت روزنامه برداشت، به نحوی که، بقیه ی روزنامه ها، دست کم $\frac{7}{15}$ سطح میز را پوشانده باشند.

۵. ثابت کنید، اسب بازی شطرنج را، روی صفحه ی شطرنجی 201×201 می توان طوری حرکت داد که در همه ی خانه ها، و در ضمن، در هر کدام تنها یک بار قرار گیرد.

۶. آیا عددی که دو رقم سمت راست آن، عدد هایی فرد اند، می تواند مجذور یک عدد درست باشد؟

سال هفتم

۷. ثابت کنید، با ضلع های یک چهارضلعی دلخواه، می توان یک ذوزنقه ساخت.

۸. همان مساله ی ۲.

۹. همان مساله ی ۴.

۱۰. در یک عدد شش رقمی، که بر ۷ بخش پذیر است، آخرین رقم سمت راست را به سمت چپ عدد برده ایم. ثابت کنید، عدد جدید هم بر ۷ بخش پذیر است.

* ۱۱. سطح دایره ای را، به ۴۹ بخش چنان تقسیم کرده ایم که هیچ سه بخشی، نقطه ی مشترک نداشته باشند. «نقشه ی» حاصل را با سه رنگ مختلف طوری رنگ کرده ایم که، هر دو بخش مجاور، رنگ های متفاوت داشته باشند. مرز دو بخش را، با هر دو رنگ در نظر می گیریم. ثابت کنید، روی محیط دایره، می توان دو نقطه طوری پیدا کرد که دو سطر یک قطر و، در ضمن به یک رنگ باشند.

۱۲. روی ضلع های AB و BC از مثلث ABC، مربع های ABDE و BCKL را ساخته ایم. مرکز این مربع ها را O_1 و O_2 و وسط پاره خط های راست DL و AC را، M_1 و M_2 می نامیم. ثابت کنید، چهارضلعی $O_1M_1O_2M_2$، مربع است.

سال هشتم

۱۳. چهار دایره، روی یک صفحه چنان قرار دارند که هر دایره بر دو دایره ی دیگر، از بیرون مماس است. ثابت کنید، نقطه های تماس، روی محیط یک دایره اند.

۱۴. عدد های درست a و b را می توان به صورت x^2-5y^2 نشان داد (x و y عدد های درستی هستند). ثابت کنید، عدد ab را هم، می توان به همین صورت نشان داد.

۱۵. این معادله را حل کنید

$$x(x+d)(x+2d)(x+3d)=a$$

۱۶. می دانیم $a+b+c=1$ و $m+n+p=1$، ثابت کنید:

$$-1\le am+bn+cp\le 1$$

۱۷. مثلثی با حداکثر مساحت، در نیم دایره ی مفروض، محاط کنید.

۱۸. سه دایره، با شعاع های برابر، در یک نقطه، برخورد دارند. ثابت کنید، سه نقطه ی دیگر برخورد، روی محیط دایره ای به همان شعاع واقع است.

۱۹. دایره ای با کمترین شعاع را پیدا کنید که، مثلث مفروض را در درون خود داشته باشد.

۲۰. می دانیم چندجمله ای

$$x^{2n}+a_1x^{2n-2}+a_2x^{2n-4}+...+a_{n-1}x^2+a_n$$

بر دوجمله ای $x-1$ بخش پذیر است. ثابت کنید، این چندجمله ای، بر x^2-1 بخش پذیر است.

۲۱. p عددی است اول، غیر از عدد های ۲ و ۵. ثابت کنید، عدد طبیعی k وجود دارد، به نحوی که بتوان عدد pk را (در عددنویسی دهدهی)، تنها با رقم های برابر واحد نوشت.

سال نهم

۲۲. همان مساله ی ۱۶.

۲۳. همان مساله ی ۲۰.

۲۴. شبکه ای از مربع های به ضلع واحد تشکیل شده است. یکی از مربع های شبکه را به دلخواه انتخاب می کنیم. ثابت کنید، فاصله ی هر نقطه ی گرهی دلخواه از این شبکه تا یکی از رأس های این مربع، عددی است گنگ.

۲۵. مجموع ده عدد، برابر است با صفر. مجموع همه ی حاصل ضرب های دو به دو ی آن ها هم، برابر صفر است. ثابت کنید، مجموع مکعب های این عدد ها، برابر صفر است.

۲۶. مثلثی با زاویه های حاده مفروض است. نقطه ای در داخل زاویه ای از آن انتخاب کرده ایم، که فاصله ی از آن تا هر یک از رأس های مثلث، از کوچکترین ضلع مثلث، کوچکتر است. ثابت کنید، مجموع فاصله های از این نقطه تا سه رأس مثلث، از $\frac{۳}{۴}$ محیط تجاوز نمی کند.

۲۷. همان مسأله ی ۲۱.

۲۸. روی صفحه ای، n نقطه که بر یک خط راست واقع نیستند، داده شده است. ثابت کنید، می توان خط شکسته ی بسته ای رسم کرد که از همه ی این نقطه ها بگذرد، بدون اینکه خودش را قطع کند.

* ۲۹. باری به وزن ۱۳/۵ تن را در صندوق ها یی جا داده ایم، به نحوی که وزن هر صندوق با بار از ۳۵۰ کیلوگرم تجاوز نمی کند. ثابت کنید، همه ی بار را می توان در ۱۱ کامیون یک تن و نیمی بار زد.

سال دهم

۳۰. در یک مربع به ضلع واحد، یک چهارضلعی محاط کرده ایم که چهار رأس آن روی چهار ضلع مربع باشد. ثابت کنید، یکی از ضلع های آن طولی دارد که از $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ کمتر نیست.

۳۱. مجموع ده عدد برابر صفر و مجموع همه ی حاصلضرب های دو به دو ی آن ها هم، برابر صفر است. مجموع توان های چهارم این عدد ها را پیدا کنید.

۳۲. مخرج این کسر را گویا کنید:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}+\sqrt[۳]{c}}$$

۳۳. این معادله را حل کنید

$$(۳x+۲)^{۴}+(۲x-۴)^{۴}=(۲x+۳)^{۴}+(۴x-۲)^{۴}$$

۳۴. یک زاویه و دو پاره خط راست، روی ضلع های آن داده شده است. نقطه ی O واقع در درون زاویه را به نقطه های انتهایی این پاره خط های راست وصل کرده ایم. مجموع مساحت های دو مثلثی که به این ترتیب به دست می آید، برابر است با S . مطلوب است مکان هندسی نقطه ی M به شرطی که مجموع چنین مساحت هایی برای آن، برابر S باشد.

۳۵. مجموع $\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^{k}\binom{k}{n}kx$ را پیدا کنید.

۳۶. جواب های طبیعی این معادله را پیدا کنید:

$$۱-\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۴+\cdots+\cfrac{۱}{n}}}}=\cfrac{۱}{x_{۱}+\cfrac{۱}{x_{۲}+\cfrac{۱}{x_{۳}+\cdots+\cfrac{۱}{x_{n}}}}}$$

۳۷. یک چندوجهی داده شده است. تعداد ضلع های همه ی وجه ها، به جز یکی، بر عدد طبیعی مفروض n بخش پذیر است ($n>۱$). ثابت کنید، وجه های این چندوجهی را نمی توان با دو رنگ، چنان رنگ کرد، که هر دو وجه مجاور، به رنگ های متفاوت باشند.

۳۸. در یک n ضلعی کوژ (محدب)، همه ی ضلع ها و قطر ها را امتداد داده ایم تا به صورت خط های راست در آیند. در ضمن، از این خط های راست، هیچ دو خط راستی موازی نیستند و هیچ سه خط راستی از یک نقطه نمی گذرند. این خط های راست، در درون n ضلعی، در چند نقطه یکدیگر را قطع می کنند؟ بیرون n ضلعی، در چند نقطه یکدیگر را قطع می کنند؟

سال یازدهم

۳۹. همان مساله ی ۳۰.

۴۰. این چندجمله ای داده شده است:

$$x^{kn}+a_{۱}x^{k(n-۱)}+a_{۲}x^{k(n-۲)}+\cdots+a_{n-۱}x^{k}+a_{n}$$

ثابت کنید، اگر این چندجمله ای بر $x-۱$ بخش پذیر باشد، آن وقت بر $x^{k}-۱$ هم بخش پذیر است.

۴۱. همان مساله ی ۳۳.

۴۲. مجموع $\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^{k}\binom{n}{k}k^{۲}$ را پیدا کنید.

۴۳. همان مساله ی ۳۲.

۴۴. همان مساله ی ۳۴.

۴۵. همان مساله ی ۳۷.

۴۶. همان مساله ی ۳۶.

۴۷. در درون مربع ۱×۱، چندضلعی کوژی به مساحت بیشتر از $\frac{۱}{۲}$ قرار داده ایم. ثابت کنید، در چندضلعی، وتر با طول بیشتر از $\frac{۱}{۲}$ پیدا می شود که با ضلعی از مربع، که از قبل تعیین شده است، موازی باشد.

دور نهایی

۴۸. ثابت کنید، با ۷ دایره ی به شعاع واحد، می توان دایره ای به شعاع ۲ را به طور کامل پوشاند، ولی با این ۷ دایره، نمی توان دایره ای به شعاع بزرگتر از ۲ را پوشاند.

۴۹. در مربع با مساحت ۵، ۹ چندضلعی قرار داده ایم، که مساحت هر یک برابر واحد است. ثابت کنید، دو تا از این چندضلعی ها، سطح مشترکی دارند که از $\frac{۱}{۹}$ کمتر نیست.

۵۰. سطح کره ای را به سه بخش تقسیم کرده ایم، به نحوی که هر بخش، رنگ خودش را دارد و هر مرزِ دو بخش دارای دو رنگ است. ثابت کنید، می توان قطری از کره را پیدا کرد که دو سر آن از نظر رنگ، یکسان باشند.

۵۱. رقم های یک عدد، تنها از ۰ و ۱ تشکیل شده اند. در ضمن، تعداد رقم های ۱، از دو تا کمتر نیست. ثابت کنید. چنین عددی نمی تواند مجذور یک عدد درست باشد.
۵۲. ثابت کنید، از بین k عدد درست، می توان چند عدد انتخاب کرد، به نحوی که مجموع آن ها، بر k بخش پذیر باشد.
۵۳. این معادله را حل کنید:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}n(n-1)}-x^{\left[\frac{1}{2}n\right]}}{x-1}=0$$

* ۵۴. با عدد های ۱، ۲، ۳، ...، n، دنباله های بی پایانی ساخته ایم. دو جمله از دو دنباله را، یکسان می نامیم، وقتی که با هم برابر باشند و، در ضمن، شماره ی ردیف آن ها، در دو دنباله، یکی باشد. چند دنباله می توان ساخت، به نحوی که هر دو دنباله ی دلخواه از بین آن ها، درست k جمله ی یکسان داشته باشند.

۱۹۶۳

سال ششم

۱. دو نفر، در یک لحظه، از A به طرف B حرکت کردند: اولی از طریق جاده ی آسفالت و با سرعت ۵ کیلومتر در ساعت و دومی از «راه میان بر» و با سرعت ۴ کیلومتر در ساعت. اولی، یک ساعت دیر تر از دومی به B رسید و ۶ کیلومتر هم بیشتر راه رفت. فاصله ی A تا B، از طریق جاده ی آسفالت چقدر است؟
۲. در جاده ی آسفالت، پیاده با سرعت ۵ کیلومتر در ساعت می رود. در همین جاده و از دو طرف، اتوبوس هایی با سرعت های یکسان در رفت و آمدند که هر ۵ دقیقه یک بار، از رو به رو به هم می رسند. در ساعت ۱۲ پیاده متوجه شد، اتوبوس ها در کنار او با هم رو به رو شدند و هر کدام به راه خود ادامه دادند. در ساعت ۱۴، دوباره اتوبوس ها، در کنار او به هم رسیدند. معلوم شد، در همین فاصله ی زمانی، تعداد اتوبوس هایی که از سمت مقابل به او رسیده اند، ۴ تا بیشتر از تعداد اتوبوس هایی است که از او جلو افتاده اند. سرعت اتوبوس را پیدا کنید.
۳. ثابت کنید، عدد $43^{43}-17^{17}$ بر ۱۰ بخش پذیر است.
۴. از صفحه ی شطرنج، دو خانه را در مرز صفحه، جدا کرده ایم. در چه حالت هایی می توان و در چه حالت هایی نمی توان، بقیه ی خانه های صفحه ی شطرنج را، با شکل هایی شبیه شکل ۲ پوشاند، بدون اینکه روی هم قرار گیرند؟

شکل ۲

۵. فاصله ی هوایی از شهر A تا شهر B برابر ۳۰کیلومتر، از B تا C برابر ۸۰ کیلومتر، از C تا D برابر ۲۳۶ کیلومتر، از D تا E برابر ۸۶ کیلومتر و از E تا A برابر ۴۰ کیلومتر است. فاصله ی هوایی از E تا C را پیدا کنید.
۶. آیا می توان عدد های از ۱ تا ۱۹۶۳ را طوری به صورت یک دنباله نوشت، به نحوی که هر دو جمله ی مجاور و، هر دو جمله ای که تنها یک جمله بین خود دارند، نسبت به هم اول باشند؟

سال هفتم

۷. مساحت یک چهارضلعی برابر ۳ سانتی متر مربع و طول قطر های آن، برابر ۶ سانتی متر و ۲ سانتیمتر است. زاویه ی بین دو قطر را پیدا کنید.
۸. ثابت کنید، عدد $2^{3456789}+1$، عددی مرکب (یعنی غیر اول) است.
۹. ۲۰ نفر در بازی شطرنج شرکت داشتند. کسی که در ردیف نوزدهم قرار گرفت، ۹/۵ امتیاز آورده بود. امتیاز های بقیه ی شرکت کنندگان را چگونه می توان در نظر گرفت؟
۱۰. مجموع طول های پاره خط های راستی که وسط ضلع های رو به رو را در یک چهارضلعی به هم وصل می کنند، برابر است با نصف محیط چهارضلعی. ثابت کنید، این چهارضلعی، متوازی الاضلاع است.
۱۱. در اتوبوس شهری، به جز بلیت فروش، ۴۰ مسافر نشسته اند که در جیب خود، تنها سکه های ۱۰، ۱۵، و ۲۰ کوپکی و، روی هم، ۴۹ سکه دارند. ثابت کنید، مسافر ها نمی توانند، طوری ترتیب کار را بدهند که پول بلیت های خود را بپردازند (در سال ۱۹۶۳، ارزش بلیت اتوبوس شهری، برای هر نفر، ۵ کوپک بوده است: هر ۱۰۰ کوپک برابر یک روبل است).
۱۲. عدد طبیعی A را بر همه ی عدد های کوچکتر از خودش تقسیم و سپس، همه ی باقی مانده های مختلف حاصل از تقسیم ها را با هم جمع کرده ایم، حاصل جمع برابر عدد A شده است. A را پیدا کنید (منظور از باقی مانده های مختلف، این است که اگر مثلا دو یا چند بار، باقی مانده ی r به دست آید، تنها یک بار از آن استفاده کنیم).
۱۳. از یک صفحه ی شطرنجی، دو خانه ی دلخواه را جدا کرده ایم. در چه حالتی می توان و در چه حالتی نمی توان باقی مانده ی صفحه ی شطرنج را با مهره های دو خانه ای (شکل ۲) به طور کامل پوشاند، بدون این که روی هم قرار گیرند؟

سال هشتم

۱۴. نقطه ی A را روی میانه ای که از رأس به قاعده ی مثلث رسم شده است، انتخاب کرده ایم. مجموع فاصله های از نقطه ی A تا ضلع های جانبی مثلث، برابر است با S. فاصله از نقطه ی A تا هر یک از ضلع های جانبی را پیدا کنید، به شرطی که طول این ضلع ها، برابر x و y باشد.

۱۵. کسر دهدهی $\overline{\circ/abc\cdots}$ به این ترتیب ساخته شده است: a و b دو رقم دلخواه اند؛ از آن به بعد، هر رقم برابر است با باقی مانده ی حاصل از تقسیم مجموع دو رقم قبل از آن، بر ۱۰. ثابت کنید این کسر، کسری متناوب ساده است.
۱۶. روی یک صفحه، یک m ضلعی و یک n ضلعی کوژ داده شده است (m>n) این دو چندضلعی، صفحه را، حداکثر به چند بخش تقسیم می کنند؟
۱۷. مجموع سه عدد درست مجذور کامل، بر ۹ بخش پذیر است. ثابت کنید، در بین آن ها، دو عدد وجود دارد که تفاضلشان، بر ۹ بخش پذیر است.
۱۸. $k+2$ عدد درست داده شده است. ثابت کنید، در بین آن ها دو عدد وجود دارد که یا مجموع آن ها و یا تفاضل آن ها بر $2k$ بخش پذیر است.
۱۹. زاویه ی قائمه ای دور رأس خود دوران می کند. مطلوب است، مکان هندسی وسط پاره خط های راستی که نقطه های برخورد ضلع های زاویه با دایره ی مفروضی را به هم وصل می کنند.
سال نهم
۲۰. عدد پنج رقمی $\overline{abcde}$، بر ۴۱ بخش پذیر است. ثابت کنید، هر عددی که از تبدیل دوری رقم های این عدد به دست آید، بر ۴۱ بخش پذیر است.
۲۱. دو گروه عدد داریم:

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$$
$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$$

ثابت کنید:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$$

۲۲. از ذوزنقه ای، طول هر یک از قطر ها و ساق ها معلوم است. ذوزنقه را رسم کنید.
۲۳. دو دایره با شعاع $R = \frac{1}{2\pi}$ مفروض اند. روی یکی از دایره ها ۲۰ نقطه را نشان گذاشته ایم و روی دیگری چند کمان انتخاب کرده ایم که مجموع طول های آن ها از $\frac{1}{20}$ کمتر است. ثابت کنید، می توان یکی از دایره ها را طوری روی دیگری قرار داد که هیچ کدام از نقطه هایی که نشان گذاشته ایم، در درون کمان های انتخابی، قرار نگیرند.
۲۴. همان مسأله ی ۱۸.
۲۵. این معادله را، در مجموعه ی عدد های طبیعی حل کندی:

$$(z+1)^x - z^y = -1$$

سال های دهم و یازدهم
۲۶. ثابت کنید، اگر دو معادله ی با ضریب های درست

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0 \text{ و } x^2 + p_2x + q_2 = 0$$

دارای یک ریشه ی مشترک باشند و، این ریشه ی مشترک، عدد درست نباشد، آن وقت $p_1 = p_2$ و $q_1 = q_2$.
۲۷. یک کنج سه وجهی و نقطه ی A روی یکی از یال های آن داده شده است. نقطه های B و C روی دو یال دیگر کنج حرکت می کنند. مکان هندسی گرانیگاه (مرکز ثقل) مثلث ABC را پیدا کنید.
۲۸. این معادله داده شده است:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

که در آن، هر یک از x_i ها برابر است با ۰ یا ۱؛ در ضمن، همه ی عدد های a_1، a_2، ...، a_n، با هم برابر صفر نیستند (ولی برخی از آن ها می توانند برابر صفر باشند). ثابت کنید، بیش از نصف انتخاب هایی که برای

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

وجود دارد، نمی توانند در معادله صدق کنند.
۲۹. در چندوجهی، زاویه ی مسطحه ی α را، پیوسته به یال می نامیم، وقتی که، این یال، ضلعی از زاویه ی α باشد. ثابت کنید، در هر چهاروجهی (هرم با قاعده ی مثلثی)، یالی وجود دارد که زاویه های پیوسته به آن، حاده هستند.
۳۰. ثابت کنید، برای k دنباله ی بی پایان زیر، که از عدد های طبیعی تشکیل شده اند،

$$x_1^1, x_2^1, x_3^1, \cdots$$
$$x_1^2, x_2^2, x_3^2, \cdots$$
$$x_1^3, x_2^3, x_3^3, \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1^k, x_2^k, x_3^k, \cdots$$

می توان شماره های p و q را پیدا کرد، به نحوی که، برای هر $1 \le i \le k$ داشته باشیم: $x_p^i \ge x_q^i$.

۳۱. ثابت کنید، نمی توان ۱۰ مربعِ برابر را طوری روی صفحه رسم کرد که حتا یکی از آن ها، به درون دیگری رخنه نکرده باشد، ولی یکی از آن ها، با همه ی دیگران، تماس داشته باشند.

دور نهایی

۳۲. ۱۹۶۳ رقم بعد از ممیز را در بیان دهدهی این عدد پیدا کنید:

$$\left(\sqrt{26}+5\right)^{1963}$$

۳۳. قوطی کبریت را، چگونه در فضا نگه داریم که تصویر قائم آن بر صفحه، حداکثر مساحت را داشته باشد؟

۳۴. پنج دایره، روی یک صفحه، دو به دو متقاطع اند. ثابت کنید، سه تا از آن ها، در یک نقطه مشترک اند.

۳۵. عدد طبیعی a، بر عدد های ۱، ۲، ۳، ...، ۹ بخش پذیر است. ثابت کنید، اگر عدد $2a$ را به صورت مجموعی از عدد های ۱، ۲، ۳، ...، ۹ بنویسیم، آن وقت در بین آن ها می توان چند عدد پیدا کرد که مجموعشان بر a، بخش پذیر باشد.

۳۶. چهار عدد مثبت داده شده است، در ضمن، مجموع هر سه تا از آن ها، از چهارمی بزرگتر است. ثابت کنید، یک چهاروجهی (هرمی با قاعده ی مثلثی) وجود دارد، به نحوی که این عدد ها، مساحت های وجه های آن باشند.

۳۷. این معادله را در مجموعه ی عدد های درست حل کنید:

$$x^4 - 2y^4 - 4z^4 - 8t^4 = 0$$

۳۸. ثابت کنید، خط شکسته ی بسته ی پیرامون برابر واحد را، می توان با دایره ای به شعاع برابر $\frac{1}{4}$ پوشاند (خط شکسته، روی یک صفحه قرار دارد).

۳۹. آیا مثلثی وجود دارد که، طول ضلع ها، ارتفاع ها و نیمساز های آن، عدد های درستی باشند؟

۴۰. به ازای چه مقدار n، عدد $2^n + 1$، برابر توانی از یک عدد طبیعی است؟

۴۱. از دو نقطه ی گرهی یک صفحه ی شطرنجی، دو خط راست موازی رسم کرده ایم. ثابت کنید، در هر حال، روی نواری که به دست می آید، بی نهایت نقطه ی گرهی وجود دارد.

۱۹۶۴

سال ششم

۱. سه نفر - «آنیلوف»، «بوریسوف»، «ووروبیف» - هر کدام شش بار، به یک هدف تیراندازی کردند. در نتیجه ی کار، معلوم شد، هر سه نفر، امتیاز های برابر آورده اند. «آنیلوف» در سه شلیک اول، ۴۳ امتیاز و «بوریسوف» در شلیک اول سه امتیاز آورد. می دانیم، امتیاز ۵۰ یک بار، امتیاز ۲۵ دو بار، امتیاز ۲۰ سه بار، امتیاز ۱۰ سه بار، امتیاز ۵ دو بار، امتیاز ۳ دو بار، امتیاز ۲ دو بار و امتیاز ۱ یک بار به دست آمده است. هر یک از این سه نفر، در هر شلیک، چند امتیاز به دست آورده اند؟

۲. ثابت کنید، صفحه ی شطرنجی 10×10 را نمی توان با ۲۵ تکه ی به صورت شکل ۳، پوشاند.

۳. در هر خانه ی صفحه ی شطرنج، عدد هایی طبیعی نوشته شده است، به نحوی که، هر عدد برابر است با واسطه ی حسابی دو عدد مجاورش. مجموع عدد های واقع در خانه های چهار گوشه ی صفحه، برابر است با ۱۶. عدد واقع در خانه ی $e2$ را پیدا کنید.

۴. جدولی 100×100 در اختیار داریم. حداقل، چند حرف می توان در خانه های این جدول قرار داد، به نحوی که هیچ دو خانه ای که در کنار هم قرار دارند، شامل حرف های یکسان نباشند؟

۵. گروه سربازان را به شکل مستطیلی به صف کرده ایم. از هر ردیف، بلندترین مرد را، و از بین این بلند ترین ها، کوتاه ترین مرد را انتخاب کردیم. سپس، از هر ستون کوتاه ترین مرد را، و از بین این کوتاه ترین ها بلند ترین مرد را انتخاب کردیم. کدام یک از این دو نفر بلند تر اند؟

۶. حاصل ضرب سه عددی را پیدا کنید که مجموع، مجموع مجذور ها و مجموع مکعب های آن ها، برابر واحد باشد.

سال هفتم

۷. همه ی زاویه های یک n ضلعی کوژ، منفرجه اند.ثابت کنید، در این n ضلعی، مجموع طول های قطر ها، از مجموع طول های ضلع ها بیشتر است.

۸. همه ی عدد های درست x و y را پیدا کنید که، به ازای هر یک از آن ها، $x^{۴}+۴y^{۴}$، عددی اول باشد.
۹. مثلث ABC داده شده است. روی ضلع های این مثلث، متوازی الاضلاع های ABKL، BCMN، و ACFG را ساخته ایم. ثابت کنید، با پاره خط های راست KN، MF و GL، می توان یک مثلث ساخت.
۱۰. همان مساله ی ۲.
۱۱. حداکثر، چند عدد مختلف می توان پیدا کرد که، هر یک از آن ها از ۵۰ کوچکتر و هر دو تا از آن ها، نسبت به هم اول باشند؟
۱۲. نقطه های D و E به ترتیب، وسط ضلع های AB و BC از مثلث ABC هستند. نقطه ی M روی AC و $|ME|>|EC|$. ثابت کنید:

$$|MD|<|AD|$$

سال هشتم
۱۳. عدد های اول p، q، و r را پیدا کنید، به شرطی که

$$pqr=۵(p+q+r)$$

۱۴. ثابت کنید، به شرطی که $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}=\frac{a}{c}$، داریم:

$$\frac{\overline{abb\cdots bb}}{\overline{bb\cdots bbc}}=\frac{a}{c}$$

هر عدد صورت و مخرج کسر سمت چپ برابری، دارای n رقم است.
۱۵. مثلث را با معلوم بودن محیط، ارتفاع و زاویه ی مجاور قاعده، رسم کنید.
۱۶. ثابت کنید، مجذور مجموع n عدد مختلفی که مخالف صفر و هر کدام مجذور کامل اند، در ضمن برابر است با مجموع n مجذور کامل درست و مخالف صفر.
۱۷. در چهارضلعی ABCD، قطر های AC و BD را رسم کرده ایم. ثابت کنید، اگر دایره های محاطی مثلث های ABC و ADC، بر هم مماس باشند، آن وقت دایره های محاط در مثلث های BAD و BCD هم مماس بر یکدیگر اند.
۱۸. اگر عدد های a و n نسبت به هم اول باشند، ثابت کنید، می توان عدد های درست x و y را پیدا کرد، به نحوی که $|x|<\sqrt{n}$، $|y|<\sqrt{n}$ و $۵x-y$ بخش پذیر بر n باشد.
سال نهم
۱۹. همان مساله ی ۱۵.
۲۰. در درون یک مربع به ضلع واحد، ۵۱ نقطه قرار دارد. ثابت کنید، در بین آن ها، سه نقطه پیدا می شود که در درون دایره ی به شعاع $\frac{۱}{۷}$ جا بگیرند.
۲۱. ثابت کنید، اگر برای عدد طبیعی n داشته باشیم:

$$\left[\frac{n}{۱}\right]+\left[\frac{n}{۲}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right]=۲+\left[\frac{n-۱}{۱}\right]+\left[\frac{n-۱}{۲}\right]+\cdots+\left[\frac{n-۱}{n-۱}\right]$$

آن وقت n، عددی اول است.
۲۲. همان مساله ی ۱۶.
۲۳. در مثلث ABC، از رأس A به نقطه ی D واقع بر ضلع BC وصل کرده ایم.
۱) ثابت کنید، مرکز های دایره های محیطی مثلث های ABD، ADC، ABC و نقطه ی A، روی محیط یک دایره اند.
۲) نقطه ی D را طوری پیدا کنید که شعاع این دایره، کمترین مقدار ممکن باشد.
۲۴. همان مساله ی ۱۸.
سال های دهم و یازدهم
۲۵. در درون مربع به ضلع واحد، n ضلعی P قرار دارد. ثابت کنید، می توان سه رأس A، B و C از n ضلعی P را پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم: $S_{ABC}\le\frac{۱۰۰}{n^{۲}}$.
۲۶. دو دستگاه مختصات قائم، N نقطه با مختصات درست (x,y) با شرط $x^{۲}+y^{۲}<n$ وجود دارد (n، عددی درست است). ثابت کنید:

$$N\ge ۳(n-۱)^{۲}$$

۲۷. دایره ای به شعاع واحد، و چهار نقطه روی محیط آن داده شده است. از هر دو نقطه ی مجاور، دایره ای به شعاع واحد گذرانده ایم. ثابت کنید، چهار نقطه ی برخورد دیگر دایره های اخیر، روی محیط یک دایره قرار دارند.

۲۸. فرض کنید، در تجزیه ی عدد n، عامل اول ۲، با نمای α_n ظاهر شود

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

ثابت کنید، در دنباله ی

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{2^n - 1}$$

تعداد عدد های زوج، با تعداد عدد های فرد، یک واحد اختلاف دارد.

۲۹. دو نقطه ی A و B و خط راست L روی یک صفحه اند. نقطه ی E را روی خط راست L طوری پیدا کنید که $|AE|+|BE|$ برابر عدد مفروض d باشد.

۳۰. S را دسته ای از عدد های طبیعی کوچکتر از عدد اول مفروض p می گیریم. در این دسته، اگر عدد های a و b وجود داشته باشد، باقی مانده ی حاصل از تقسیم عدد های ab، a و b بر p هم وجود دارد. ثابت کنید، اگر در S، دست کم دو عدد وجود داشته باشد، آن وقت مجموع عدد های دسته ی S، بر p بخش پذیر است.

دور نهایی

۳۱. رأس های یک مثلث با زاویه های حاده، روی دو ضلع رو به رو از یک مربع به ضلع واحد و رأس های مثلث دوم با زاویه های حاده روی دو ضلع رو به روی دیگر این مربع قرار دارند. ثابت کنید، بخش مشترک مساحت های این دو مثلث، از چهار برابر عدد حاصل ضرب مساحت های دو مثلث تجاوز نمی کند.

۳۲. عدد های طبیعی a_1، a_2، ...، a_n مفروض اند که، در بین آن ها، ممکن است عدد های برابر هم وجود داشته باشد. f_k را تعداد عدد هایی، از این دسته عدد ها می نامیم که از k کوچکتر نیستند. ثابت کنید:

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

۳۳. مربع به ضلع واحد، n شکل را طوری پوشانده است که، هر نقطه ی آن، دست کم متعلق به q شکل است. ثابت کنید، لااقل یک شکل وجود دارد که، مساحت آن، از $\frac{q}{n}$ کمتر نیست.

۳۴. همه ی عدد های حقیقی را، به دو گروه بخش کرده ایم. ثابت کنید، برای هر $k > 0$، سه عدد $a < b < c$ از یک گروه پیدا می شود، به نحوی که داشته باشیم

$$\frac{c-b}{b-a} = k$$

۳۵. در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد، مثلثی با زاویه های معلوم محاط کنید که حداکثر مساحت را داشته باشد.

* ۳۶. n نفر به ضرب سکه مشغول اند. برخی از آن ها، تنها سکه های تقلبی درست می کنند و بقیه، فقط سکه های واقعی. وزن سکه ی تقلبی، با وزن سکه ی واقعی فرق دارد. یک ترازو با گونه های مختلف وزنه و یک سکه ی واقعی در اختیار داریم. از هر کدام از ضرب کنندگان سکه، هر قدر سکه که مایل باشیم، می توانیم بگیریم. چگونه می توان، با سه بار وزن کردن، همه ی کسانی را که به ساختن سکه ی تقلبی مشغول اند، شناخت؟

۱۹۶۵

سال ششم

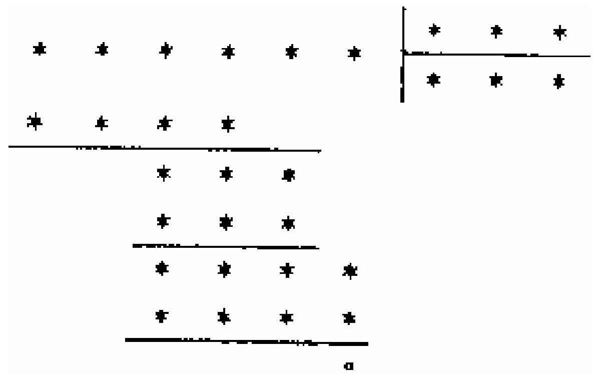
۱. در کارگاه صحافی، ۹۲ برگ کاغذ سفید و ۱۳۵ برگ کاغذ رنگی وجود دارد. برای صحافی هر کتاب، یک برگ کاغذ سفید یک برگ کاغذ رنگی لازم است. بعد از این که چند کتاب صحافی شد، تعداد برگ های باقی مانده سفید، نصف تعداد برگ های رنگی بود. چند کتاب صحافی شده است؟

۲. عدد های طبیعی از ۱ تا ۱۹۶۵ را در هم ضرب کرده ایم. ثابت کنید، آخرین رقم غیر صفر سمت راست حاصل ضرب، عددی زوج است.

۳. لاستیک های جلو اتومبیل، بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیک های عقب بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر ساییده می شود. چه موقع باید جای لاستیک های جلو و عقب را با هم عوض کنیم تا با هم و در یک زمان ساییده شوند؟

۴. مستطیل ۶۵×۱۹ (سانتی متری) را به وسیله ی خط های راست موازی ضلع ها، به مربع هایی به ضلع یک سانتی متر بخش کرده ایم. اگر قطر این مستطیل را رسم کنیم، روی هم به چند بخش تقسیم می شود؟

۵. بخشی، بخشیاب و خارج قسمت را در این تقسیم پیدا کنید:



۶. عدد های فرد از ۱ تا ۴۹ را، به این ترتیب نوشته ایم:

۱	۳	۵	۷	۹
۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹
۲۱	۲۳	۲۵	۲۷	۲۹
۳۱	۳۳	۳۵	۳۷	۳۹
۴۱	۴۳	۴۵	۴۷	۴۹

از این عدد ها، پنج عدد طوری انتخاب کنید که هیچ دو تا از آن ها، متعلق به یک سطر یا متعلق به یک ستون نباشند. مجموع این پنج عدد، چند است؟

سال هفتم

۷. ثابت کنید، عددی که تعداد بخشیاب های آن، عددی فرد باشد، مجذور کامل است.

۸. در مثلث ABC، که مساحتی برابر S دارد، میانه های AK و BE را رسم کرده ایم. اگر این دو میانه، در نقطه ی O با هم برخورد کرده باشند، مساحت چهارضلعی CKOE را پیدا کنید.

۹. لاستیک های جلو اتومبیل، بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیک های عقب، بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر ساییده می شوند. چه موقع، جای لاستیک های جلو و عقب را با هم عوض کنیم تا اتومبیل بتواند بیشترین فاصله را، با همین لاستیک ها بپیماید؟

۱۰. مستطیل ۶۰×۲۴ را با رسم خط های راست موازی ضلع ها، به مربع های به ضلع واحد بخش کرده ایم. اگر قطر مستطیل را هم رسم کنیم، چند بخش جدید در مستطیل به وجود می آید؟

۱۱. اگر [A] به معنای بزرگترین عدد درستی باشد که از A تجاوز نمی کند، این معادله را حل کنید:

$$\left[\frac{۵+۶x}{۸}\right]=\frac{۱۵x-۷}{۵}$$

۱۲. روی صفحه ی سفیدی رنگ پاشیده ایم. ثابت کنید، می توان دو نقطه ی هم رنگ پیدا کرد، به نحوی که فاصله ی بین آن ها، برابر ۱۹۶۵ متر باشد.

سال هشتم

۱۳. مستطیل ۶۰×۲۴ را، با رسم خط های راست موازی با ضلع ها، به مربع ها ی به ضلع واحد بخش کرده ایم. خط راست دیگری رسم کنید که، پس از آن، تعداد بخش های مستطیل، حداکثر مقدار ممکن شود.

۱۴. مهندسان همیشه راست و بازرگانان همیشه دروغ می گویند. F و G مهندس اند. A توضیح می دهد، که B تاکید کرد، که C باور دارد، که D می گوید، که E اصرار می کند که F مهندس بودن G را نفی می کند. C هم توضیح می دهد که D بازرگان است. اگر A بازرگان باشد، روی هم در این جا، چند بازرگان وجود دارد؟

۱۵. جاده ی مستقیمی از دشت می گذرد. جهان گرد، روی جاده در نقطه ی O ایستاده است. او می تواند از طریق جاده، با سرعت ۶ کیلومتر در ساعت و از طریق دشت، با سرعت ۳ کیلومتر در ساعت حرکت کند. مطلوب است مکان هندسی نقطه هایی که، جهان گرد می تواند بعد از یک ساعت در آن جا ها باشد.

۱۶. همان مساله ی ۱۱.

۱۷. در کشوری، هر دو شهر، به وسیله ی جاده به هم مربوط اند؛ ولی هر جاده، یک طرفه است، یعنی تنها در یک جهتِ آن می توان حرکت کرد. ثابت کنید، شهری وجود دارد که، با خارج شدن از آن می توان، از همه ی شهر های کشور، و از هر کدام تنها یک بار، عبور کرد.

۱۸. هشت عدد اول پیدا کنید، به نحوی که مجموع مجذور های آن ها با ۹۹۲، از چهار برابر حاصل ضرب آن ها تجاوز نکند.

سال نهم

۱۹. با دو پاره خط راست به طول واحد، از یک زاویه ی مفروض، یک چهارضلعی جدا کنید که حداکثر مساحت ممکن را داشته باشد.

۲۰. همان مساله ی ۱۴.

۲۱. متوازی الاضلاع را به کمک خط های راست موازی ضلع های آن، به چند بخش تقسیم کرده ایم؛ در ضمن، یکی از ضلع ها به m بخش و دیگری به n بخش تقسیم شده است. با رسم یک خط راست دیگر، متوازی الاضلاع را، حداکثر به چند بخش می توان تقسیم کرد؟

۲۲. برای طول های ضلع های مثلث ABC داریم:

$$|AB|.|BC|.|AC| \le ۶۰$$

روی ضلع های AB، BC، و AC، به ترتیب، نقطه های C' و A' و B' را انتخاب کرده ایم. ثابت کنید:

$$|AC'|.|C'B|.|BA'|.|A'C|.|CB'|.|B'A| < |AB|.|BC|.|AC|$$

۲۳. $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n، و $B_۱$، $B_۲$، ...، B_n، دو تبدیل مختلف از عدد های ۱، ۲، ...، n هستند. ثابت کنید، اگر n عددی زوج باشد، دست کم دو جمله از دنباله ی

$$A_۱ + B_۱, A_۲ + B_۲, \cdots, A_n + B_n$$

در تقسیم بر n، به یک باقی مانده می رسند.

* ۲۴. n دایره در روی صفحه، مساحتی برابر ۱ واحد مربع را اشغال کرده اند. ثابت کنید، می توان از بین آن ها، چند دایره ی غیر متقاطع انتخاب کرد که، مجموع مساحت های آن ها، بیشتر از $\frac{۱}{۹}$ واحد مربع باشد.

سال های دهم و یازدهم

۲۵. این معادله را، در مجموعه ی عدد های درست حل کنید:

$$۶xy - ۴x + ۹y - ۳۶۶ = ۰$$

۲۶. این مجموع را محاسبه کنید:

$$\frac{۱}{\cos\alpha\cos۲\alpha} + \frac{۱}{\cos۲\alpha\cos۳\alpha} + \cdots + \frac{۱}{\cos(n-۱)\alpha\cos n\alpha}$$

۲۷. همان مساله ی ۲۳.

۲۸. برای کلاس دهم. روی ضلع AB از مثلث ABC، نقطه دلخواه $M_۱$ را انتخاب کرده ایم. به مرکز نقطه ی A و به شعاع برابر $|AM_۱|$، کمان $M_۱M_۲$ را در درون مثلث ABC رسم کرده ایم ($M_۲ \in AC$). سپس، به مرکز نقطه ی C و به شعاع برابر $|CM_۲|$، کمان $M_۲M_۳$ را در درون مثلث ABC رسم کرده ایم ($M_۳ \in BC$). سرانجام، به مرکز نقطه ی B و به شعاع برابر $|BM_۳|$، کمان $M_۳M_۴$ را تا برخورد با AB رسم کرده ایم و غیره. عمل را تا جایی ادامه می دهیم که کمان بسته شود. طول این منحنی بسته را پیدا کنید، به شرطی که، طول ضلع های مثلث و اندازه ی زاویه های آن معلوم باشد.

برای کلاس یازدهم A و B، عدد هایی غیر منفی اند. ثابت کنید:

$$(A+B)^n \le ۲^{n-۱}(A^n + B^n)$$

۲۹. مکعب ۱۲×۱۲×۱۲ را به یاری صفحه های موازی با وجه ها به مکعب های واحد تقسیم کرده ایم. اگر با صفحه ی دیگری، مقطعی به صورت شش ضلعی منتظم در مکعب به وجود آوریم، مکعب روی هم، به چند بخش تقسیم می شود؟

۳۰. سه دایره مفروض اند. نقطه ای بر صفحه پیدا کنید که مماس های مرسوم از آن ها بر دایره ها، یکی با دیگری، زاویه های برابر بسازند.

دور نهایی

* ۳۱. در خانه های یک جدول $n \times n$، عدد های درست غیر منفی را قرار داده ایم. در ضمن، اگر در خانه ای عدد صفر قرار گرفته باشد، آن وقت مجموع همه ی عدد هایی که با این خانه در یک سطر یا یک ستون واقع اند، کمتر از n نیست. ثابت کنید، مجموع همه ی عدد های جدول، کمتر از $\frac{۱}{۲}n^۲$ نیست.

۳۲. درباره ی عدد های مثبت a، b، c، x، y، و z می دانیم:

$$a < b < c, a < x < y < z < c,$$

$$abc = xyz, a + b + c = x + y + z$$

ثابت کنید: $c = z, b = y, a = x$

۳۳. بین همه ی چندجمله ای های به صورت $x^۲ + ax + b$، آن را پیدا کنید که ماکزیمم قدرمطلق آن، در بازه ی $[-۱,۱]$، حداقل باشد.

۳۴. ثابت کنید، مساحت مربعی که در درون یک مثلث واقع است، از نصف مساحت مثلث تجاوز نمی کند.

۳۵. روی صفحه ی شطرنجی، شکلی به مساحت واحد داده شده است. ثابت کنید، می توان این شکل را روی صفحه طوری جا به جا کرد که هیچ کدام از گره های شبکه در درون آن نباشد.
* ۳۶. مطلوب است مکان هندسی مرکز های مثلث های متساوی الاضلاعی که بر یک مثلث مفروض، محیط شده اند.

۱۹۶۶

سال ششم

۱. کدام یک از این دو عدد بزرگتر اند:

$\frac{100\cdots001}{100\cdots001}$ (در صورت کسر ۱۹۶۵ صفر و در مخرج ۱۹۶۶ صفر)؛

یا $\frac{100\cdots001}{100\cdots001}$ (در صورت ۱۹۶۶ صفر و در مخرج ۱۹۶۷ صفر).

۲. در مسابقه ی فوتبال، ۳۰ تیم شرکت کرده اند. ثابت کنید، در هر لحظه، می توان دو تیم پیدا کرد که، تعداد بازی هایی که انجام داده اند، برابر باشد.

۳. روی تخته ی سیاه، همه ی عدد های درست از ۱ تا ۱۹۶۶ را نوشته ایم. هر بار، دو عدد دلخواه را پاک می کنیم و، به جای آن ها، تفاضلشان را می نویسیم. ثابت کنید، هر چند بار و به هر نحوی این عمل را تکرار کنیم، نمی توانیم به حالتی برسیم که، روی تخته ی سیاه، تنها عدد ۰ مانده باشد.

۴. مرکب سیاه را روی کاغذ سفید پاشیده ایم. ثابت کنید، روی صفحه ی کاغذ، می توان سه نقطه ی هم رنگ پیدا کرد که روی یک خط راست باشند و، در ضمن، یکی از این نقطه ها، درست وسط دو نقطه ی دیگر قرار گیرد.

۵. در یک مسابقه ی بازی شطرنج، بیش از سه شطرنج باز شرکت دارند و هر کس با هر کس دیگر، به یک تعداد مسابقه می دهد. در مسابقه، ۲۶ دور بازی بود، بعد از ۱۳ دور، یکی از شرکت کنندگان در مسابقه، متوجه شد، تعداد امتیاز های او عددی فرد، ولی تعداد امتیاز های هر یک از دیگر شرکت کنندگان، عددی زوج است. در این مسابقه، چند شطرنج باز شرکت داشته اند؟

سال هفتم

۶. همان مساله ی ۳.

۷. ثابت کنید، طول شعاع دایره، برابر است با تفاضل طول های دو پاره خط راست که یکی وتر کمان $\frac{1}{10}$ و دیگری وتر کمان $\frac{3}{10}$ دایره است.

۸. ثابت کنید، به ازای هر عدد طبیعی n، عدد

$$n(2n+1)(3n+1)\cdots(1966n+1)$$

بر عدد اول کوچکتر از ۱۹۶۶ بخش پذیر است.

۹. چه عددی می توان به جای * قرار داد تا مساله زیر تنها یک پاسخ داشته باشد: «روی صفحه، n خط راست وجود دارد که در * نقطه یکدیگر را قطع کرده اند. مقدار n را پیدا کنید».

۱۰. همان مساله ی ۴.

۱۱. n نقطه روی صفحه طوری قرار گرفته اند که، هر مثلث به رأس های این نقطه ها، مساحتی کمتر از ۱ دارد. ثابت کنید، همه ی این نقطه ها را، می توان در مثلثی به مساحت ۴ جا داد.

سال هشتم

۱۲. همان مساله ی ۹.

۱۳. همان مساله ی ۸.

۱۴. همان مساله ی ۱۱.

۱۵. ثابت کنید، مجموع همه ی بخشیاب های n^2، عددی فرد است.

۱۶. سه زاویه از یک چهارضلعی، منفرجه اند. ثابت کنید، از دو قطر چهارضلعی، قطر با طول بزرگتر، از رأس زاویه ی حاده می گذرد.

۱۷. عدد های x_1، x_2، x_3، ...، به این ترتیب ساخته شده اند:

$$x_1 = 2; x_2 = \frac{x_1^4+1}{5x_1}; x_3 = \frac{x_2^4+1}{5x_2}, \cdots$$

ثابت کنید، ساختمان این عدد ها را تا هر جا ادامه دهیم، همه ی عدد های حاصل، کمتر از $\frac{1}{5}$ و بیشتر از ۲ نیستند.

سال نهم

۱۸. از مستطیل مفروض، یک لوزی با حداکثر مساحت ممکن جدا کنید.

۱۹. این معادله، در مجموعه ی عدد های درست، چند جواب دارد:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{۱۹۶۰}$$

۲۰. ثابت کنید، می توان صفحه را با نه رنگ مختلف چنان رنگ کرد که، فاصله ی بین هر دو نقطه ی هم رنگ، با ۱۹۶۶ متر فرق داشته باشد.

۲۱. p و q، عدد هایی اول اند. $q^{۳}-۱$ بر p؛ $p-۱$ بر q بخش پذیر است. ثابت کنید: $p=۱+q+q^{۲}$.

۲۲. ضلع های مثلث ABC، وتر های مثلث های قائم الزاوه ی متساوی الساقینی هستند که در بیرون مثلث ABC ساخته شده اند. این مثلث ها را ABD، BCE، و ACF می نامیم. ثابت کنید، پاره خط های راست DE و BF بر هم عمودند و طول هایی برابر دارند.

* ۲۳. k رنگ در اختیار داریم. با چند روش می توان ضلع های یک n ضلعی منتظم را رنگ کرد، به نحوی که ضلع های مجاور، رنگ های مختلفی داشته باشند (چندضلعی را نمی توان چرخاند)؟

سال های دهم و یازدهم

۲۴. همان مساله ی ۱۸.

۲۵. همان مساله ی ۱۹.

۲۶. همان مساله ی ۲۰ برای ۱۱ رنگ.

۲۷. همان مساله ی ۲۳.

۲۸. به ازای چه ε، می توان پاره خط راست به طول $۲a$ را به n پاره خط راست تقسیم کرد که طول هر یک از آن ها از a بیشتر نباشد، به نحوی که از آن ها نتوان پاره خط راستی ساخت که طول آن برابر a نباشد و از ε کوچکتر باشد؟

۲۹. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x_۱+x_۲+\cdots+x_n=۱ \\ x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲=۱ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_۱^n+x_۲^n+\cdots x_n^n=۱ \end{cases}$$

دور نهایی

۳۰. m و n عدد هایی طبیعی اند؛ در ضمن، m عددی فرد است. ثابت کنید، $۲^n+۱$ و $۲^m-۱$ نسبت به هم اول اند.

* ۳۱. T_n را بیشترین مساحتی می گیریم که یک n ضلعی محاط در یک k ضلعی کوژ می تواند داشته باشد ($۳<n<k$). ثابت کنید، برای هر $n<k$ داریم:

$$T_{n-۱}+T_{n+۱}\le ۲T_n$$

۳۲. از دنباله ی عدد های

$$۱,۲,۳,۴,۵,\cdots,۲^n$$

به تعداد $\left[\dfrac{۲^n-۳}{۳}\right]$ عدد انتخاب کرده ایم. ثابت کنید، در بین عدد های باقی مانده، دو عدد پیدا می شود که یکی دو برابر دیگری است.

۳۳. «تجزیه ی مربع» را، به تقسیم آن، به مستطیل هایی می گوییم که ضلع های آن ها موازی با ضلع های مربع و تعداد آن ها محدود باشد. تجزیه را ساده می گوییم، وقتی از تقسیم بخش های بزرگتر به دست نیامده باشد (یعنی دو یا چند مستطیل آن، نتوانند مستطیل بزرگتری تشکیل دهند). به ازای چه مقدار هایی از n، تجزیه ی ساده ی مربع به n مستطیل ممکن است؟

* ۳۴. n نقطه روی صفحه داده شده است. بعضی از آن ها را به وسیله ی پاره خط های راستی به هم وصل کرده ایم، به نحوی که، از هر نقطه به هر نقطه ی دیگر، بتوان تنها به یک طریق رسید. ثابت کنید، برای این منظور، تعداد $n^{n-۲}$ روش برای وصل کردن نقطه ها به یکدیگر وجود دارد.

* ۳۵. یک n ضلعی با ضلع های به طول های $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n در دایره ای محاط شده است؛ در ضمن، مرکز دایره در درون چندضلعی واقع است. ثابت کنید، این دایره را می توان به وسیله ی n دایره ی با شعاع های $\dfrac{na_۱}{۶},\dfrac{na_۲}{۶},\ldots,\dfrac{na_n}{۶}$ پوشاند.

۱۹۶۷

سال ششم

۱. گنجایش ظرف های مکعبی شکل به نسبت (۱:۸:۲۷) و حجم مایع درون آن ها، به نسبت (۱:۲:۳) است. مقداری از مایع ظرف اول در ظرف دوم ریخته ایم و، سپس، از ظرف دوم به ظرف سوم، تا جایی که سطح مایع در هر سه ظرف یکسان شود. سپس، از طرف اول، $۱۲۸\frac{۴}{۸}$ لیتر مایع به ظرف دوم، ریخته ایم و، بعد، از ظرف دوم به ظرف اول آن قدر مایع برگرداندیم تا ارتفاع ستون مایع در ظرف اول دو برابر ارتفاع ستون مایع در ظرف دوم شود. معلوم شد، در ظرف اول ۱۰۰ لیتر کمتر از آنچه در آغاز در آن بوده، وجود دارد. در آغاز، در هر ظرف چقدر مایع بوده است؟
۲. عقربه های ساعت شمار، دقیقه شمار و ثانیه شمارِ یک ساعت، در شبانه روز چند بار بر هم منطبق می شوند؟
۳. ثابت کنید، در شهر لنین گراد، دو نفر پیدا می شود که، تعداد آشنایان لنین گرادی آن ها، یکی است.
۴. هر یک از هشت عدد طبیعی مختلف، از ۱۶ کوچکتر است. ثابت کنید، در بین تفاضل های دو به دو ی آن ها، دست کم سه عدد برابر وجود دارد.
۵. فاصله ی از A تا B، برابر ۱۰۰ کیلومتر است. در یک لحظه، دو دوچرخه سوار، اولی با سرعت ۲۰ کیلومتر در ساعت از A به طرف B؛ و دومی با سرعت ۳۰ کیلومتر در ساعت از B به طرف A حرکت کردند. همراه با اولی، مگسی هم، با سرعت ۵۰ کیلومتر در ساعت به پرواز درآمد. مگس تا برخورد با دوچرخه سوار دوم به طرف B رفت، و سپس، به طرف A برگشت تا به دوچرخه سوار اول رسید؛ دوباره، بعد از رسیدن به اولی برگشت و به طرف دوچرخه سوار دوم آمد و غیره. وقتی دو دوچرخه سوار به هم برسند، این مگس، چند کیلومتر از A به سمت B پرواز کرده است؟
سال هفتم
۶. ذوزنقه را با معلوم بودن چهار ضلع آن رسم کنید.
۷. ثابت کنید:

$$(۱+x^{۲}+x^{۴}+\cdots+x^{۱۰۰})(۱+x^{۱۰۲})-۱۰۲x^{۱۰۱}\geq ۰$$

۸. M وسط ضلع AB و N وسط ضلع CD، از چهارضلعی ABCD است. خط های راست AD، و BC، خط راست MN را به ترتیب، در P و Q قطع کرده اند. ثابت کنید:

اگر $\widehat{BQM}=\widehat{APM}$، آن وقت $|BC|=|AD|$

۹. همان مساله ی ۴.
۱۰. از رأس های A و C در مستطیل ABCD، کمانی از دایره ای را گذرانده ایم که، مرکز آن، در درون مستطیل واقع است. خط راستی موازی AB رسم کنید که BC را در نقطه ی P، AD را در نقطه ی Q و کمان AC را در نقطه ی R طوری قطع کند که مجموع مساحت های شکل های AQR و CPR، کمترین مقدار ممکن باشد.
۱۱. همان مساله ی ۵.
سال هشتم
۱۲. x و y، ریشه های معادله ی $t^{۲}-ct-c=۰$ هستند. ثابت کنید: $x^{۳}+y^{۳}+(xy)^{۳}\geq ۰$.
۱۳. دو دایره، در نقطه ی A، مماس داخل اند. از نقطه ی B واقع بر محیط دایره ی درونی ($B\neq A$)، مماسی بر آن رسم کرده ایم تا دایره ی بزرگتر را در نقطه های C و D قطع کند. ثابت کنید، AB نیمساز زاویه ی CAD است.
۱۴. ثابت کنید $۲^{۳۰۰}+۱$ بر $۳^{۱۰۱}$ بخش پذیر است.
۱۵. همان مساله ی ۱۰.
۱۶. در گروهی از آدم ها، هر کس یک دشمن و یک دوست دارد. ثابت کنید، این آدم ها را می توان به دو دسته چنان تقسیم کرد که در هر دسته، نه دشمن ها وجود داشته باشند و نه دوست ها.
۱۷. درباره ی عددهای $a_{۱}$، $a_{۲}$، ...، $a_{۱۰۰}$ می دانیم:

$$a_{۱}-۲a_{۲}+a_{۳}\leq ۰$$
$$a_{۲}-۲a_{۳}+a_{۴}\leq ۰$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{۹۸}-۲a_{۹۹}+a_{۱۰۰}\leq ۰$$

در ضمن $a_{۱}=a_{۱۰۰}\geq ۰$. ثابت کنید، همه ی این عدد ها غیر صفر اند.
سال نهم
۱۸. عدد های فرد متوالی p و q مفروض اند. ثابت کنید، $p^{p}+q^{q}$ بر $p+q$ بخش پذیر است.
۱۹. مثلث ABC مفروض است. به مرکز B، دایره ای رسم می کنیم که بر ضلع AC مماس باشد. از رأس های A و C، مماس های AM و CP را بر این دایره رسم می کنیم. خط راست MP، خط راست AB را در نقطه ی E و خط راست BC را در نقطه ی H قطع می کند. ثابت کنید، AH و CE، ارتفاع های مثلث ABC هستند.

۲۰. دنباله ای شامل k عدد در اختیار داریم. تصمیم می گیریم، به جای هر عدد، مجموع همه ی عدد های واقع در سمت راست آن را قرار دهیم. ثابت کنید، اگر این عمل را به تعداد کافی تکرار کنیم، آن وقت، دنباله ی دو بار پشت سر هم تکرار می شود.

۲۱. از ۱۰۶ نقطه که هیچ سه نقطه ای از آن ها بر یک خط راست نیستند، چهار نقطه رأس های یک مربع به ضلع واحد را تشکیل داده اند، و بقیه ی نقطه ها در داخل این مربع اند. ثابت کنید، دست کم ۱۰۷ مثلث وجود دارد که، رأس های آن ها، روی این نقطه هاست و مساحتی دارند که از ۰/۰۱ تجاوز نمی کند.

۲۲. $a_۱ \ge a_۲ \ge \cdots \ge a_n \ge ۰$ و B، بزرگترین عدد از عدد های $|b_۱|$، $|b_۱+b_۲|$، ...، $|b_۱+b_۲+\cdots+b_n|$ است. ثابت کنید:

$$|a_۱b_۱+a_۲b_۲+\cdots+a_nb_n| \le Ba_۱$$

۲۳. در جنگلی به وسعت یک کیلومتر مربع و به شکل چندضلعی کوژ، مردی راه را گم کرده است. ثابت کنید، این مرد، با پیمودن ۲۵۰۷ متر، می تواند از جنگل خارج شود.

سال دهم

۲۴. p و q دو عدد فرد پشت سر هم اند. ثابت کنید p^q+q^p بر $p+q$ بخش پذیر است.

۲۵. نقطه ی M در درون مثلث متساوی الاضلاع ABC واقع است. تصویر های قائم نقطه ی M بر ضلع های BC، AC، و AB را، به ترتیب، $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ می نامیم. ثابت کنید:

$$|AB_۱|.|BC_۱|+|BC_۱|.|CA_۱|+|CA_۱|.|AB_۱|=$$
$$|AC_۱|.|BA_۱|+|BA_۱|.|CB_۱|+|CB_۱|.|AC_۱|$$

۲۶. همان مساله ی ۲۰.

۲۷. همان مساله ی ۲۲

۲۸. همان مساله ی ۲۸

۲۹. ثابت کنید، روی یک صفحه، چنان دستگاه محدودی از نقطه ها وجود دارد، که برای هر نقطه از این دستگاه، دست کم صد نقطه ی دستگاه پیدا شود که از این نقطه، به یک فاصله باشند.

دور نهایی

۳۰. دو دایره به مرکز های $O_۱$ و $O_۲$، یکدیگر را در نقطه های A و D قطع کرده اند. از نقطه ی A، مماس هایی بر دو دایره رسم کرده ایم تا دایره های دیگر را در نقطه های B و C قطع کنند. ثابت کنید:

$$|AB|^۲:|AC|^۲=|BD|:|CD|$$

۳۱. دو چندجمله ای با ضریب های حقیقی، چنان اند که با هم برابر عددی درست می شوند (یعنی، اگر اولی به ازای عددی، برابر یک عدد درست باشد، دومی هم به ازای همان عدد، برابر با عددی درست خواهد شد و برعکس). ثابت کنید، یا مجموع و یا تفاضل آن ها، مقداری ثابت است.

* ۳۲. روی هر ضلع مثلث، نقطه ای انتخاب و آن ها را به هم وصل کرده ایم. به این ترتیب، چهار مثلث کوچک به دست می آید. می دانیم، این چهار مثلث، محیط هایی برابر دارند. ثابت کنید، نقطه های انتخابی، در وسط ضلع ها واقع اند.

۳۳. ۱۸ نفر در جایی گرد هم آمده اند. ثابت کنید، در بین آن ها، می توان چهار نفر جدا کرد که یا دو به دو یکدیگر را بشناسند و یا دو به دو با هم ناآشنا باشند.

* ۳۴. در یک جدول $n \times n$، عدد های غیر منفی را چنان نوشته ایم که، مجموع عدد های هر سطر و، همچنین، مجموع عدد های هر ستون، برابر واحد شده است. ثابت کنید، می توان n عدد مثبت پیدا کرد که، هیچ دو تایی از آن ها، در یک سطر یا یک ستون، قرار نگرفته باشند.

۳۵. این دنباله داده شده است:

$$۰ < a_۰ < a_۱ < a_۲ < \cdots < a_{۲۵} < a_{۲۶}$$

در ضمن $a_n = ۲\sqrt{a_{n-۱}^۲ - a_{n-۱}^۴}$ و $۰ < n \le ۲۶$، ثابت کنید:

$$a_۰ < ۷ \times ۱۰^{-۸}$$

۱۹۶۸

سال ششم

۱. دانش آموزی، یک کیف، یک خودنویس و یک کتاب خرید. اگر قیمت کیف $\frac{۱}{۵}$، قیمت خودکار $\frac{۱}{۲}$ و قیمت کتاب $\frac{۲}{۵}$ قیمت فعلی آن بود، آن وقت، دانش آموز برای همه ی آن ها ۲ روبل می پرداخت. اگر کیف $\frac{۱}{۲}$، خودکار $\frac{۱}{۴}$ و کتاب $\frac{۱}{۳}$

قیمت کنونی خود را داشتند، آن وقت، برای خرید آن ها، ۳ روبل لازم بود مبلغ خرید دانش آموز، در واقع، چقدر بوده است؟

۲. از این دو عدد، کدام و چقدر بزرگتر است؟

$$\overbrace{888\cdots88}^{\text{۱۹ رقم}} \times \underbrace{333\cdots33}_{\text{۶۸ رقم}}$$

یا

$$\overbrace{444\cdots44}^{\text{۱۹ رقم}} \times \underbrace{666\cdots67}_{\text{۶۸ رقم}}$$

۳. فاصله ی بین دو شهر A و B برابر ۱۹۴ کیلومتر، فاصله ی بین دو شهر B و C، برابر ۱۱۶ کیلومتر، فاصله ی بین دو شهر C و D، برابر ۴۵۱ کیلومتر و فاصله ی بین دو شهر D و A، برابر ۱۴۱ کیلومتر است. فاصله ی بین دو شهر B و D چقدر است؟

۴. چهار چیز، با وزن های مختلف و یک ترازو (بدون هیچ وزنه ای) در اختیار داریم. چگونه می توان، با پنج بار استفاده از ترازو، این چیز ها را نسبت به وزن آن ها، ردیف کرد؟

۵. چند تیم، در مسابقه ی والیبال شرکت کردند. تیم A، به شرطی نیرومند تر از تیم B به شمار می آید که یا از تیم B ببرد و یا تیمی مثل C وجود داشته باشد که تیم Aاز C و تیم C از B ببرد. ثابت کنید، اگر تیم T، تیم پیروز مسابقه باشد، آن وقت این تیم از همه ی تیم های دیگر، نیرومند تر است.

۶. در مساله ی ۱، معلوم کنید، کدام گران تر است: کیف یا خودکار؟

سال هفتم

۷. در مربعی، یک مستطیل (که طول و عرض نابرابر دارد) محاط کرده ایم. ثابت کنید، مجموع طول های طول و عرض آن (یعنی نصف محیط مستطیل، برابر است با طول قطر مربع.

۸. پنج عدد پیدا کنید که مجموع دو به دو ی آن ها برابر عدد های ۰، ۲، ۴، ۵، ۷، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۴، و ۱۷ باشد.

۹. در یک عدد ۱۰۰۰ رقمی، همه ی رقم ها، به جز یکی، برابر ۵ هستند. ثابت کنید، این عدد نمی تواند مجذور کامل باشد.

۱۰. همان مساله ی ۵.

۱۱. در پنج ضلعی ABCDE، وسط ضلع AB را K، وسط ضلع BC را L، وسط ضلع CD را M، وسط ضلع DE را N، وسط پاره خط راست KM را P و وسط پاره خط راست LN را Q می نامیم. ثابت کنید، پاره خط راست PQ با پاره خط راست AE موازی است و طولی برابر یک چهارم طول آن دارد.

۱۲. در دایره ی به شعاع برابر ۳، چند دایره، به دلخواه، جا داده ایم. مجموع طول های شعاع های این دایره ها، برابر است با ۲۵. ثابت کنید، خط راستی پیدا می شود که، دست کم، ۹ دایره ی داخلی را قطع می کند.

سال هشتم

۱۳. در متوازی الاضلاع ABCD، طول قطر AC از طول قطر BD بزرگتر است. نقطه ی M، روی قطر AC چنان است که از رأس های چهارضلعی BCDM، می توان یک دایره گذراند. ثابت کنید، خط راست BD، مماس مشترک دایره های محیطی دو مثلث ABM و ADM است.

۱۴. a عددی فرد است و x و y، ریشه های معادله ی

$$t^2 + at - 1 = 0$$

هستند. ثابت کنید $x^4 + y^4$ و $x^5 + y^5$، دو عدد درست ِ نسبت به هم اول، هستند.

۱۵. قرینه ی مثلث متساوی الاضلاعی را نسبت به یکی از ضلع های آن پیدا کرده ایم. قرینه ی مثلث جدید را هم، نسبت به یکی از ضلع های خودش، به دست آورده ایم. این عمل را، چند بار تکرار کرده ایم. در پایان، معلوم شد، آخرین مثلث، بر مثلث اصلی منطبق شده است. ثابت کنید، تعداد عمل های مربوط به پیدا کردن قرینه، عدد زوج است.

۱۶. همان مساله ی ۱۲.

۱۷. همه ی عدد های دو رقمی را، که به صفر ختم نشده اند، طوری پشت سر هم نوشته ایم که هر عدد بعدی، با رقمی آغاز شود که عدد قبلی به آن ختم شده است. ثابت کنید، چنین روشی، برای نوشتن عدد ها، ممکن است. از بین همه ی عدد های چند رقمی که به این ترتیب می توان به دست آورد، مجموع بزرگترین و کوچکترین عدد را پیدا کنید.

* ۱۸. همه ی عدد های ۱۰ رقمی را که می توان با رقم های ۱، ۲، و ۳ نوشت، یکی زیر دیگری می نویسیم. به دنبال هر عدد، باز هم رقمی از رقم های ۱، ۲ یا ۳ را می آوریم؛ در ضمن، به دنبال عدد ۱۱۱۰۰۰۱، رقم ۱، به دنبال ۲۲۲۰۰۰۲ رقم ۲ و به دنبال ۳۳۳۰۰۰۳ رقم ۳ آمده است. می دانیم، به هر دو عددی که در همه ی مرتبه های ده گانه اختلاف دارند، رقم های مختلفی اضافه شده است. ثابت کنید ستون رقم هایی که به این ترتیب نوشته شده است، بر یکی از ستون های ده گانه قبلی منطبق است.

سال نهم

۱۹. این معادله را حل کنید:

$$x = ۱-۱۹۶۸(۱-۱۹۶۸x^{۲})^{۲}$$

۲۰. چهارضلعی را با معلوم بودن نقطه های وسط سه ضلع آن، رسم کنید، به شرطی که بدانیم، این سه ضلع چهارضلعی (که نقطه های وسط آن ها داده شده است)، طولی برابر دارند. در ضمن، از بین سه نقطه ی مفروض، می دانیم کدام نقطه، مربوط به ضلعی است که بین دو ضلع دیگر قرار دارد.
۲۱. صفحه ی کاغذ شطرنجی بی پایانی را، با ۹ رنگ مختلف رنگ کرده ایم. هر خانه یک رنگ دارد و، در ضمن، از همه ی رنگ ها استفاده شده است. دو رنگ را وقتی مجاور می نامیم که دو خانه با یک ضلع مشترک پیدا شود که با این دو رنگ، مشخص شده باشند. حداقل تعداد زوج رنگ های مجاور، چقدر می تواند باشد؟
۲۲. در مثلثی با زاویه های حاده، دو دایره ی مماس بر هم رسم کرده ایم، به نحوی که یکی از آن ها بر دو ضلع AC و BC و دیگری بر دو ضلع AB و BC مماس است. ثابت کنید، مجموع طول های شعاع های این دو دایره، از طول شعاع دایره ی محاطی مثلث بیشتر است.
۲۳. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$۱!(n-۱)!+۲!(n-۲)!+\cdots+(n-۱)!۱! \le \frac{۲}{۳}n!$$

* ۲۴. ثابت کنید، نمی توان مثلث متساوی الاضلاع را به چند مثلث متساوی الاضلاع تقسیم کرد، به نحوی که، این مثلث ها، دو به دو با هم نا برابر باشند.
سال دهم
۲۵. مثلث های ABC، $A_۱B_۱C_۱$، و $A_۲B_۲C_۲$ با مساحت های S، $S_۱$، و $S_۲$، چنان اند که داریم:

$$|AB| = |A_۱B_۱|+|A_۲B_۲|, |BC| = |B_۱C_۱|+|B_۲C_۲|, |AC| = |A_۱C_۱|+|A_۲C_۲|$$

ثابت کنید: $S \ge ۴\sqrt{S_۱S_۲}$
۲۶. این دستگاه معادله ها، چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} \cos x_۱ = x_۲, \\ \cos x_۲ = x_۳, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cos x_n = x_۱ \end{cases}$$

۲۷. ABC و $A_۱B_۱C_۱$، مثلث هایی متساوی الاضلاع و هم جهت اند. می دانیم: $|AA_۱| = a$ و $|BB_۱| = b$. زاویه ی بین خط های راست $AA_۱$ و $BB_۱$، برابر است با α. مطلوب است محاسبه ی طول پاره خط راست $CC_۱$.
۲۸. همان مساله ی ۲۱، برای ۱۰ رنگ.
* ۲۹. ثابت کنید، چهاروجهی منتظم را، نمی توان به چند چهاروجهی منتظم دو به دو نابرابر تقسیم کرد.
* ۳۰. $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n عدد های مثبت و k عدد طبیعی است. ثابت کنید:

$$(\sqrt[k]{۲}-۱)(a_۱+a_۲+\cdots+a_n) \le \sqrt[k]{a_۱^k.۲+a_۲^k.۲^۲+\cdots+a_n^k.۲^n}$$

دور نهایی
۳۱. در دایره ای، دو وتر AB و AC داده شده اند. از نقطه ی M وسط کمان BAC، عمودی بر وتر با طول بزرگتر فرود آورده ایم. ثابت کنید، پای عمود، خط شکسته ی BAC را نصف می کند.
۳۲. n نقطه ی روی محیط دایره داده شده است. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می کنند: مداد را از یک نقطه به نقطه ی دیگر (روی پاره خط راستی که این دو نقطه را به هم وصل می کند) می برند. حرکت، به نوبت انجام می گیرد؛ در ضمن، نمی توان روی یک پاره خط راست، دو بار حرکت کرد. کسی این بازی را باخته است که نتواند حرکت کند. ثابت کنید، کسی که بازی را آغاز کند - به شرط بازی درست - برنده می شود.
۳۳. روی یک صفحه، m نقطه داده شده است؛ در ضمن، همه ی آن ها، روی یک خط راست نیستند. ثابت کنید، دست کم، به تعداد

$$\frac{۱}{۲}(m-۱)(m-۲)$$

مثلث می توان رسم کرد که رأس های آن ها روی این نقطه ها باشند.
۳۴. $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، عدد هایی حقیقی اند؛ M، بزرگترین و m کوچکترین این عدد ها است. ثابت کنید:

$$(p-۱)(M-m)\le\sum_{i,j}(a_i-a_j)\le p^{۲}\frac{M-m}{۴}$$

۳۵. ثابت کنید، مجموع فاصله های یک نقطه ی درونی چهاروجهی تا رأس های آن، از محیط چهاروجهی کمتر است.

* ۳۶. عدد درست n را طوری پیدا کنید که، بین رقم های عدد ۵^n (در عدد نویسی به مبنای ۱۰)، دست کم ۱۹۶۸ رقم برابر صفرِ پشت سر هم وجود داشته باشد.

* ۳۷. چندوجهی کوژی داده شده است که، در هر رأس آن، سه وجه به هم رسیده اند. هر وجه را با یکی از چهار رنگی که در اختیار داریم، رنگ کرده ایم؛ در ضمن، دو وجهی که یال مشترکی دارند، با دو رنگ مختلف اند. ثابت کنید، تعداد وجه های با تعداد فرد ضلع ها که رنگ اول را دارند، و تعداد وجه های با تعداد فرد ضلع ها که رنگ دوم را دارند، یا هر دو زوج اند و یا هر دو فرد.

۳۸. هر دنباله ی با پایان از حرف های A و B را، یک واژه می نامیم. دو عمل روی واژه ها می توان انجام داد:

اول: در هر جای واژه، A را بگذاریم و در پایان واژه، B را بنویسیم،

دوم: در هر جای واژه، AB را بگذاریم.

ثابت کنید، واژه هایی که می توان از واژه ی AB، با عمل اول به دست آورد، همان واژه هایی است که می توان از واژه ی AB، با استفاده از عمل دوم پیدا کرد.

۱۹۶۹

سال ششم

۱. هشت رُخ را در خانه های صفحه ی شطرنج طوری قرار داده ایم که هیچ دو تایی از آن ها، یکدیگر را تهدید نمی کنند. ثابت کنید، تعداد رُخ های خانه های سیاه، عددی زوج است.

۲. در جدول ۳×۳، عدد هایی طبیعی را گذاشته ایم (شکل ۴). کولیا و پتیا، هر کدام چهار عدد را خط زده اند. معلوم شد، مجموع عدد هایی که پتیا خط زده است، دو برابر مجموع عدد هایی است که کولیا خط زده بود. کدام عدد، خط نخورده باقی مانده است؟

۴	۱۲	۸
۱۳	۲۴	۱۴
۷	۵	۲۳

شکل ۴

۳. میشا و ساشا، نیمروز و با دوچرخه، از شهر A به طرف شهر B حرکت کردند. در همان لحظه ی حرکت آن ها، وانیا از B به طرف A حرکت کرد. سه نفر، سرعت های متفاوتی داشتند، ولی سرعت هر کدام، در طول راه ثابت بود. ساعت یک بعد از نیمروز، ساشا درست در نقطه ی وسط بین میشا و وانیا بود. ولی در ساعت یک و نیم پس از نیمروز، وانیا در نقطه ی وسط بین میشا و ساشا قرار داشت. میشا در چه ساعتی، در نقطه ی وسط بین ساشا و وانیا خواهد بود؟

۴. ۳۵ توده ی گردو روی زمین چیده شده است. تصمیم گرفته می شود، در یک زمان، به ۲۳ توده، و به هر کدام یک گردو اضافه شود. ثابت کنید، با تکرار این عمل، می توان تعداد گردو ها را، در هر ۳۵ توده، برابر کرد.

۵. در هر سطر از ۶۴ سطر، یک عدد شش رقمی نوشته ایم که، همه ی آن ها، تنها شامل رقم های ۱ و ۲ هستند. می دانیم، همه ی این عدد ها با هم فرق دارند و، در ضمن، هر دو عدد مجاور، تنها در یکی از مرتبه ها، با هم اختلاف دارند. چگونه می توان این عدد ها را نوشت؟

۶. به دو ریاضی دان، دو عدد طبیعی دادند و به آن ها اطلاع دادند که این دو عدد، یک واحد با هم اختلاف دارند. آن ها به نوبت، از یکدیگر تنها یک چیز می پرسند: «آیا از عدد من اطلاع داری؟». ثابت کنید، دیر یا زود، یکی از دو ریاضی دان، پاسخ مثبت می دهد.

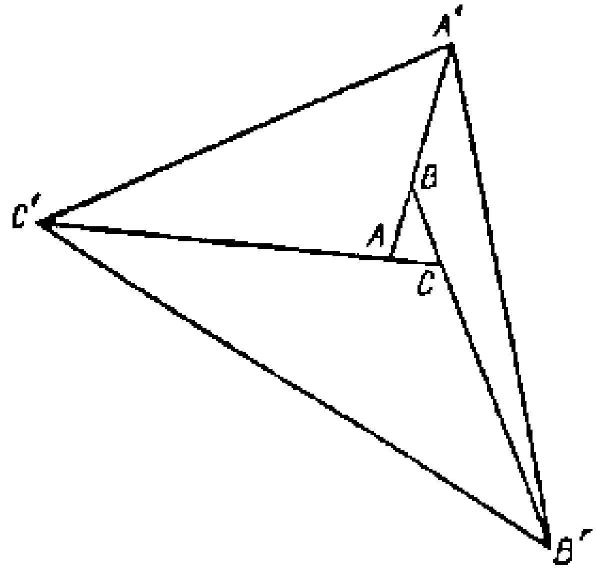
سال هفتم

۷. همان مساله ی ۱.

۸. ضلع های مثلث ABC را، شبیه شکل ۵ ادامه داده ایم و می دانیم:

$$|AA'|=۳|AB|,|BB'|=۵|BC|,|CC'|=۸|CA|$$

نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث $A'B'C'$ چقدر است؟



شکل ۵

۹. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{۲}{x^{۲}-۱}+\frac{۴}{x^{۲}-۴}+\frac{۶}{x^{۲}-۹}+\cdots+\frac{۲۰}{x^{۲}-۱۰۰}=۱۱\left[\frac{۱}{(x-۱)(x+۱۰)}+\frac{۱}{(x-۲)(x+۹)}+\cdots+\frac{۱}{(x-۱۰)(x+۱)}\right]$$

* ۱۰. در مرکز یک زمین مربعی، گرگ؛ و در هر رأس مربع، یک سگ ایستاده اند. گرگ می تواند به هر سمتی برود، ولی سگ ها، تنها روی ضلع های مربع می توانند حرکت کنند. می دانیم، گرگ از عهده ی یک سگ بر می آید، ولی در برابر دو سگ مغلوب می شود. حداکثر سرعت سگ، یک و نیم برابر حداکثر سرعت گرگ است. ثابت کنید، سگ ها می توانند مانع فرار گرگ از درون مربع به بیرون آن شوند.

۱۱. چهار روستا که در چهار رأس مربعی به ضلع برابر ۱۰ کیلومتر واقع اند، یک شرکت تعاونی روستایی تشکیل داده اند. شرکت تعاونی، این امکان را دارد که ۲۸ کیلومتر راه بسازد. آیا شرکت تعاونی می تواند، جاده ها را طوری ایجاد کند که، از طریق آن ها بتوان از هر روستایی به هر روستای دیگر رفت؟

۱۲. همان مساله ی ۶.

سال هشتم

۱۳. خواسته ایم روی قاعده ی AD از ذوزنقه ی ABCD، نقطه ی E را طوری پیدا کنیم که مثلث های ABE، BCE، و CDE، محیط هایی برابر داشته باشند. ثابت کنید $|BC|=\frac{۱}{۲}|AD|$.

۱۴. در یک پنج ضلعی کوژ، طول همه ی ضلع ها، یکی است. روی قطر بزرگتر این پنج ضلعی، نقطه ای پیدا کنید که، از آن جا، هر ضلع، به زاویه ای دیده می شود که از ۹۰ درجه بیشتر نباشد.

۱۵. خط های هوایی کشور، طوری طرح ریزی شده است که از هر شهر، با بیش از سه طریق به شهر های دیگر نمی توان رفت، در ضمن، می توان با حداکثر یک توقف بین راه، از هر شهر به شهر دیگر پرواز کرد. این کشور، حداکثر چند شهر می تواند داشته باشد؟

۱۶. همان مساله ی ۱۰.

۱۷. سه عدد سه رقمی مختلف در اختیار داریم که رقم سمت چپ آن ها، یکی است. در ضمن می دانیم، مجموع این سه عدد بر هر یک از عدد ها، بخش پذیر است. این عدد ها را پیدا کنید.

۱۸. دنباله ی با پایانی از صفر ها و واحد ها، با دو ویژگی داده شده است:

۱) اگر در دو جای مختلف، ولی دلخواه دنباله، در هر کدام، پنج رقم متوالی انتخاب کنیم، این «عدد های» پنج رقمی با هم اختلاف داشته باشند (این دو «عدد» پنج رقمی را، می توان طوری انتخاب کرد که، بخشی از آن ها، روی هم قرار گرفته باشند).

۲) اگر رقم دلخواهی به سمت راست دنباله اضافه کنیم، آن وقت ویژگی اول برقرار نباشد.

ثابت کنید، چهار رقم نخست این دنباله، بر چهار رقم پایانی آن، منطبق است.

سال نهم

۱۹. A و B، دو نقطه از محیط دایره؛ C، نقطه ی وسط کمان AB و P، نقطه ای از درون دایره است و، در ضمن $|AP|<|BP|$، ثابت کنید: $\widehat{APC}>\widehat{BPC}$.

۲۰. در لنین گراد، بلیت تراموا را «خوش یوم» می دانند، وقتی که مجموع سه رقم اول آن، با مجموع سه رقم آخر، برابر باشد. ولی در مسکو، بلیتی را «خوش یوم» می دانند که، در آن، مجموع رقم های ردیف زوج، با مجموع رقم های ردیف فرد برابر باشد. چند بلیت وجود دارد که هم برای لنین گرادی ها و هم برای مسکویی ها، «خوش یوم» باشد (بلیت با شماره ی ۰۰۰۰۰۰ را هم در نظر بگیرید)؟

۲۱. m و n عدد هایی طبیعی اند؛ در ضمن $\frac{m}{n} < \sqrt{۲}$. ثابت کنید:

$$\frac{m}{n} < \sqrt{۲}\left(۱-\frac{۱}{۴m^{۲}}\right)$$

۲۲. مکان هندسی مرکز های مستطیل هایی را پیدا کنید که بر یک چهارضلعی کوژ مفروض محیط اند.

۲۳. $k > ۱$، عددی طبیعی است. دنباله ی (x_n) را، به ترتیب، ساخته ایم:

$$x_{۱} = ۱, x_{۲} = k, x_n = kx_{n-۱} - x_{n-۲} (n > ۲)$$

ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، عدد طبیعی m وجود دارد، به نحوی که x_m بر x_n بخش پذیر باشد ($m > n$).

* ۲۴. ۶۰ نفر برای ۱۵ روز، وارد خانه ی استراحت شدند. در آنجا، هر روز چهار مرتبه سر میز غذا حاضر می شوند. میز غذا خوری، ۶۱ جا دارد. مدیر استراحت گاه، همیشه در جای ثابت خود می نشیند. مدیر می خواهد با همه ی مهمانان آشنا شود و، در ضمن، همه ی آن ها را با هم آشنا کند. برای این منظور، تصمیم می گیرد، هر بار مهمانان را به ردیف تازه ای پشت میز قرار دهد، به نحوی که هیچ کس، دو بار در یک جا ننشیند و هر بار در سمت راست مدیر و در سمت راست هر مهمان، آدم جدیدی نشسته باشد. چگونه این تصمیم را اجرا کند؟

سال دهم

۲۵. در چهاروجهی ABCD، یال AB بر یال CD عمود است و O، نقطه ی دلخواهی از فضا است. ثابت کنید، مجموع مجذور های فاصله های از نقطه ی O تا وسط یال های AC و BD، برابر است با مجموع مجذور های فاصله های از نقطه ی O تا وسط یال های AD و BC.

۲۶. همان مساله ی ۲۰.

۲۷. همان مساله ی ۲۴.

۲۸. $k > ۱$، عددی طبیعی است. دنباله ی (x_n) را به این ترتیب ساخته ایم:

$$x_{۱} = ۱, x_{۲} = k, x_n = kx_{n-۱} - x_{n-۲} (n > ۲)$$

ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، عدد طبیعی $m > n$ وجود دارد، به نحوی که $x_m - ۱$ و x_n، نسبت به هم اول باشند.

۲۹. دنباله ای از عدد های طبیعی بسازید که، از تفاضل بین جمله های آن، همه ی عدد های طبیعی و، در ضمن، هر کدام تنها یک بار به دست آید.

* ۳۰. AA'، BB'، و CC'، ارتفاع های مثلث ABC هستند. ABC مثلثی است با زاویه های حاده و ضلع های با طول های a، b و c. $A_۱$ و $A_۲$، به ترتیب، تصویر های نقطه ی A' روی ضلع های AB و AC؛ $B_۱$ و $B_۲$ تصویر های نقطه ی B' بر ضلع های BC و BA؛ $C_۱$ و $C_۲$، به ترتیب، تصویر های نقطه ی C' روی ضلع های CA و CB هستند. ثابت کنید:

$$a^{۲}.S_{A'A_۱A_۲} + b^{۲}.S_{B'B_۱B_۲} + c^{۲}.S_{C'C_۱C_۲} = \frac{S^{۳}}{R^{۲}}$$

که در آن، S مساحت مثلث ABC و R طول شعاع دایره ی محیطی آن است.

دور نهایی

۳۱. دست کم، چند دایره ی به شعاع واحد لازم است تا بتوان، با آن ها، دایره ی به شعاع ۱/۵ را به طور کامل پوشاند؟

* ۳۲. ۵ گانگستر، جایی دور هم جمع شده اند. آن ها با هم و در یک لحظه، به روی هم تیراندازی می کنند؛ در ضمن، هر کس به طرف نزدیکترین فرد یا یکی از نزدیکترین افراد به او. دست کم، چند نفر کشته می شوند؟

۳۳. مجموع عدد های مثبت $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، برابر است با ۱. ثابت کنید:

$$\sum_{i<j} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \le \frac{n-۱}{۴}$$

۳۴. صفحه را با سه رنگ مختلف رنگ کرده ایم. ثابت کنید، روی این صفحه می توان مثلثی با مساحت واحد پیدا کرد که، همه ی رأس های آن، از یک رنگ باشند.

* ۳۵. از مربع به ضلع ۱۰۰۰۰۰۰، مربعی به ضلع ۰/۰۰۱ را از گوشه ی آن جدا و بخش باقی مانده ی مربع را، به ۱۰ مستطیل تقسیم کرده ایم. ثابت کنید، دست کم در یکی از این مستطیل ها، نسبت طول های دو ضلع، از ۹ بزرگتر است.

۳۶. مرکز های چهار دایره ی برابر، رأس های یک مربع اند. یک چهارضلعی با محیط حداکثر ممکن، طوری بسازید که رأس های آن روی محیط این دایره ها باشد.

۳۷. F_1، F_2، ...، F_n، چندجمله ای هایی با ضریب های درست اند. ثابت کنید، می توان عدد درست a را طوری پیدا کرد که $F_1(a)$، $F_2(a)$، ...، $F_n(a)$، همگی عدد هایی مرکب باشند.

* ۳۸. $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$، عدد هایی طبیعی اند. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\frac{\sqrt{x_1 - x_0}}{x_1} + \cdots + \frac{\sqrt{x_n - x_{n-1}}}{x_n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

۱۹۷۰

سال ششم

۱. عددی نه رقمی داریم که، در آن، از همه ی رقم ها، به جز صفر، استفاده شده است. بعد از جا به جایی برخی رقم ها، عدد حاصل، برابر $\frac{1}{8}$ عدد اصلی شد. همه ی این گونه عدد ها را پیدا کنید.

۲. طول ضلع های مثلثی، سه عدد درست پشت سر هم اند. طول ضلع های این مثلث را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم، یکی از میانه های آن، بر یکی از نیمساز های آن عمود است.

۳. در روستایی، ۱۹۷۰ نفر زندگی می کنند. آن ها، گاه به گاه، پول خود را با هم عوض می کنند، به این ترتیب که یکی از آن ها، یک سکه ی ۲۰ ریالی به دیگری می دهد و دو سکه ی ۱۰ ریالی می گیرد یا بر عکس. آیا ممکن است حالتی پیش آید که، ضمن چند هفته، هر یک از ساکنان روستا، برای این تعویض، درست ۱۰ سکه داده باشد؟

۴. از یک عدد سه رقمی، مجموع رقم های آن را کم کرده ایم. بعد دوباره از عدد حاصل، مجموع رقم های آن را کم کرده ایم. این عمل را ۱۰۰ بار انجام داده ایم. ثابت کنید، سرانجام، عدد صفر به دست می آید.

۵. در یک کشور، هر دو شهر، یا از راه هوایی و یا از راه آبی به هم مربوط اند. ثابت کنید از هر شهر به شهر دیگر می توان یا تنها از راه آب و یا تنها از راه هوا، سفر کرد.

۶. در یک مسابقه، ۱۲ تیم والیبال شرکت دارند. هیچ تیمی صاحب هفت امتیاز نشده است. ثابت کنید، سه تیم A، B و C وجود دارد، به نحوی که A از B، B از C و C از A برده است.

سال هفتم

۷. زاویه ی B از مثلث ABC را پیدا کنید، به شرطی که در آن، طول ارتفاع CH برابر نصف طول ضلع AB و زاویه ی A برابر ۷۵ درجه باشد.

۸. همان مساله ی ۴.

۹. مثلث متساوی الساقین، با زاویه ی راس ۲۰ درجه داده شده است. ثابت کنید:

الف) طول ساق از دو برابر طول قاعده بیشتر است؛

ب) طول ساق از سه برابر طول قاعده کوچکتر است.

۱۰. همان مساله ی ۵.

* ۱۱. این دستگاه معادله ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x^2 = 2y - 1 \\ x^4 + y^4 = 2 \end{cases}$$

۱۲. ۳۶ تیم در یک مسابقه ی فوتبال شرکت کرده اند؛ در ضمن، هر دو تیم باید یکبار با هم بازی کنند. می دانیم، هیچ تیمی، کمتر از ۳۴ بازی نکرده است. ثابت کنید، می توان تیم ها را به سه گروه ۱۲ تیمی تقسیم کرد، به نحوی که در هر گروه، همه ی بازی ها انجام شده باشد.

سال هشتم

۱۳. در زاویه ی ABC دو دایره محاط کرده ایم، به نحوی که یکی از آن ها در نقطه ی A بر ضلع BA و دیگری در نقطه ی C بر ضلع BC مماس است. ثابت کنید، این دایره ها، روی خط راست AC، پاره خط هایی با طول برابر، جدا می کنند.

۱۴. این دستگاه معادله ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^2 + xz + z^2 = 21 \\ y^2 + yz + z^2 = 28 \end{cases}$$

۱۵. بر دایره ای، یک پنج ضلعی محیط کرده ایم که طول همه ی ضلع های آن، عدد های درست اند؛ در ضمن، طول دو ضلع اول و سوم، برابر واحد است. ضلع دوم، در نقطه ی تماس خود با دایره، به چه پاره خط هایی تقسیم می شود؟

۱۶. در مربع ۵×۵، ۱۶ خانه را رنگ کرده ایم. ثابت کنید، می توان در آن، یک مربع ۲×۲ پیدا کرد که، دست کم سه خانه ی آن، رنگ شده باشد.

۱۷. در مثلثی، یک دایره و یک مربع محاط کرده ایم؛ رأس های مربع، روی ضلع های مثلث اند. ثابت کنید، نسبت طول ضلع مربع به طول شعاع دایره، بین دو عدد $\sqrt{۲}$ و ۲ قرار دارد.

۱۸. ۳۵ نقطه روی یک صفحه چنان اند که، هیچ سه نقطه ای، روی یک خط راست نیستند. برخی از نقطه ها را، با پاره خط های راست به هم وصل کرده ایم: روی هم ۱۰۰ پاره خط راست. ثابت کنید، هر دو پاره خط راستی، یکدیگر را قطع می کنند.

سال نهم

۱۹. دایره های $O_۱$ و $O_۲$، بر دایره ی O، از درون و در نقطه های A و B مماس اند. M، نقطه ی دلخواهی از محیط دایره ی O و C و D، نقطه های برخورد خط های راست AM و BM، به ترتیب، با دایره های $O_۱$ و $O_۲$ است. ثابت کنید، خط های راست AB و CD، با هم موازی اند.

۲۰. همان مساله ی ۱۶.

۲۱. یک نه ضلعی، که طول همه ی ضلع های آن، عدد های درست اند، بر دایره ای محیط کرده ایم. اگر طول های دو ضلع اول و سوم، برابر واحد باشد، پاره خط راست ضلع دوم در نقطه ی تماس خود با دایره، به چه پاره خط های راستی تقسیم می شود؟

۲۲. عدد های مثبت a، b، c و d چنان اند که

$$a^۲+b^۲=c^۲+d^۲ \text{ و } a^۳+b^۳=c^۳+d^۳$$

ثابت کنید: $ab=cd$.

۲۳. همه ی عدد های طبیعی x، y، z و t را پیدا کنید که، برای آن ها، داشته باشیم:

$$۳۱(xyzt+xy+xt+zt+۱)=۴۰(yzt+y+t)$$

۲۴. مربع ۱۰۰×۱۰۰ را، به وسیله ی سه نوار قائم تقسیم کرده ایم. پهنای نوار اول (سمت چپ)، ۱۹ خانه و پهنای نوار دوم، ۷۰ خانه است. در سطر اول، عدد های طبیعی را، به ردیف، از ۱ تا ۱۰۰ نوشته ایم. در سطر دوم، اول (یعنی از سمت چپ)، عدد های نوار سوم را، با همان ردیف خود، سپس عدد های نوار دوم و سرانجام عدد های نوار اول (در سطر اول) را با همان ردیف خود نوشته ایم. با همین روش، به کمک سطر دوم، عدد های سطر سوم را نوشته ایم و غیره، تا آنجا که همه ی خانه های مربع، پر شود. ثابت کنید، هر ستون، به همه ی عدد های از ۱ تا ۱۰۰ برخورد می کنیم.

سال دهم

۲۵. در چهاروجهی، یک کره و یک مکعب محاط کرده ایم. همه ی این رأس های مکعب، روی وجه های چهاروجهی است. ثابت کنید، نسبت طول ضلع مکعب به طول شعاع کره، بین عدد های ۱ و $۱+\sqrt{۲}$ قرار دارد.

۲۶. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\sin ۲+\cos ۲+۲(\sin ۱-\cos ۱)\geq ۱$$

۲۷. در یک پنج ضلعی، که ضلع هایی با طول های برابر دارد، همه ی زاویه ها، از ۱۲۰ درجه کوچکتر اند. ثابت کنید، همه ی این زاویه ها، منفرجه اند.

۲۸. همان مساله ی ۲۲.

۲۹. تابع $f(x)$ را طوری پیدا کنید که، برای هر مقدار حقیقی x، به جز ۰ و ۱، داشته باشیم:

$$f\left(\frac{۱}{x}\right)+f(۱-x)=x$$

* ۳۰. مربع $n\times n$ را، به سه نوار قائم تقسیم کرده ایم.نوار اول از سمت چپ، k خانه و نوار سوم m خانه دارد؛ در ضمن $n-k$ و $n-m$ نسبت به هم اول اند. در سطر اول، از چپ به راست، عدد های طبیعی از ۱ تا n را نوشته ایم. در سطر دوم از چپ به راست، ابتدا عدد های نوار سوم را، بدون تغییر ردیف آن ها، سپس عدد های نوار دوم و، سرانجام، عدد های نوار اول را، باز هم بدون تغییر ردیف آنها، نوشته ایم. به همین ترتیب، از سطر دوم، سطر سوم را به دست آورده ایم و غیره، تا آنجا که همه ی خانه های مربع پر شود. ثابت کنید، در هر ستون، با همه ی عدد های از ۱ تا n برخورد می کنیم.

دور نهایی

۳۱. عدد های $t_۱$، $t_۲$، ...، t_n، مثبت و حاصل ضربی برابر واحد دارند. ثابت کنید، شماره ی $k<n$ وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$t_k(t_{k+۱}+۱)\geq ۲$$

($t_{n+۱}$ را، برابر $t_۱$ می گیریم).

۳۲. به کمک خم کردن سیم، یک چندضلعی مسطح کوژ ساخته ایم. ثابت کنید، با این سیم، نمی توان چندضلعی دیگری (که هم نهشت با اولی نباشد) درست کرد، به نحوی فاصله ی بین هر دو نقطه ی سیم، بزرگ تر نشده باشد.
۳۳. عدد های طبیعی a_1، a_2، ...، چنان اند که، برای هر n، داریم $a_n < 2n$ و، در ضمن $0 < a_1 < a_2 < \cdots$. ثابت کنید، هر عدد طبیعی دلخواه، یا باربر یکی از جمله های این دنباله و یا برابر تفاضل دو جمله از آن است.
* ۳۴. C و D و دو نقطه ی دلخواه از محیط دایره ای هستند که بر نقطه ی وسط پاره خط راست AB مماس است. AD و BC، به ترتیب، محیط دایره را در نقطه های X و Y قطع کرده اند. CX و DY هم، AB را، به ترتیب، در نقطه های M و N قطع کرده اند. ثابت کنید: $|AM| = |BN|$.
* ۳۵. عدد ۲۳۴۵، با عدد های ۲، ۲۳، ۲۳۴، ۲۳۴۵ اغاز و با عدد های ۵، ۴۵، ۳۴۵، ۲۳۴۵ به پایان رسیده است. همین تعریف را، برای هر عدد طبیعی دیگری می پذیریم. عدد های طبیعی a_1، a_2، ...، a_k، به ترتیب، دارای n_1، n_2، ...، n_k رقم هستند. می دانیم آغاز های هیچ کدام از این عدد ها، با پایان های هیچ کدام دیگر، یکی نیست؛ هیچ آغازی به جز خود عدد، با هیچ پایانی از آن، یکی نیست و هیچ کدام از عدد های a_i، بخشی از عدد دیگر نیست. ثابت کنید:

$$\frac{n_1}{10^{n_1}} + \frac{n_2}{10^{n_2}} + \cdots + \frac{n_k}{10^{n_k}} < 1$$

به شرطی که بدانیم $n_i < 2n_j$ (برای هر i و j).
* ۳۶. در خانه های یک صفحه ی شطرنجی بی پایان، عدد های حقیقی را طوری نوشته ایم که، مجموع عدد های واقع در هر مربعی (که ضلع های آن، روی خط های شبکه قرار دارد)، از لحاظ قدرمطلق، از واحد تجاوز نکند. ثابت کنید، مجموع عدد های واقع در خانه های هر مستطیل (که ضلع های آن، روی خط های شبکه قرار دارد)، از ۱۰۰۰۰ تجاوز تجاوز نمی کند.
* ۳۷. در مساله ی ۳۶، همچنین می دانیم، مجموع عدد های واقع در خانه های یک مستطیل، از لحاظ قدرمطلق، بیشترین مقدار است. ثابت کنید، مجموع عدد ها، در هر مستطیل، از لحاظ قدر مطلق، از ۴ تجاوز نمی کند.

۱۹۷۱

سال ششم

۱. پتروو‌ا و ایوانووا با هم و با موتور، از شهر A، به طرف شهر B، و در همان لحظه ی حرکت آن ها، ایوانوسکی و پتروسکی، با هم و با موتور، از شهر B به طرف شهر A حرکت کردند. سرعت ایوانووا دو برابر سرعت پتروو‌ا و سرعت ایوانوسکی سه برابر سرعت پتروسکی است. ایوانووا، در همان لحظه ای به پتروسکی رسید که پتروو‌ا به ایوانوسکی رسیده بود. کدام یک، به شهر A نزدیک تر است: نقطه ی برخورد ایوانووا با ایوانووسکی یا لحظه ی برخورد پتروو‌ا با پتروسکی؟
۲. بین مثلث هایی که، در آن ها، مجموع طول ها ی میانه ها، یکی است، در کدام یک، مجموع طول های ارتفاع ها بیشتر است؟
۳. کولیا، ژنیا و نادیا چند امتحان می دهند و؛ بسته به رتبه ای که در هر امتحان به دست می آورند (اول، دوم یا سوم)، امتیازی می گیرند. امتیاز ها، عدد های درستی هستند و رتبه ی بالاتر، امتیاز بیشتری می گیرد. بعد از انجام همه ی امتحان ها، کولیا ۲۲ امتیاز گرفت، ولی ژنیا و نادیا، هر کدام ۹ امتیاز، ژنیا، در امتحان جبر، رتبه ی اول را به دست آورده بود. چه کسی در درس فیزیک، رتبه ی دوم را به دست آورده است؟
۴. عدد درستی را پیدا کنید که توان ششم آن در عدد نویسی به مبنای ۱۰، از رقم های ۰، ۱، ۲، ۲، ۲، ۳، ۴، ۴، تشکیل شده باشد.
۵. روی وجه های یک مکعب کوچک، عدد های ۱ یا ۲ نوشته شده است. دو نفر که با هم بازی می کنند، به نوبت، مکعب را می اندازند. در آغاز بازی، عدد ۲۰۰ را روی تخته سیاه نوشته اند. هر کس که مکعب را می اندازد، می تواند، عددی را که آمده است با عدد روی تخته سیاه جمع یا از آن کم کند و یا بازی را واگذار کند. کسی بازی را می برد که، برای نخستین بار، یک عدد چهار رقمی روی تخته سیاه بنویسد. بازی مساوی تمام می شود، وقتی که روی تخته سیاه، یک عدد دو رقمی ظاهر شود و یا، سه بار پشت سر هم، بازی واگذار شود. ثابت کنید، به شرط بازی درست و سنجیده، کسی که بازی را آغاز کرده است، می تواند باخت نداشته باشد (یعنی، یا ببرد و یا مساوی کند).
۶. آیا می توان تمامی صفحه را، با مربع هایی پوشاند که، در بین آن ها، تنها دو مربع مساوی وجود داشته باشد؟

سال هفتم

۷. این دستگاه معادله ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x^2y^2 + xy^2 + x^2y + xy + x + y + 3 = 0 \\ x^2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

۸. بین مثلث هایی که، در آن ها، مجموع طول های نیمساز ها یکی است، مثلثی را پیدا کنید که مجموع طول های ارتفاع های آن، بیشترین مقدار ممکن باشد.

۹. نقطه ی K را در درون مربع ABCD انتخاب کنید. از رأس های A، B، C و D، به ترتیب، بر خط های راست BK، CK، DK، AK عمود هایی رسم کنید. ثابت کنید، این خط های راست عمود، از یک نقطه می گذرند.
۱۰. همان مساله ی ۵.
۱۱. ثابت کنید، یک چندضلعی کوژ (به جز متوازی الاضلاع) را، می توان در مثلثی که از ادامه ی سه ضلع دلخواه چندضلعی به دست می آید، جا داد.
۱۲. مستطیلی را به قطعه هایی با اندازه های ۲×۲ و ۱×۴ تقسیم کرده ایم. برای بازسازی مستطیل، یکی از قطعه های ۲×۲ را کنار گذاشته ایم و، به جای آن، یک قطعه ی ۱×۴ را انتخاب کردیم. ثابت کنید، با این جا به جایی، نمی توان مستطیل را بازسازی کرد.
سال هشتم
۱۳. دو نقطه ی A و B با سرعت های برابر، و بدون تغییر سرعت، روی دو خط راست متقاطع حرکت می کنند. ثابت کنید، نقطه ای روی صفحه وجود دارد که، در هر لحظه، از دو نقطه ی A و B به یک فاصله است.
۱۴. عدد های $۵^{۱۹۷۱}$ و $۲^{۱۹۷۱}$ مفروض اند. اگر آن ها را پشت سر هم بنویسیم، عدد حاصل، چند رقم دارد؟
۱۵. روی محیط دایره ای، ۱۰۰ عدد درست نوشته ایم که، مجموع آن ها، برابر واحد است. به هر عددی که از مجموع چند عدد پشت سر هم به دست می آید، یک حلقه می گوییم. چند حلقه ی مثبت وجود دارد؟
۱۶. در دو توده ی چوب کبریت، روی هم ۱۰۰ عدد چوب کبریت وجود دارد. دو نفر، به این ترتیب با هم بازی می کنند. اولی، یکی از توده ها را کنار می زند و توده ی دوم را، به دو بخش، که لازم نیست برابر باشند، تقسیم می کند. بعد نفر دوم، همین عمل را انجام می دهد و غیره. کسی بازی را می بازد که نتواند، در نوبت خود، توده ی باقی مانده ی چوب کبریت ها را به دو بخش تقسیم کند. آیا کسی که بازی را آغاز می کند، می تواند طوری برنامه ریزی کند که، سرانجام، برنده شود؟
۱۷. عدد طبیعی n، چنان است که $n+۱$ بر ۲۴ بخش پذیر است. ثابت کنید، مجموع همه ی بخشیاب های n (از جمله ی واحد و خود عدد) بر ۲۴ بخش پذیر است.
۱۸. BD، نیمساز داخلی مثلث ABC است. طول ضلع AB برابر ۱۵ و طول ضلع BC برابر ۱۰ است. ثابت کنید، طول نیمساز BD، از ۱۲ تجاوز نمی کند.
سال نهم
۱۹. این دستگاه معادله ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x_{۰} = x_{۰}^{۲} + x_{۱}^{۲} + \cdots + x_{۱۰۰}^{۲} \\ x_{۱} = ۲(x_{۰}x_{۱} + x_{۱}x_{۲} + \cdots + x_{۹۹}x_{۱۰۰}) \\ x_{۲} = ۲(x_{۰}x_{۲} + x_{۱}x_{۳} + \cdots + x_{۹۸}x_{۱۰۰}) \\ x_{۳} = ۲(x_{۰}x_{۳} + x_{۱}x_{۴} + \cdots + x_{۹۷}x_{۱۰۰}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{۱۰۰} = ۲x_{۱}x_{۱۰۰} \end{cases}$$

۲۰. همان مساله ی ۱۳.
۲۱. $\overline{abc}$ عددی اول است. ثابت کنید $b^{۲} - ۴ac$ نمی تواند مجذور کامل باشد.
۲۲. همان مساله ی ۱۶، با این پرسش اضافی که، تعداد چوب کبریت ها، در آغاز، چقدر باشد تا کسی که بازی را آغاز می کند، نتواند برنده شود؟
۲۳. CD نیمساز زاویه ی قائمه از مثلث های قائم الزاویه ی ABC است. DE و DK، نیمساز های داخلی مثلث های ADC و BDC هستند. ثابت کنید: $AD^{۲} + BD^{۲} = (AE + BK)^{۲}$.
۲۴. آیا با مثلث های دو به دو مختلفی که طول ضلع های آن ها، عدد هایی گویا هستند، می توان صفحه را پوشاند؟
سال دهم
۲۵. همان مساله ی ۱۷.
۲۶. در یک چهاروجهی، یکی از ارتفاع ها، دو ارتفاع دیگر را قطع می کند. ثابت کنید، همه ی ارتفاع ها، از یک نقطه می گذرند.
۲۷. روی دو خط متقاطع، دو مگس با سرعت های برابر و ثابت می خزند. ثابت کنید، نقطه ای در فضا وجود دارد که، همیشه، از دو مگس به یک فاصله است.
۲۸. ثابت کنید:

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲۰۰} + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۹۹} \cdot \frac{۱}{۲} + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۹۸} \cdot \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{۲} \cdot \frac{۱}{۲۰۰} + \frac{۱}{۲۰۱} < \frac{۱}{۹۰}$$

۲۹. ثابت کنید، اگر عدد های $۲^{۱}$، $۲^{۲}$، $۲^{۴}$، $۲^{۸}$، ... را، پشت سر هم، بعد از ممیز بنویسیم، یک عدد گنگ به دست می آید.
* ۳۰. نقطه ی P و n خط راست ِ دو به دو نا موازی، روی صفحه داده شده اند. نقطه ی P را روی همه ی خط های راست مفروض، تصویر می کنیم، بعد، تصویر های حاصل را دوباره روی همه ی خط های راست تصویر می کنیم و غیره. ثابت کنید، همه ی نقطه هایی که به این ترتیب به دست می آیند، سطح یک دایره را می پوشانند.

دور نهایی

۳۱. $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، عدد هایی حقیقی و مثبت اند، ثابت کنید، معادله ی

$$x^n + a_۱x^{n-۱} - a_۲x^{n-۲} - \cdots - a_n = ۰$$

بیش از یک ریشه ی مثبت ندارد.

۳۲. عدد های حقیقی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n مفروض اند. برای $k \le n$، بزرگترین عدد از بین عدد های

$$a_k, \frac{a_{k-۱}+a_k}{۲}, \cdots, \frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_k}{k}$$

را A_k می نامیم. ثابت کنید، کوچکترین عدد در بین عدد های

$$A_۱, A_۲, \cdots, A_n$$

از میانگین حسابی عدد های $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، بزرگتر نیست.

۳۳. از رأس A در مثلث ABC، خط راست دلخواهی رسم کرده ایم؛ $B_۱$ و $C_۱$، تصویر های نقطه های B و C روی این خط راست؛ $B_۲$ تصویر $B_۱$ روی AC و $C_۲$ تصویر $C_۱$ روی AB است. ثابت کنید، نقطه ی برخورد خط های راست $B_۱B_۲$ و $C_۱C_۲$، روی یکی از ارتفاع های مثلث ABC یا روی امتداد آن واقع است.

* ۳۴. مجموع عدد های درست $b_۱$، $b_۲$، ...، b_n برابر است با واحد، برای $k \le n$، تعداد عددهای مثبت را در دنباله ی

$$b_k, b_k+b_{k+۱}, b_k+b_{k+۱}+b_{k+۲}, \cdots, b_k+b_{k+۱}+\cdots+b_n+b_۱+\cdots+b_{k-۱}$$

با N_k نشان می دهیم. ثابت کنید، همه ی عدد های N_k مختلف اند.

۳۵. مربع به ضلع $n-۱$ و مستطیل با ضلع های $a-۱$ و $b-۱$ را به مربع های به ضلع واحد تقسیم کرده ایم؛ در ضمن $ab = n^۲$. به هر یک از $n^۲$ گره مربع، یکی از گره های مستطیل را متناظر کرده ایم؛ در ضمن، گره های متفاوت مربع، متناظر با گره های متفاوت مستطیل اند. می دانیم، هر یک از چهار رأس و مرکز هر مربع ۲×۲، متناظر با چهار رأس و مرکز متوازی الاضلاعی است که رأس ها و مرکز آن، در گره های شبکه مستطیل اند ثابت کنید: $a = b$.

* ۳۶. یال های یک گراف کامل را، که $۲n+۱$ راس دارد، با سه رنگ مختلف، رنگی کرده ایم. ثابت کنید، می توان یکی از رنگ ها و $n+۱$ رأس را طوری انتخاب کرد که، از هر یک از این رأس ها به هر رأس دیگر از آن ها، بتوان از طریق یال هایی حرکت کرد که دارای رنگ انتخابی ما باشند.

۳۷. ثابت کنید، معادله ی $x^۳ + y^۳ + z^۳ = ۲$، در مجموعه ی عدد های درست، بی نهایت جواب دارد.

سال ۱۹۷۲

سال ششم

۱. دو هواپیما، هم زمان، از شهر A پرواز کردند. مسیر اولی چنین بود:

A-B-D-C-A-D-B-C-A

و مسیر دومی

A-B-C-D-A-B-C-D-A-B-C-D-A

کدام هواپیما، زودتر پرواز خود را تمام می کند، به شرطی که سرعت های آن ها یکسان باشد؟

۲. دو گروه جهان گرد، در دو راه پیمایی شرکت کردند (برخی از آن ها، در هر دو راه پیمایی بودند). در راه پیمایی نخستین، ۶۰% و در راه پیمایی دوم ۷۵% راه پیمایان مرد بودند. ثابت کنید، در مجموع (یعنی با گرد هم آیی دو گروه). تعداد مردان کمتر از تعداد زنان نیست.

۳. شش نقطه را روی صفحه طوری در نظر بگیرید که، هر سه نقطه از آن ها، راس های یک مثلث متساوی الساقین باشند.

۴. در عددی که از حاصل ضرب عدد های از ۱ تا ۱۰۰ به دست می آید، همه ی صفر ها را حذف کرده ایم. در عددی که می ماند، آخرین رقم سمت راست، عددی زوج است یا فرد؟

۵. دانش آموزان، هفت امتحان دادند و همه برای نمره های چهار و پنج؛ در ضمن، کسی بیش از دو نمره ی چهار نگرفت. می دانیم، دو دانش آموز وجود ندارد که، یکی از آن ها، در هر درس، نمره ای بیشتر یا مساوی دومی آورده است. ثابت کنید، تعداد دانش آموزان بیشتر از ۲۱ نفر نیست.

۶. آیا می توان عدد های از ۱ تا ۱۲ را روی یال های یک مکعب طوری قرار داد که، اگر مجموع عدد های هر سه یالی را که در یک رأس به هم می رسند، عدد متعلق به آن رأس در نظر بگیریم، آن وقت، عدد های واقع در همه ی رأس ها، یکی باشد؟
سال هفتم
۷. آیا می توان با دو خط راست که از دو رأس مثلث می گذرند، مثلث را به چهار بخش چنان تقسیم کرد که، سه بخش از آن ها مثلث هایی هم ارز (یعنی با مساحت های برابر) باشند؟
۸. همان مساله ی ۲.
۹. ABCD یک ذوزنقه است (BC||AD). لحظه ی برخورد نیمساز های دو زاویه ی A و B را M، و نقطه ی برخورد نیمساز های دو زاویه ی C و D را N می نامیم. با معلوم بودن طول ضلع های ذوزنقه، طول پاره خط راست MN را پیدا کنید.
۱۰. در رأس های یک ۱۲ ضلعی منتظم، برگه های کوچکی به رنگ سیاه یا سفید گذاشته ایم. ثابت کنید، سه برگه ی هم رنگ پیدا می شود که، رأس های یک مثلث متساوی الساقین را تشکیل دهند.
۱۱. همان مساله ی ۵.
۱۲. ثابت کنید، اگر یک عدد زوج را بتوان به صورت مجموع دو مجذور کامل نوشت، آن وقت، نصف این عدد را هم، می توان به صورت مجموع دو مجذور کامل نوشت.
سال هشتم
۱۳. K و M، نقطه های برخورد دو دایره اند. از نقطه ی K، دو نیم خط راست رسم کرده ایم؛ یکی از نیم خط ها، دایره ی اول را در A و دایره ی دوم را در نقطه ی B و نیم خط دیگر، دایره ی اول را در نقطه ی C و دایره ی دوم را در نقطه ی D قطع کرده است. ثابت کنید، دو زاویه ی MAB، و MCD برابر اند.
۱۴. آیا عددی طبیعی وجود دارد که مجموع رقم های مجذور آن، برابر ۱۹۷۲ باشد؟
۱۵. ثابت کنید، اگر قطر های یک چهارضلعی، آن را به چهار مثلث با محیط های برابر تقسیم کنند، این چهارضلعی، یک لوزی است.
۱۶. روی صفحه ای، چند دایره ی کوچک رسم و، برخی از آن ها را، به وسیله ی پاره خط های راستی به هم وصل کرده ایم. ثابت کنید، در این دایره ها می توان عدد های درست را طوری قرار داد که، دو دایره وقتی، و تنها وقتی، به هم وصل شده باشند که، در آن ها، دو عدد نسبت به هم اول، وجود داشته باشد.
* ۱۷. مثلث متساوی الاضلاعی با ضلع به طول برابر ۳۲ داده شده است. از گوشه ی آن، مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع واحد جدا کرده ایم. شکل باقی مانده را به مثلث های متساوی الاضلاع تقسیم کرده ایم. ثابت کنید، تعداد آن ها، از ۱۵ کمتر نیست.
۱۸. عدد های طبیعی m، n، a، b، k، و l چنان اند که

$$\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{k}{l}, |ml - kn| = ۱$$

ثابت کنید: $b \ge n + l$.
سال نهم
۱۹. همان مساله ی ۱۴.
۲۰. چهارضلعی ABCD در دایره ای محاط است. ثابت کنید، اگر نقطه های برخورد دو مماسی که از A و C بر دایره رسم می شوند، روی خط راست BD باشد، آن وقت

$$|AB|.|CD| = |BC|.|AD|$$

۲۱. همان مساله ی ۱۸.
۲۲. AC بزرگترین ضلع مثلث ABC است. روی آن

$$|AC_۱| = |AB| \text{ و } |CA_۱| = |CB|$$

را جدا کرده ایم. همچنین، روی ضلع های AB و CB، پاره خط های راست

$$|AA_۲| = |AA_۱| \text{ و } |CC_۲| = |CC_۱|$$

را جدا کرده ایم. ثابت کنید، نقطه های $A_۱$، $A_۲$، $C_۱$ و $C_۲$، روی محیط یک دایره اند.
۲۳. عدد های طبیعی m و n مفروض اند. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{\sqrt[m]{n+۱}} + \frac{۱}{\sqrt[n]{m+۱}} \ge ۱$$

۲۴. دنباله ی پایانی از عدد های درست داده شده است. زیر هر یک از جمله های این دنباله، عددی را که معرف تعداد تکرار های آن جمله در دنباله است، می نویسیم. به همین ترتیب، زیردنباله ی دوم، دنباله ی سوم را می نویسیم و غیره. ثابت کنید، در مرحله ای از کار، به دو دنباله ی یکسان پشت سر هم می رسیم.

سال دهم

۲۵. عدد های a، b، و c، بین ۰ و ۱ قرار دارند. ثابت کنید:

$$a+b+c-2\sqrt{abc} \geq ab+bc+ac-2abc$$

۲۶. خط شکسته ی بسته ی فضایی را منتظم می نامیم، وقتی که هم طول ضلع های آن و هم اندازه ی زاویه هایی که هر دو ضلع مجاور تشکیل می دهند، با هم برابر باشند. ثابت کنید، برای هر $n>5$، خط شکسته n ضلعی منتظمی وجود دارد که بر یک صفحه واقع نیست.

۲۷. عدد اول p، با عدد ۳ برابر نیست. ثابت کنید، عدد $4p^2+1$ را می توان به صورت مجموع مجذور های سه عدد طبیعی نوشت.

۲۸. همان مساله ی ۲۲.

* ۲۹. مثلث متساوی الاضلاعِ به مساحت واحد، در درون هفت ضلعی کوژ با مساحت برابر ۱/۰۰۰۰۰۰۱ قرار دارد. ثابت کنید، دست کم یکی از زاویه های هفت ضلعی از ۱۳۹ درجه بیشتر است.

۳۰. چند تیم والیبال در یک مسابقه شرکت کردند که، بعد از آن، معلوم شد، هر تیم ۱۰ برد و ۱۰ باخت داشته است. ثابت کنید، می توان چند مسابقه را طوری انتخاب کرد که، در آن ها، هر تیم درست یکبار برد و یکبار باخت داشته باشد.

دور نهایی

۳۱. برای عدد طبیعی k، حداکثر نسبت $\frac{k^2}{1/01^k}$ را پیدا کنید. این حداکثر، به ازای چه مقدار هایی از k به دست می آید؟

۳۲. ثابت کنید، خط راستی که مثلث را به دو بخش هم ارز (یعنی با مساحت های برابر) تقسیم می کند، محیط آن را به نسبتی تقسیم می کند که از نسبت ۱:۳ بزرگتر نیست.

۳۳. ۹۹ رقم برابر ۹ را پشت سر هم نوشته ایم. ثابت کنید، می توان ۱۰۰ رقم در سمت راست آن طوری نوشت که، عدد حاصل، مجذور یک عدد درست باشد.

۳۴. نقطه ی M را روی ضلع BC از چهارضلعی کوژ ABCD انتخاب کرده ایم. ثابت کنید، بین دایره های محاطی مثلث های ABD، ACD و AMD، دو دایره با شعاع های نا برابر پیدا می شود.

۳۵. دنباله ای از عدد های طبیعی داریم که هر جمله ی آن، از جمله ی قبل بزرگتر و، از جمله ی سوم به بعد، هر جمله برابر است با مجموع دو جمله از جمله های قبلی. ثابت کنید، در این دنباله، بی نهایت عدد مرکب وجود دارد.

۳۶. هر ضلع یک مثلث متساوی الاضلاع را، به ۳۰ بخش برابر تقسیم کرده ایم. با رسم خط های راستی موازی با ضلع های مثلث و از نقطه های تقسیم ضلع ها، مثلث اصلی را به ۹۰۰ مثلث کوچک تقسیم کرده ایم. حداکثر چند رأس تقسیم وجود دارد که هیچ دو تایی از آن ها، روی ضلع یا روی خط راست رسم شده نباشند؟

* ۳۷. در شهری، ۱۹۷۲ ایستگاه مترو وجود دارد. هر خط مترو، تنها دو ایستگاه را به هم مربوط می کند. می دانیم اگر ۹ ایستگاه دلخواه بسته شود، سیستم مترو، ارتباط شهری را تامین می کند. همچنین می دانیم، برای رفتن از ایستگاه A به ایستگاه B، باید دست کم ۹۹ بار جا عوض کرد. ثابت کنید، همه ی ایستگاه های مترو را می توان به ۱۰۰۰ گروه طوری تقسیم کرد که، در هر گروه، هیچ دو ایستگاهی به وسیله ی خط مترو به هم مربوط نباشند.

* ۳۸. شهری به شکل یک مربع شطرنجی ۱۰۰×۱۰۰ است که هر خانه ی شطرنجی آن، ضلعی به طول ۵۰۰ متر دارد. در ازای هر ضلع یک مربع کوچک، تنها در یک جهت می توان حرکت کرد. می دانیم، با رعایت قانون حرکت، نمی توان بیش از یک کیلومتر در شهر جلو رفت. ثابت کنید، دست کم ۱۳۰۰ چهارراه در شهر پیدا می شود که، با رعایت قانون حرکت، نمی توان از آن ها خارج شد (هر یک از چهار رأس مربع بزرگ را هم، یک چهار راه به حساب آورید).

۱۹۷۳

سال ششم

۱. در سه مغازه، روی هم ۱۹۷۳ کتاب درسی وجود دارد؛ در سه روز نخست، مغازه ی اول، به ترتیب، $\frac{1}{47}$، $\frac{1}{7}$ و $\frac{1}{2}$ کتاب های خود؛ مغازه ی دوم، به ترتیب، $\frac{1}{41}$، $\frac{1}{5}$، و $\frac{1}{3}$ کتاب های خود؛ و مغازه ی سوم، به ترتیب، $\frac{1}{25}$، $\frac{1}{20}$ و $\frac{1}{10}$ کتاب های خود را فروخت. در هر مغازه، چند کتاب درسی بوده است؟

۲. ورقه ی شکلات، دو شیار در طول و سه شیار در عرض دارد که، به یاری آن ها، می توان شکلات را تقسیم کرد. دست کم چند بار باید شکلات را شکست تا در هیچ کدام از تکه های آن شیاری وجود نداشته باشد؛ در ضمن، می توان چند تکه را، با روی هم قرار دادن شیار های آن ها، با هم شکست.

۳. ثابت کنید، عددی که با ششصد رقم برابر ۶ و تعدادی صفر نوشته شده باشد، نمی تواند مجذور یک عدد درست باشد.

۴. ثابت کنید، هر مربع را می توان به صورت ۱۹۷۳ مربع برید.

۵. روی تخته سیاه، سه ستون عدد نوشته شده است؛ در ضمن، هیچ عددی، در یک ستون دو بار نیامده است. در ستون چهارم، همه ی عدد هایی را می نویسیم که درست یک بار در دو ستون اول آمده اند؛ در ستون پنجم، عدد هایی را می

نویسیم که در ستون های سوم و چهارم، درست یکبار آمده اند؛ در ستون ششم، عدد هایی که در ستون های دوم و سوم، درست یکبار آمده اند؛ در ستون هفتم، عدد هایی که در ستون های اول و ششم، یکبار با آن ها برخورد می کنیم. ثابت کنید، تعداد عدد ها، در ستون های پنجم و هفتم، یکی است.

۶. مثلث متساوی الساقینی داده شده که یکی از زاویه های آن برابر ۱۰۸ درجه است. ثابت کنید، می توان آن را به مثلث هایی با زاویه های حاده تقسیم کرد.

سال هفتم

۷. همان مساله ی ۲.

۸. همان مساله ی ۳.

۹. E و K، به ترتیب، وسط ضلع های AD و BC از مستطیل ABCD، H نقطه ی دلخواهی از پاره خط راست EK، M نقطه ی برخورد خط های راست AH و BC و P نقطه ی برخورد خط های راست BH و CD است. از نقطه ی M، خط راستی موازی CD و از نقطه ی P، خط راستی موازی AD رسم کرده ایم. ثابت کنید، نقطه ی برخورد خط های راستی که رسم کرده ایم، روی خط راست DH قرار دارد.

۱۰. ثابت کنید $۲^{۱۰}+۵^{۱۲}$، عددی مرکب است.

۱۱. روی هر ضلع متوازی الاضلاع، یک نقطه طوری انتخاب کرده ایم که، با وصل آن ها به یکدیگر، یک چهارضلعی به دست آمده است که مساحتی برابر نصف مساحت متوازی الاضلاع دارد. ثابت کنید، یکی از قطر های چهارضلعی، با یکی از ضلع های متوازی الاضلاع، موازی است.

۱۲. a، b، و c، طول های ضلع های یک مثلث اند و می دانیم:

$$۲(a^۸+b^۸+c^۸)=(a^۴+b^۴+c^۴)^۲$$

ثابت کنید، این مثلث، قائم الزاویه است.

سال هشتم

۱۳. AD و BE نیمساز های مثلث ABC هستند. ثابت کنید، اگر $|BC|<|AC|$، آن وقت $|BD|<|DE|<|AE|$.

۱۴. مجموع رقم های یک عدد ده رقمی برابر چهار است. مجموع رقم های مجذور این عدد، چه عددی می تواند باشد؟

۱۵. برای هر دو نقطه ی A و B از صفحه، $A*B$ را به معنای قرینه ی نقطه ی A نسبت به نقطه ی B می گیریم. سه رأس یک مربع داده شده است. آیا می توان، تنها با استفاده از عمل *، رأس چهارم مربع را به دست آورد؟

۱۶. مثلث را به تعدادی چندضلعی کوژ بریده ایم. ثابت کنید، در بین این چندضلعی ها، یا مثلث وجود دارد و یا دو چندضلعی پیدا می شود که، تعداد ضلع های آن ها، یکی است.

۱۷. چند عدد طبیعی، روی محیط دایره نوشته ایم. سپس، بین هر دو عدد مجاور، بزرگترین بخشیاب مشترک آن ها را قرار داده ایم و، در پایان کار، عدد های نخستین را پاک کرده ایم. بعد، روی عدد های باقی مانده، همان عمل قبلی را انجام داده ایم وغیره. ثابت کنید، بعد از چند گام، همه ی عدد های روی محیط دایره، با هم برابر می شوند.

۱۸. چند نقطه داده شده است که بعضی از آن ها، به وسیله ی پاره خط های راستی به هم وصل شده اند؛ در ضمن، این پاره خط های راست به گونه ای رسم شده اند که از هر نقطه به هر نقطه ی دیگر، می توان از طریق آن ها رفت. آیا همیشه می توان، یکی از نقطه ها را، همراه با پاره خط های راستی که از آن خارج شده اند برداشت، به نحوی که باز هم نقطه های باقی مانده، از طریق پاره خط های راست به هم مربوط باشند؟

سال نهم

۱۹. می دانیم، برای چهارضلعی محاطی ABCD، داریم:

$$|AB|:|BC|=|AD|:|DC|$$

خط راستی که از رأس B و نقطه ی وسط قطر AC می گذرد، دایره ی محیطی را در نقطه ی $M \neq B$ قطع می کند. ثابت کنید:

$$|AM|=|CD|$$

۲۰. مجموع رقم های یک عدد ۹ رقمی، برابر ۳ شده است. مجموع رقم های مکعب این عدد، چه عددی می تواند باشد؟

۲۱. روی ضلع های AB و CD از متوازی الاضلاع ABCD، نقطه های K و M را طوری پیدا کنید که مساحت چهارضلعی که از برخورد مثلث های AMB و CDK به دست می آید، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۲۲. همان مساله ی ۱۷.

۲۳. همان مساله ی ۱۶.

۲۴. ۱۰ تکه ی کوچک کاغذ سفید و ۲۰ تکه ی کوچک کاغذ سیاه را، روی محیط دایره قرار داده ایم. جای هر دو تکه ی کاغذ را، به شرطی که بین آن ها سه تکه کاغذ دیگر وجود داشته باشد، می توانیم با هم عوض کنیم. دو تبدیل کاغذ ها را (در این ۳۰ نقطه) هم ارز می نامیم، وقتی که یکی از آن ها را بتوان، با چند تبدیل از این گونه، منجر به دیگری کرد. چند تبدیل نا هم ارز وجود دارد؟

سال دهم

۲۵. همان مساله ی ۱۳.
۲۶. از یک تصاعد حسابی بی پایان، با جمله ی اول $a \neq ۰$ و قدر نسبت d، توانسته ایم، یک تصاعد هندسی بی پایان جدا کنیم. ثابت کنید، $\frac{a}{d}$، عددی گویا است.
۲۷. ثابت کنید:

$$\cos\frac{\pi}{۴}\left(۱-\cos\frac{\pi}{۴}\right)+۲\cos\frac{\pi}{۸}\left(۱-\cos\frac{\pi}{۸}\right)+\cdots$$
$$+۲۵۶\cos\frac{\pi}{۱۰۲۴}\left(۱-\cos\frac{\pi}{۱۰۲۴}\right)<\frac{۱}{۲}$$

۲۸. ثابت کنید، در هر چندوجهی کوژ، دو وجه وجود دارد که، تعداد ضلع های آن ها، یکی است.
۲۹. یک ۱۹۷۳ ضلعی کوژ، نقطه ی O در درون این چندضلعی و زاویه ی α داده شده است. می دانیم، به هر صورتی که زاویه ی α را به رأس O بسازیم، مساحت بخش مشترک چندضلعی و زاویه، ثابت می ماند. ثابت کنید، این چندضلعی منتظم است.
۳۰. همان مساله ی ۲۴.
دور نهایی
۳۱. می دانیم، مجموع قدر مطلق های تفاضل های دو به دو ی پنج عدد غیر منفی، برابر واحد است. کمترین مقدار مجموع این عدد ها، چقدر می تواند باشد؟
۳۲. $۲k+۳$ نقطه روی صفحه ای داده شده اند، به نحوی هیچ چهار نقطه ای روی محیط یک دایره نیستند. ثابت کنید، می توان سه نقطه پیدا کرد که، اگر دایره ای از آن ها بگذرانیم، درست k نقطه در درون آن قرار می گیرد.
۳۳. این چندجمله ای، با ضریب های درست، داده شده است:

$$P(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\cdots+a_{n-۱}x+a_n$$

در ضمن می دانیم معادله های

$$P(x)=۱, P(x)=۲, P(x)=۳$$

دارای ریشه های درست هستند. ثابت کنید، معادله ی $P(x)=۵$، نمی تواند دو یا بیشتر ریشه ی درست داشته باشد.
۳۴. چند تیم والیبال در مسابقه ای شرکت کردند. می دانیم، اگر تیم A از تیم B برده باشد، تیمی مثل C پیدا می شود که از A می بازد، ولی از B می برد. حداقل، چند تیم در این مسابقه شرکت کرده اند؟
۳۵. مربعی، به ضلع واحد داده شده است. یک چهارضلعی در آن محاط کرده ایم. در این چهارضلعی، مربعی محاط کرده ایم که، ضلع های آن، با ضلع های مربع بزرگ موازی است. ثابت کنید، اگر طول ضلع مربع اخیر برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، رأس های آن در نقطه های وسط ضلع های چهارضلعی محاطی واقع است.
۳۶. چندضلعی کوژی با مساحت برابر ۹ مفروض است. ۱۰ خط راست موازی، که دو به دو به فاصله ی واحد از یکدیگر اند، این چند ضلعی را بریده اند. ثابت کنید، مجموع طول های پاره خط های راست روی این خط های راست موازی، که به وسیله ی چندضلعی پدید آمده اند، از ۱۰ تجاوز نمی کند.
* ۳۷. دو نفر با هم بازی می کنند. اولی پیش خود، یک عدد ده رقمی در نظر می گیرد. دومی از او می پرسد: در مرتبه های مشخصی از عدد، چه رقم هایی وجود دارد؟ اولی به او پاسخ می دهد؛ ولی تنها رقم ها را نام می برد، بدون این که مرتبه ی آن ها را معین کند. حداقل، با چند پرسش از این گونه، می توان عدد را پیدا کرد؟
* ۳۸. معکبی با ضلع به طول a را، روی یک صفحه ی شطرنجی انداخته ایم. ثابت کنید، این مکعب نمی تواند بیش از $(a+۱)^۲$ رأس از خانه های شطرنجی را بپوشاند.
* ۳۹. روی محیط یک چندضلعی کوژ، دو حشره و دو مگس، در یک جهت و با یک سرعت حرکت می کنند. موقعیت نخستینِ حشره ها چگونه باشد تا، به فرض موقعیت دلخواه اولیه برای مگس ها، حداقل فاصله ی بین مگس ها، بیشتر از حداقل فاصله ی بین حشره ها نباشد (با مساله ی ۴۰.۸۰ مقایسه کنید).
۴۰. در مربعی به ضلع واحد، ۱۹۷۳ شکل رسم کرده ایم که، مجموع مساحت های آن ها، از ۱۹۷۲ بیشتر است. ثابت کنید، همه ی این شکل ها، نقطه ی مشترکی دارند.

۱۹۷۴

سال ششم
۱. همه ی عدد های $\overline{abc}$ را پیدا کنید که، برای آن ها، داشته باشیم

$$\overline{abc}=۲(\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ac})$$

۲. آیا چندضلعی کوژی وجود دارد که درست ۱۹۷۴ قطر داشته باشد؟

۳. با مقوا، چند مثلث متساوی الاضلاع درست کرده اند. در سه رأس هر مثلث، عدد های ۱، ۲، و ۳ را نوشته اند. سپس، آن ها را به شکل یک ستون روی هم چیده اند. آیا ممکن است، وضعی پیش آید که مجموع عدد ها در طول هر یال ستون، برابر ۵۵ شود؟
۴. در مساله ی ۳، آیا ممکن است مجموع عدد ها در هر یال برابر ۵۰ شود؟
۵. A، B و C، پشت خط حرکت آماده ی مسابقه دو هستند. در لحظه ی حرکت، C اندکی تاخیر داشت، ولی بعد، در طول حرکت، یا جلو می افتاد و یا درست شش بار از او جلو افتادند. B، در آغاز حرکت، نسبت به A تاخیر داشت. در جریان حرکت، یا A جلو می افتاد و یا درست پنج بار از او جلو افتادند. B پیش از A به پایان خط رسید. در مسابقه، این سه نفر، چه ردیف هایی را به دست آوردند؟
۶. کشور دارای ۱۹۷۴ شهر است. از پای تخت، به شهر های دیگر، ۱۰۱ خط هوایی وجود دارد، ولی از شهر A (که دورترین شهر نسبت به پای تخت است)، تنها یک خط هوایی خارج می شود. برای شهر های دیگر، هر شهر با ۲۰ خط هوایی به شهر های دیگر مربوط است. ثابت کنید، از پای تخت می توان، با عوض کردن هواپیما، به شهر A پرواز کرد.
سال هفتم
۷. می دانیم

$$a+b+c=۷ \text{ و } \frac{۱}{a+b}+\frac{۱}{b+c}+\frac{۱}{c+a}=\frac{۷}{۱۰}$$

مطلوب است محاسبه ی مقدار

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

۸. O را مرکز مثلث متساوی الاضلاع ABC می گیریم. مجموعه ی نقطه های X را طوری پیدا کنید که، هر خط راستی که از X می گذرد، یا پاره خط راست AB و یا پاره خط راست OC را قطع کند.
۹. همه ی عدد های $\overline{abcd}$ را پیدا کنید که، برای هر یک از آن ها، داشته باشیم:

$$\overline{abcd}=\overline{ad}.\overline{ada}$$

۱۰. نقطه های A، B و C روی محیط دایره واقع اند. D وسط خط شکسته ی ABC، روی پاره خط راست BC و E وسط کمان ABC است. ثابت کنید خط راست ED بر خط راست BC عمود است.
۱۱. همان مساله ی ۶.
۱۲. در مثلث متساوی الساقین، نیمساز های زاویه ی منفرجه و زاویه ی حاده را رسم کرده ایم. طول نیمساز زاویه ی راس، نصف طول نیمساز زاویه ی مجاور قاعده شده است. مقدار زاویه های مثلث را پیدا کنید.
سال هشتم
۱۳. روی صفحه، دو دایره، در بیرون یکدیگر داده شده اند. آیا نقطه ای در بیرون این دو دایره وجود دارد، به نحوی که هر خط راستی که از این نقطه می گذرد، دست کم یکی از دایره ها را قطع کند؟
۱۴. این معادله را در مجموعه ی عدد های طبیعی حل کنید:

$$x^{x^{x^{x}}}=(۱۹-y^{x})y^{x^{y}}-۷۴$$

۱۵. از یک مقوای شطرنجی ۸×۸، خانه ی گوشه ای را بریده ایم. آیا بقیه ی مقوا را می توانیم به ۱۷ مثلث هم ارز (یعنی با مساحت های برابر) تقسیم کنیم؟
۱۶. در خانه ی $a۱$ از صفحه ی شطرنجی ۸×۸، پیاده سفید و در خانه ی $h۸$، پیاده ی سیاه قرار دارند. پیاده ی سفید می تواند تنها به طرف بالا یا به سمت راست و پیاده ی سیاه، تنها به پایین یا به سمت چپ حرکت کند. پیاده نمی تواند به خانه ای وارد شود که دیگری اشغال کرده است، ولی می تواند هر چند مرتبه، حرکت کند. می دانیم، بعد از مدتی، جای دو پیاده عوض شده است. ثابت کنید، در جریان حرکت های دو پیاده، لحظه ای وجود دارد که، خط راست گذرنده از مرکز های خانه هایی که به وسیله ی دو پیاده اشغال شده است، بر خط راست گذرنده از مرکز های خانه های $a۱$ و $h۸$ عمود است.
۱۷. ثابت کنید، نمی توان مجموعه ی با پایانی از n نقطه ($n>۴$) پیدا کرد، به نحوی که هیچ سه نقطه ای روی یک خط راست نباشند و، در ضمن، برای هر سه نقطه ی این مجموعه، بتوان نقطه ی چهارمی از همین مجموعه پیدا کرد که با سه نقطه ی انتخابی، راس های یک متوازی الاضلاع باشند.
۱۸. باکتری وجود دارد که، در طول زمان معینی، نصف می شود. یکی از نیمه ها، دوباره نصف می شود و غیره. ۱۰۰۰ باکتری ایجاد می شود. ثابت کنید، باکتری وجود دارد که، نتیجه ی تکثیر آن، از ۳۳۴ کمتر و از ۶۶۷ بیشتر نیست.
سال نهم
۱۹. همان مساله ی ۱۵.
۲۰. همان مساله ی ۱۴.
۲۱. همان مساله ی ۱۶، برای صفحه ی شطرنجی ۹×۹.

۲۲. مثلث ABC و دایره ی S، روی صفحه داده شده اند. شعاع دایره ی محیطی مثلث برابر R و شعاع دایره ی مفروض برابر $\frac{۱}{۲}R$ است. ثابت کنید، نقطه ی T وجود دارد به نحوی که پاره خط های راست TA، TB، و TC، محیط دایره ی S را نصف می کنند.

۲۳. نقطه ی X درون دایره ی به مرکز O قرار دارد. نقطه ی Y را روی قطری که از X می گذرد، طوری انتخاب می کنیم که نقطه ی O وسط دو نقطه ی X و Y باشد. می خواهیم از نقطه ی Y، وتر AB را چنان بگذرانیم که زاویه ی AXB، حداقل ممکن باشد.

* ۲۴. در یک زبان، سه کلمه ی A، B و C چنان اند که کلمه ی AABB بر کلمه ی CC منطبق است. ثابت کنید، کلمه ای مثل D وجود دارد که، هر کدام از کلمه های A، B و C، با چند بار نوشتن کلمه ی D به دست می آیند.

سال دهم

۲۵. آیا عددی ۲۰ رقمی که از سمت چپ با ۱۱ رقم برابر واحد آغاز می شود، وجود دارد که مجذور یک عدد درست باشد؟

۲۶. نیم خط های راست $OS_۱$، $OS_۲$، $OS_۳$، که از نقطه ی O آغاز شده اند، سه صفحه ی موازی را، به ترتیب، در نقطه های $A_۱$، $B_۱$، $C_۱$؛ $A_۲$، $B_۲$، $C_۲$؛ $A_۳$، $B_۳$، $C_۳$ قطع کرده اند. هرم $OA_۱B_۲C_۳$ حجمی برابر V دارد. حجم هرم های $OA_۱B_۱C_۱$، $OA_۲B_۲C_۲$، $OA_۳B_۳C_۳$ را به ترتیب، $V_۱$، $V_۲$، $V_۳$ می نامیم. ثابت کنید:

$$V \le \frac{۱}{۳}(V_۱+V_۲+V_۳)$$

۲۷. به شرط این که بدانیم:

$$|x_۱| \le ۱, |x_۲| \le ۱, |x_۳| \le ۱, |x_۴| \le ۱$$

مقدار ماکزیمم این عبارت را پیدا کنید:

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴-x_۱x_۲-x_۱x_۳-x_۱x_۴-x_۲x_۳-x_۲x_۴-x_۳x_۴$$
$$+x_۱x_۲x_۳+x_۱x_۲x_۴+x_۱x_۳x_۴+x_۲x_۳x_۴-x_۱x_۲x_۳x_۴$$

۲۸. ثابت کنید، نمی توان در فضا، مجموعه ی محدودی از n نقطه پیدا کرد ($n>۴$)، به نحوی که برای هر سه نقطه ی آن، نقطه ی چهارمی از مجموعه وجود داشته باشد که، با هم، یک متوازی الاضلاع تشکیل دهند.

۲۹. از نقطه ی O، ۱۲ نیم خط راست، در یک صفحه رسم شده است و می دانیم، هر دو نیم خط مجاور، زاویه ای کوچکتر از $\frac{\pi}{۴}$ تشکیل می دهند. روی نیم خط راست $S_۱$، نقطه ی $A_۱$ را به فاصله ی ۷۲۹ از O انتخاب کرده ایم. از نقطه ی $A_۱$، خط راستی موازی با نیم خط راست $S_{۱۲}$ کشیده ایم تا $S_۲$ را در نقطه ی $A_۲$ قطع کند. از نقطه ی $A_۲$، خط راستی موازی با $S_۱$ رسم کرده ایم تا $S_۳$ را در $A_۳$ قطع کند و غیره. سرانجام، نقطه ی $A_{۱۳}$ روی $S_۱$ به دست می آید. ثابت کنید: $|OA_{۱۳}| \le ۱$.

۳۰. عدد ۲^n را روی تخته سیاه نوشته ایم. زیر آن دو عدد طبیعی را، در یک ردیف، قرار داده ایم، به نحوی که مجموع آن ها برابر ۲^n باشد. زیر هر کدام از عدد های جدید، دوباره، دو عدد طبیعی به مجموع عدد بالای خود نوشته ایم. این عمل را تا آنجا ادامه داده ایم که به عدد واحد برسیم. ثابت کنید، مجموع همه ی عدد هایی که روی تخته سیاه نوشته ایم، از $n \times ۲^n$ کمتر نیست.

دور نهایی

۳۱. فراز سیاره ای که به شکل کره است، ۳۷ ماهواره (که هر کدام را یک نقطه به حساب می آوریم)، پرواز می کنند. ثابت کنید، در هر لحظه، می توان نقطه ای روی سیاره پیدا کرد که، از آن جا، بیش از ۱۷ ماهواره دیده نمی شود.

۳۲. گروهی از مردم در جایی گرد هم آمده اند. هر دو نفر از این گروه، به یک اندازه آشنا در آنجا دارند، ولی آشنای مشترکی ندارند. ثابت کنید، در این گروه، یا هیچ کس با دیگری آشنا نیست و یا کسی، درست یک آشنا دارد.

۳۳. ثابت کنید، در چندضلعی کوژ، که تعداد ضلع های آن عددی زوج است، قطری وجود دارد که با هیچ یک از ضلع های آن موازی نیست.

۳۴. در خانه های یک جدول مستطیلی، عدد های طبیعی نوشته شده است. می توانیم، در هر مرحله، عدد های یک ستون را دو برابر و یا از عدد های یک سطر، یک واحد کم کنیم. ثابت کنید، به کمک این عمل ها، می توان جدولی به دست آورد که تنها شامل صفر ها باشد.

۳۵. ضلع های یک مربع را، پشت سر هم، با عدد های ۱، ۲، ۳، و ۴ شماره گذاری کرده ایم. برای هر نقطه ی دلخواه A و ضلع با شماره ی k، قرینه ی A نسبت به خط راست k را A_k می نامیم. همه ی نقطه های A را طوری پیدا کنید که هر یک از نقطه های A_1، A_{12}، A_{123}، A_{1234}، A_{12341}، ... در درون مربع قرار گیرند.
۳۶. مجموع صد عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰، برابر است با ۲۰۰. ثابت کنید، از بین آن ها، می توان چند عدد انتخاب کرد که مجموعی برابر ۱۰۰ داشته باشند.
۳۷. همه ی عدد های طبیعی k را پیدا کنید که دارای این ویژگی باشند: یک k ضلعی وجود نداشته باشد که خط راستی که از ادامه ی هر ضلع آن به دست می آید، روی ضلع دیگر این k ضلعی قرار گیرد. تنها چندضلعی هایی را در نظر بگیرید که ضلع های مجاور ِ موازی نداشته باشند.
* ۳۸. عدد اول p داده شده است. ثابت کنید، از بین $p+1$ عدد طبیعی، که دو به دو با هم فرق دارند، می توان دو عدد طوری انتخاب کرد که نسبت عدد بزرگتر بر بزرگترین بخشیاب مشترک آن ها، از $p+1$ کوچکتر نباشد.

۱۹۷۵

سال ششم

۱. کولیا یک عدد دو رقمی اندیشید و واسیا تلاش کرد آن را پیدا کند. برای این منظور، واسیا عددهای دو رقمی را روی تخته می نویسد؛ اگر این عدد، همان عدد مورد نظر باشد، کولیا در کنار آن علامت + و اگر تنها در یک رقم با عدد مورد نظر تطبیق کند، علامت - را می گذارد. ثابت کنید، کافی است واسیا ۱۰ عدد روی تخته بنویسد تا عدد مورد نظر را کشف کند.
۲. ۲۶ سنگ دومینو به ردیف چیده شده است. سپس، هر یک از دو سنگ باقی مانده را نصف کرده اند. ثابت کنید، در بین چهار نیمه ای که به دست می آید، دو سنگ یکسان وجود دارد.
۳. ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}+\cdots+\frac{97}{98}-\frac{99}{100}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{50}\right)$$

۴. در صفحه، دایره ای به شعاع ۱ سانتی متر، خط های راست a، b، c، d، و e که دایره را قطع کرده اند و، همچنین، نقطه ی X به فاصله ی ۱۱ سانتی متر از مرکز دایره، داده شده است. قرینه ی نقطه ی X را، پشت سر هم نسبت به پنج خط راست پیدا کرده ایم؛ نقطه ی E به دست آمده است. ثابت کنید، نقطه ی E نمی تواند در درون دایره قرار گیرد.
۵. کولیا و واسیا، تنها به کمک رقم های ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵، یک عدد ۲۰ رقمی می نویسند. رقم اول (از سمت چپ) را کولیا، رقم دوم را واسیا می نویسد و غیره. واسیا می خواهد ترتیبی بدهد که عدد ۲۰ رقمی بر ۹ بخش پذیر باشد. آیا کولیا می تواند مانع او بشود؟
۶. با رقم های ۱، ۲، و ۳، همه ی عدد های چهار رقمی را که ممکن است، نوشته ایم. هر یک از عدد ها با یکی از شماره های ۱، ۲، یا ۳ مشخص شده است. شماره ها را طوری به عدد ها داده ایم که، اگر عدد عدد در همه ی مرتبه ها با هم اختلاف دارند، دو شماره ی متفاوت داشته باشند. معلوم شد، عدد های ۱۱۱۱، ۲۲۲۲، ۳۳۳۳ و ۱۲۲۲، با شماره هایی مشخص شده اند که همان رقم اول سمت چپ آن ها است. ثابت کنید، شماره ی بقیه ی عدد ها هم، همان رقم اول سمت چپ آن ها است.

سال هفتم

۷. کولیا و واسیا، به نوبت و با رقم های ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵، یک عدد ۳۰ رقمی می نویسند. کولیا آغاز می کند و واسیا می خواهد، عدد حاصل، بر ۹ بخش پذیر باشد. آیا کولیا می تواند مانع او بشود؟
۸. p و $p^{p+1}+2$ عدد های اول اند. p را پیدا کنید.
۹. بین رقم های یک عدد سه رقمی، صفر وجود ندارد. این عدد را در مجموع عکس رقم های آن ضرب کرده ایم. حداکثر مقدار این حاصل ضرب چقدر می تواند باشد؟
۱۰. شش ضلعی کوژ ABCDEF داده شده است. M_1 وسط AB، M_2 وسط CD، M_3 وسط M_1M_2، M_4 وسط EF، M_5 وسط AF، M_6 وسط DE، M_7 وسط M_5M_6 و M_8 وسط BC است. ثابت کنید، پاره خط های راست M_3M_4 و M_7M_8، به ناچار یکدیگر را قطع می کنند.
۱۱. همه ی عدد های هفت رقمی را در نظر می گیریم. که با رقم های ۱ و ۲ و ۳ ساخته شده اند. به هر کدام از این عدد ها، یکی از همین رقم ها را اضافه می کنیم، به نحوی که، اگر دو عدد در همه ی مرتبه ها با هم اختلاف دارند، در رقم اضافه شده هم، با یکدیگر فرق داشته باشند. همچنین می دانیم به عدد ۱۱۱۱۱۱۱، رقم ۱؛ به عدد ۲۲۲۲۲۲۲ رقم ۲؛ به عدد ۳۳۳۳۳۳۳، رقم ۳ و به عدد ۱۲۲۲۲۲۲، رقم ۱ اضافه شده است. ثابت کنید، برای همه ی عدد ها، رقمی که اضافه کرده ایم، همان رقم اول عدد هفت رقمی است.
۱۲. دایره ای به شعاع ۱ مفروض است. وتری از دایره را طوری رسم کنید که، اگر آن را ضلع یک مربع بگیریم، فاصله ی مرکز دایره تا یکی از رأس های این مربع، حداکثر مقدار ممکن باشد.

سال هشتم

۱۳. نقطه ی برخورد ارتفاع های مثلث متساوی الساقین، روی محیط دایره ی محاطی مثلث است. نسبت ضلع های مثلث را پیدا کنید.

۱۴. پنج تصاعد هندسی بی پایان داریم که، همه ی جمله های آن ها، عددهایی درست اند. ثابت کنید، عددی طبیعی وجود دارد که در هیچ کدام از تصاعد ها، پیدا نمی شود.

۱۵. F نقطه ی برخورد نیمساز های AD و CE از مثلث ABC است. می دانیم نقطه های B، D، E و F روی محیط یک دایره اند. ثابت کنید، شعاع این دایره، از شعاع دایره ی محاطی مثلث، کوچکتر نیست.

۱۶. ثابت کنید، نقطه های برخورد سهمی های

$$y = x^{۲} + x - ۴۱ \text{ و } x = y^{۲} + y - ۴۰$$

روی محیط یک دایره اند.

۱۷. چند عدد طبیعی $N < 10^{6}$ وجود دارد، به نحوی که N بر $\left[\sqrt{N}\right]$ بخش پذیر باشد.

۱۸. در هفت رأس متوالی یک ۱۰۰ ضلعی منتظم، تکه کاغذ هایی از هفت رقم گذاشته ایم. در هر حرکت، می توانیم یکی از کاغذ ها را، در جهت حرکت عقربه های ساعت، بعد از ۱۰ رأس، روی رأس یازدهم، به شرطی که آزاد باشد، بگذاریم. می خواهیم کاغذ ها را در هفت رأسی که بعد از هفت رأس نخستین واقع اند، قرار دهیم. چند وضع مختلف، برای این تکه کاغذ ها، ممکن است در این هفت رأس پیش آید؟

سال نهم

۱۹. قطر های AB و CD را، عمود بر هم، در دایره ای رسم کرده ایم. روی کمان BD، نقطه ی X را انتخاب کرده ایم؛ در ضمن، AX و CX، با CD و AB، به ترتیب، در نقطه های E و F برخورده اند. ثابت کنید، اگر نسبت $\frac{|CE|}{|ED|}$ عددی گویا باشد، آن وقت نسبت $\frac{|AF|}{|FB|}$ هم عددی گویا است.

۲۰. همان مساله ی ۱۶.

۲۱. بین مثلث هایی که در یک مثلث مفروض قرار دارند، نسبت مساحت به محیط کدام یک، بیشترین مقدار است؟

۲۲. همان مساله ی ۱۸.

۲۳. پنج نیم خط راست، که از یک نقطه آغاز شده اند، روی صفحه ای رسم کرده ایم. حداکثر چند زاویه ی منفرجه تشکیل می دهند؟

۲۴. در یک جدول مربعی ۱۰۰×۱۰۰، بعضی از خانه ها را رنگ آمیزی کرده ایم. هر خانه ی رنگی، یا تنها خانه ی رنگی در ستون خود و یا تنها خانه ی رنگی در سطر خود است. حداکثر، چند خانه می تواند رنگی باشد؟

سال دهم

۲۵. ۱۹۷۵ تصاعد هندسی داریم که، همه ی جمله های آن ها، عدد هایی درست اند. ثابت کنید که آن ها نمی توانند شامل همه ی عدد های طبیعی باشند.

۲۶. همان مساله ی ۲۱.

۲۷. معادله ی $x^{۲} + ۲ = ۴\sqrt{x^{۳} + ۱}$ را حل کنید.

۲۸. چهار کره با شعاع های برابر در فضا داده شده است. ثابت کنید، هیچ سه تایی از آن ها، چهارمی را نمی پوشاند.

۲۹. همان مساله ی ۲۴.

۳۰. یک n ضلعی کوژ، در مربع ۱×۱ قرار دارد. ثابت کنید، سه رأس متوالی از این n ضلعی وجود دارد که مساحت مثلثی که تشکیل می دهند، از $\frac{۸}{n^{۲}}$ بیشتر نیست.

دور نهایی (سال هشتم)

۳۱. درباره ی عددهای a، b، c، و d می دانیم:

$$a^{۲} + b^{۲} = c^{۲} + d^{۲} = ۱ \text{ و } ac + bd = ۰$$

۳۲. کدام بزرگتر اند:

$$۲^{۲^{۲^{\cdot^{\cdot^{۲}}}}} \text{(۱۰۰ با ۲) یا } ۳^{۳^{۳^{\cdot^{\cdot^{۳}}}}} \text{ (۹۹ بار ۳)}$$

۳۳. عدد های طبیعی a، b، و c را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم، عدد های $a^{b} + c$، $b^{c} + a$، و $c^{a} + b$، عدد هایی اول اند.

۳۴. مجموعه ای از نقطه های واقع بر صفحه را در اختیار داریم. می توانیم، قرینه ی هر نقطه را، نسبت به خط راستی پیدا کنیم که عمود منصف پاره خط راستی باشد که دو انتهای آن، دو نقطه از این مجموعه است. اگر از سه نقطه ای آغاز

کنیم که فاصله ی دو به دو ی آن ها، کمتر از واحد است، آیا می توان به مجموعه ای رسید که در آن، دو نقطه با فاصله ای بزرگتر از واحد وجود داشته باشد؟
۳۵. در یک گرد هم آیی ۳۰ نفر جمع شده اند. هر نفر درست با کار های علمی k نفر از این گروه آشنا است. k، دست کم چقدر باید باشد تا بتوانیم بگوییم، حتما دو نفر پیدا می شوند که با کار های علمی یکدیگر آشنا هستند؟
۳۶. هشت رأس از راس های یک ۳۵ ضلعی منتظم را انتخاب کرده ایم ثابت کنید، چهار رأس از این هشت راس، یا یک ذوزنقه و یا یک مستطیل تشکیل می دهند.
* ۳۷. در کشوری، برخی شهر ها، به وسیله ی جاده به هم مربوط اند. طول هر جاده، از ۵۰۰ کیلومتر بیشتر نیست. می دانیم، از هر شهر به هر شهر دیگر، می توان با پیمودن مسیری که از ۵۰۰ کیلومتر بیشتر نیست، رسید. یکی از جاده ها را، به دلیلی، بسته اند؛ ولی هنوز می توان، مثل سابق، از هر شهری به هر شهر دیگر رفت. ثابت کنید، بعد از بسته شدن یکی از جاده ها، برای سفر از هر شهر به هر شهر دیگر، نیازی به پیمودن بیش از ۱۵۰۰ کیلومتر نیست.
* ۳۸. مرکز های ۶۴ خانه ی صفحه ی شطرنج را علامت گذاشته ایم. آیا می توان صفحه ی شطرنج را با سیزده خط راست، چنان به بخش هایی تقسیم کرد که، در هر بخش، بیش از یک نقطه ی نشان دار (مرکز خانه) وجود نداشته باشد؟
دور نهایی (سال های نهم و دهم)
۳۹. همان مساله ی ۳۱.
۴۰. آیا می توان در فضا، چهار کره ی دو به دو غیر متقاطع و نقطه ی A در بیرون آن ها را، طوری در نظر گرفت که، هر نیم خط راستی که از نقطه ی A آغاز می شود، دست کم یکی از کره ها را قطع کند؟
۴۱. همان مساله ی ۳۷.
۴۲. آیا تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ وجود دارد، به نحوی که برای هر x داشته باشیم:

$$f(x)+f^{-1}(x)=-x$$

۴۳. همان مساله ی ۳۸.
* ۴۴. برای دنباله ی عدد های درست x_0، x_1، x_2، ... می دانیم:

$$x_0=0, |x_n|=|x_{n-1}+1| (n\in\mathbb{N})$$

حداقل مقداری که عبارت $|x_1+x_2+\cdots+x_{1975}|$ می تواند داشته باشد، چقدر است؟
۴۵. نقطه های A_1، B_1 و C_1 را روی ضلع های BC، AC و AB از مثلث ABC طوری انتخاب کرده ایم که پاره خط های راست AA_1، BB_1 و CC_1 در نقطه ی D به هم رسیده اند. پاره خط های راست A_1C_1 و BB_1، در نقطه ی E یکدیگر را قطع کرده اند. ثابت کنید، اگر $|BD|=2|B_1D|$، آن وقت $|BE|=|B_1E|$.
* ۴۶. هر یک از عدد های x_0، x_1، ...، x_n یا برابر ۰ است و یا برابر ۱. ثابت کنید:

$$x_0+\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{x_2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}+\cdots+\frac{x_n}{\left(\sqrt{2}\right)^n}\le(1+\sqrt{2})\sqrt{x_0+\frac{x_1}{2}+\cdots+\frac{x_n}{2^n}}$$

۱۹۷۶

سال ششم
۱. ۳۰۰ نقطه روی محیط دایره ای نشان گذاشته شده است. حشره ای در یکی از این نقطه ها نشسته است. او در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت، مرتب از نقطه ای به نقطه ی دیگر می جهد، به این ترتیب: اول روی نقطه ی مجاور، بعد از روی یک نقطه می جهد و در نقطه ی بعد از آن می نشیند، سپس از روی دو نقطه می جهد، بعد از روی سه نقطه و غیره. ثابت کنید، می توان نقطه ای پیدا کرد که حشره، هرگز روی آن قرار نمی گیرد.
۲. عدد های از ۱ تا ۹ را به سه گروه تقسیم کرده ایم: در هر گروه ۳ عدد. سپس، عدد های هر گروه را در هم ضرب کرده ایم؛ بزرگترین عدد از بین این سه حاصل ضرب را a می نامیم. کمترین مقدار ممکن برای a چقدر است؟
۳. روستا های A، B، و C، در راس های یک مثلث متساوی الاضلاع قرار دارند. در روستای A، ۱۰۰ دانش آموز؛ در روستای B، ۲۰۰ دانش آموز و در روستای C، ۳۰۰ دانش آموز زندگی می کنند. مدرسه را در کجا بسازیم که مجموع مسافت هایی که همه ی دانش آموزان می پیمایند، کمترین مقدار ممکن باشد؟
۴. نواری به ۳۰ خانه، در یک ردیف، تقسیم شده است. در دو خانه ی مرزی، دو مهره گذاشته شده است. دو نفر بازی می کنند و، هر کدام، در نوبت خود می تواند مهره ی خود را یک یا دو خانه، به هر سمتی جا به جا کند. از روی مهره ی رقیب، نمی توان پرید. کسی که، در نوبت خود نتواند حرکت کند، بازی را باخته است. کسی که بازی را آغاز کرده است، چگونه بازی کند که برنده شود؟
۵. روی کاغذ شطرنجی، مربعی شامل ۱۱×۱۱ خانه رسم کرده ایم. می خواهیم مرکز های برخی از خانه ها را طوری نشان گذاری کنیم که، مرکز های هر دو خانه ی دلخواه، روی پاره خط راستی باشد که دو نقطه ی نشان دار را، به صورت قائم یا به صورت افقی به هم وصل کرده است. حداقل، چند خانه را باید نشان گذاشت؟

۶. قطعه زمین مربع شکل را که حصاری به دور خود دارد، با حصار های دیگری، به چند مربع کوچکتر تقسیم کرده ایم. طول ضلع هر یک از مربع های کوچکتر با عدد درستی بیان می شود (بر حسب متر). ثابت کنید، مجموع طول های همه ی حصار ها، بر حسب متر، بر ۴ بخش پذیر است.
سال هفتم
۷. همان مساله ی ۱، برای ۱۵۱ نقطه.
۸. همان مساله ی ۲.
۹. جیرجیرک روی صفحه با جست به این طرف و آن طرف می رو: در جست اول ۱ سانتی متر، در جست دوم ۲ سانتی متر، در جست سوم ۳ سانتی متر و غیره، او بعد از هر جست، به اندازه ی ۹۰ درجه تغییر جهت می دهد. بعد از مدتی، تصمیم می گیرد، به جای نخست خود برگردد. آیا موفق می شود؟
۱۰. F یک پنج ضلعی کوژ است. محیط پنج ضلعی F، محیط پنج ضلعی ستاره ای که رأس هایش روی رأس های پنج ضلعی F هستند و محیط پنج ضلعی درونی، عدد هایی اول اند. ثابت کنید، مجموع این سه محیط، از ۲۰ کمتر نیست.
۱۱. همان مساله ی ۵.
۱۲. همان مساله ی ۶.
سال هشتم
۱۳. $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_{۲۵}$ عدد های درست و $y_۱$، $y_۲$، ...، $y_{۲۵}$، همان عدد ها، ولی به ردیف دیگری هستند. ثابت کنید

$$(x_۱ - y_۱)(x_۲ - y_۲)\cdots(x_{۲۵} - y_{۲۵})$$

عددی زوج است.
۱۴. A و B، عدد های سه رقمی اند. اگر B را یکبار در سمت راست A و بار دیگر در سمت چپ آن بنویسیم، دو عدد شش رقمی به دست می آید. ثابت کنید، اگر A و B با هم برابر نباشند، تفاضل این دو عدد شش رقمی، بر ۱۹۷۶ بخش پذیر نیست.
۱۵. در جاده ی کمربندی دایره ای شکل، یک دونده، دو دوچرخه سوار و یک موتورسیکلت سوار، هر کدام با سرعتی ثابت، حرکت می کنند: دونده و یکی از دوچرخه سوار ها در یک جهت و موتورسیکلت سوار و دوچرخه سوار دوم، در جهت دیگر. دونده، هر ۱۲ دقیقه یکبار، با دوچرخه سوار دوم برخورد می کند؛ دوچرخه سوار اول، هر ۲۰ دقیقه یکبار به دونده می رسد و موتورسوار هر ۵ دقیقه یکبار به دوچرخه سوار دوم می رسد. موتور سوار و دوچرخه سوار اول، هر چند دقیقه یکبار، یکدیگر را ملاقات می کنند؟
۱۶. نقطه ی A در درون و نقطه ی B در بیرون ۱۹۷۶ ضلعی منتظم قرار دارند. $\overrightarrow{X_A}$ را مجموع بردار هایی می گیریم که از نقطه ی A به رأس های ۱۹۷۶ ضلعی رسم شده اند و $\overrightarrow{X_B}$ را مجموع بردار های از نقطه ی B تا رأس های ۱۹۷۶ ضلعی. آیا ممکن است طول بردار $\overrightarrow{X_A}$ از طول بردار $\overrightarrow{X_B}$ بیشتر باشد؟
۱۷. زاویه ی C، در چهارضلعی ABCD، بزرگترین زاویه است. K، نقطه ی برخورد خط راست AD و خط راستی است که از C موازی AB رسم شود؛ M، نقطه ی برخورد خط راست AB و خط راستی که از Cموازی AD رسم شود؛ P نقطه ی برخورد خط های راست BK و MD است. ثابت کنید، مساحت های چهارضلعی های AMPK و BCDP با هم برابرند.
۱۸. از مجموعه ی عدد های طبیعی، سه زیرمجموعه ی دو به دو جدا از هم، انتخاب کرده ایم. ثابت کنید، می توان دو عدد x و y را از دو تا از این زیرمجموعه ها طوری انتخاب کرد که مجموع آن ها $x + y$، در زیرمجموعه ی سوم نباشد.
سال نهم
۱۹. در مثلث ABC می دانیم:

$$|AC| = \frac{۱}{۲}\left(|AB| + |BC|\right)$$

ثابت کنید، طول شعاع دایره ی محاطی مثلث، یک سوم طول یکی از ارتفاع های آن است.
۲۰. ثابت کنید، برای هر دو عدد طبیعی m و n، کوچکترین عدد از بین دو عدد $\sqrt[m]{n}$ و $\sqrt[n]{m}$، از $\sqrt[۳]{۳}$ کوچکتر است.
۲۱. همان مساله ی ۱۴.
۲۲. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $n \geq ۵$، یک n ضلعی کوژ وجود دارد، به نحوی که طول ضلع های آن متفاوت باشد و، در ضمن، مجموع فاصله ی هر نقطه ی درونی n ضلعی تا ضلع های آن (و یا امتداد ضلع ها)، به جای این نقطه بستگی نداشته باشد.
۲۳. حاکم، ۱۲ مشاور دارد و از آن ها گروه هایی به این ترتیب تشکیل داده است که، هر دو گروه، یک عضو مشترک داشته باشند، ولی ترکیب آن ها با هم فرق کند. حاکم توانست ۱۰۰۰ گروه تشکیل دهد. ثابت کنید، هنوز می تواند یک گروه دیگر، با توجه به شرط مساله، درست کند.

* ۲۴. مثلث ABC و دایره ی محیطی آن مفروض اند. K، نقطه ی برخورد نیمساز داخلی زاویه ی B و نیمساز خارجی زاویه ی C، L، نقطه ی برخورد نیمساز داخلی زاویه ی C و نیمساز خارجی زاویه ی B و نقطه ی M، وسط پاره خط راست KL است. ثابت کنید، M، نقطه ی وسط کمان CAB از دایره ی محیطی مثلث است.

سال دهم

۲۵. خط شکسته ی بسته ای که شامل چهار ضلع است و همه ی ضلع های آن، طول هایی برابر دارند، داده شده است. ثابت کنید، فاصله ی هر نقطه ی دلخواه فضا تا هر رأس خط شکسته، از مجموع فاصله های این نقطه تا سه رأس دیگر آن، کوچکتر است.

۲۶. تابع f را، که در مجموعه ی عدد های حقیقی معین است، طوری پیدا کنید که برای هر x و y داشته باشیم:

$$f^{۲}(x+y)=f^{۲}(x)+f^{۲}(y)$$

۲۷. اگر بدانیم این معادله دارای جواب است، همه ی جواب های حقیقی آن را پیدا کنید:

$$\sqrt{a+bx}+\sqrt{b+cx}+\sqrt{c+ax}=$$
$$\sqrt{b-ax}+\sqrt{c-bx}+\sqrt{a-cx}$$

۲۸. طول ضلع های مثلثی، برابر a، b و c است. ثابت کنید:

$$۲<\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}}{abc}<۳$$

۲۹. جدول ۵×۵ به وسیله ی صفر ها و واحد ها، پر شده است. می دانیم در گوشه ی چپ بالا و در گوشه ی راستِ پایین، واحد، و در دو گوشه ی دیگر، عدد صفر گذاشته شده است. ثابت کنید، می توان دو مربع مختلف ۲×۲ در جدول پیدا کرد (مکن است متقاطع باشند) که تعداد صفر ها و تعداد واحد ها، در آن ها یکی است.

دور نهایی

۳۱. در پنج ضلعی کوژ ABCDE، همه ی ضلع ها طولی برابر دارند. اگر بدانیم زاویه ی ACE برابر نصف زاویه ی BCD است، مقدار زاویه ی ACE را پیدا کنید.

۳۲. فضا را به پنج زیرمجموعه ی غیر تهی تقسیم کرده ایم. ثابت کنید، خط راستی وجود دارد که، دست کم، سه تا از آن ها را قطع می کند.

۳۳. دستگاه را در مجموعه ی عدد های حقیقی حل کند.

$$\begin{cases} x_{۱}+x_{۲}=x_{۳}^{۲} \\ x_{۲}+x_{۳}=x_{۴}^{۲} \\ x_{۳}+x_{۴}=x_{۵}^{۲} \\ x_{۴}+x_{۵}=x_{۱}^{۲} \\ x_{۵}+x_{۱}=x_{۲}^{۲} \end{cases}$$

۳۴. در یک بازی، به تعداد محدودی موقعیت وجود دارد؛ در ضمن، برای هر موقعیت، تعداد موقیت هایی که می توان از آن ها به سمت آن رفت، برابر است با تعداد موقعیت هایی که می توان از آن به سمت آن ها رفت. کسی می بازد که نتواند از موقعیت خود بیرون رود. ثابت کنید، تعداد موقعیت هایی که آغاز کننده ی بازی را، به شرط بازی درست نفر دوم، دچار باخت می کند، بیشتر از نصف تعداد همه ی موقعیت ها نیست.

۳۵. جدولی ۱۰۰×۱۰۰ داریم که همه ی خانه های آن با سه رنگ مختلف، رنگ شده اند. می توانیم هر مربع ۲×۲ را به رنگی در آوریم که، در آن، نسبت به دو رنگ دیگر برتری دارد؛ و اگر رنگ برتر در این مربع ۲×۲ وجود نداشته باشد، به رنگی در می آوریم که در آن وجود ندارد. ثابت کنید، به این ترتیب، می توان تمامی مربع بزرگ را به یک رنگ در آورد.

۳۶. صفحه را به مثلث های متساوی الاضلاع تقسیم کرده ایم. (شکل ۶). همه ی مثلث را با چهار رنگ چنان رنگ کرده ایم که یک شکل به هم پیوسته را تشکیل دهند. ثابت کنید، از این شکل می توان دست کم ۳۳ لوزی غیر متقاطع برید، به نحوی که هر لوزی شامل دو مثلث باشد.

۳۷. ثابت کنید، از بین عدد های ۱۹۷۶ رقمی که هر کدام از آن ها، شامل ۱۹۷۵ واحد و یک رقم برابر ۷ باشد، دست کم می توان ۶۵۸ عدد مرکب پیدا کرد.

۱۹۷۷

سال ششم

۱. آیا می توان یک مربع را به ۱۹۷۷ مثلث طوری تقسیم کرد که روی ضلع های مربع، به تعداد برابر از رأس های مثلث ها قرار گیرد و، در ضمن، راس هیچ مثلثی در درون ضلع مثلث دیگر نباشد.

۲. ۲۰ رخ را طوری روی خانه های صفحه ی شطرنج گذاشته ایم که هر رخ مورد تهدید دست کم یک رخ قرار دارد. ثابت کنید، می توان ۱۲ رخ را طوری برداشت که هشت رخ باقی مانده، همان ویژگی را داشته باشند.
۳. یک هشت ضلعی منتظم را به کمک دو خط راست، به چهار بخش با مساحت های برابر تقسیم کرده ایم. ثابت کنید، این دو خط راست بر هم عمودند.
۴. عدد ۱۱۱...۰۰۱ (شامل ۱۰۰ رقم) را به این صورت نوشته ایم:

$$a_0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + \cdots + a_{99} \times 10^{99}$$

که در آن a_0، a_1، ...، a_{99} عدد های غیر منفی و درست اند و مجموع آن ها از ۱۰۰ تجاوز نمی کند. ثابت کنید، همه ی این عدد ها برابر واحد اند.

۵. دنباله ای از عدد های درست را طوری نوشته ایم که جمله ی اول آن برابر ۲ و از آن به بعد، هر جمله برابر است با $\frac{3}{2}$ جمله ی قبل، به شرطی که عدد درستی به دست آید؛ در حالتی که $\frac{3}{2}$ جمله ی قبل همراه با کسری از عدد درست باشد، از این مقدار کسری صرف نظر می کنیم:

$$2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 42, 63, 94, \cdots$$

ثابت کنید، در این دنباله عدد شش رقمی وجود دارد.
۶. دو نفر به نوبت روی یکی از خانه های نوار افقی ۱۲ خانه ای یک رقم می نویسند تا ۱۲ خانه پر شود. از رقم های ۰ و ۹ نباید استفاده کنند. ثابت کنید، نفر دوم می تواند ترتیبی بدهد که عدد ۱۲ رقمی حاصل بر ۷۷ بخش پذیر باشد.
سال هفتم
۷. همان مساله ی ۱.
۸. عدد ۱۹۷۷۱۹۷۷۱۹۷۷ را به این صورت نوشته ایم:

$$a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + \cdots\cdots + a_{11} \times 10^{11}$$

که در آن، عدد های a_0، a_1، ...، a_{11} غیر منفی و درست اند و، در ضمن، مجموع آن ها، از ۷۲ تجاوز نمی کند، این عدد ها را پیدا کنید.
۹. نقطه های K، L، M و N را، به ترتیب، روی ضلع های AB، BC، CD و DA از مربع ABCD انتخاب کرده ایم. ثابت کنید:

$$|KL| + |LM| + |MN| + |NK| \geq 2|AC|$$

۱۰. همان مساله ی ۶.
۱۱. همان مساله ی ۵.
۱۲. نقطه ی O در درون چندضلعی کوژ P واقع است و می دانیم، هر خط راستی که از O بگذرد، چندضلعی P را به دو بخش هم ارز (با مساحت های برابر) تقسیم می کند. ثابت کنید، نقطه ی O، مرکز تقارن چندضلعی P است.
سال هشتم
۱۳. نقطه ی D روی ضلع BC از مثلث ABC قرار دارد. E، نقطه ی دلخواهی از ضلع AC و K، نقطه ای از ضلع AB است. خط های راست AD و BE در نقطه ی M، خط های راست BE و CK در نقطه ی P و خط های راست CK و AD در نقطه ی T برخورد دارند. ثابت کنید، اگر

$$|BM| = |PE| \text{ و } |AT| = \|MD\|$$

آن گاه $|CP| > |TK|$.

۱۴. a_1، a_2، ...، a_n، زیرمجموعه ای از عدد های طبیعی است. ثابت کنید، عدد های طبیعی x و y وجود دارد، به نحوی که یا هر دو عدد x و y عضو زیرمجموعه اند و یا هیچ یک از آن ها عضو زیرمجموعه نیستند.
۱۵. یک چندضلعی کوژ، چند ضلع می تواند داشته باشد تا مختصات هر رأس آن، عدد هایی درست باشند، ولی هر نقطه ای که در درون چندضلعی یا روی ضلع آن (به جز رأس ها) قرار دارد، دست کم یک مختص داشته باشد، که عددی درست نباشد؟
۱۶. در صفحه ی کاغذ شطرنجی 100×100، همه ی خط های شکسته‌ای که ضلع های خانه های صفحه ی شطرنجی، ضلع های آن را تشکیل می دهند و، در ضمن، دو رأس متقابل مربع را با کوتاه ترین مسیر به هم وصل می کنند، در نظر می گیریم. حداقل، چند مسیر از این گونه را باید در نظر گرفت تا، اجتماع آن ها، همه ی رأس های خانه ها را در بر گیرد؟
۱۷. پاره خط های راست a_1، a_2، ...، a_{1977}، b_1، b_2، ...، b_{1977} روی یک خط راست واقع اند. می دانیم، هر پاره خط راست a_k، با هر یک از پاره خط های راست b_{k-1} و b_{k+1}، نقطه ی مشترکی دارد. به جز این، a_{1977} و b_1، و، همچنین،

$a_{۱}$ و $b_{۱۹۷۷}$ هم دارای نقطه ی مشترک اند. ثابت کنید، به ازای هر k، پاره خط های راست a_k و b_k دارای نقطه ی مشترک اند.

۱۸. $\overrightarrow{a_{۱}}$، $\overrightarrow{a_{۲}}$، ...، $\overrightarrow{a_n}$، بردار هایی از صفحه اند و هیچ دو تایی از آن ها، هم راستا نیستند. می دانیم، برای هر i و j ($i \neq j$)، بین بردار های مفروض، بردار به صورت $x\overrightarrow{a_i} + y\overrightarrow{a_j}$ وجود دارد که، در آن، x و y عدد هایی منفی اند. ثابت کنید، n، عددی فرد است.

سال نهم

۱۹. همان مساله ی ۱۳.

۲۰. همان مساله ی ۱۶.

۲۱. همان مساله ی ۱۷.

۲۲. همان مساله ی ۱۸.

۲۳. تابع f در بازه ی $]۰,۱[$ با رابطه ی زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}, x \in \left[۰, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right[\\ x - \frac{\sqrt{۲}}{۲}, x \in \left[\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۱\right[\end{cases}$$

ثابت کنید، برای هر بازه ی $]a,b[\subset [۰,۱[$، نقطه ی x از این بازه، و عدد طبیعی n وجود دارد، به نحوی که، نقطه ی

$$f(f(f(\cdots f(x)\cdots) \ (\text{n بار})$$

روی بازه ی $]a,b[$ واقع است.

* ۲۴. چند نقطه داده شده است؛ بعضی از این نقطه ها به وسیله ی کمان هایی به هم وصل شده اند، به نحوی که می توان از هر نقطه به هر نقطه ی دیگر، به وسیله ی این کمان ها رسید. روی هر کمان، دو پیکان، یکی به رنگ آبی و دیگری به رنگ قرمز، در دو جهت مختلف رسم کرده ایم. ثابت کنید، از هر نقطه به هر نقطه ی دیگر، می توان از مسیری حرکت کرد که رنگ پیکان بیش از یکبار عوض نشود، در ضمن، حرکت را تنها در جهتی می توان انجام داد که پیکان مشخص می کند.

سال دهم

۲۵. ثابت کنید، به شرط $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$\sin x . \operatorname{tg} x > x^{۲}$$

* ۲۶. چندضلعی کوژ چند رأس می تواند داشته باشد تا مختصات همه ی رأس های آن، عدد هایی درست باشند، ولی دست کم یکی از دو مختص سایر نقطه های محیط و نقطه های درونی چندضلعی، عددی درست نباشد؟

۲۷. n، p و k عدد هایی طبیعی اند و $p > ۱$. ثابت کنید، دست کم یکی از عدد های

$$\binom{n}{k}, \binom{n+۱}{k}, \ldots, \binom{n+k}{k}$$

بر p بخش ناپذیر است.

۲۸. ثابت کنید، مجموع همه ی زاویه های دو وجهی یک چهاروجهی، از ۳۶۰ درجه بیشتر است.

۲۹. عدد های حقیقی $a_{۱}$، $a_{۲}$، ...، $a_{۱۹۷۷}$ چنان اند که

$$a_{۱} \geq a_{۲} \geq \cdots \geq a_{۱۹۷۷}$$

ثابت کنید:

$$a_{۱}^{۲} - a_{۲}^{۲} + \cdots + (-۱)^{۱۹۷۶} a_{۱۹۷۷}^{۲} \geq (a_{۱} - a_{۲} + \cdots + (-۱)^{۱۹۷۶} a_{۱۹۷۶})^{۲}$$

۳۰. همان مساله ی ۲۳.

۱۹۷۸

سال ششم

۱. عدد های ۱، ۲ و ۳ را در رأس های یک مثلث متساوی الاضلاع گذاشته ایم. آیا می توان از این گونه مثلث ها، طوری روی هم و به صورت ستونی چید که مجموع عدد ها در هر یال ستون برابر ۵۵ باشد؟

۲. یک چندضلعی را به یاری قطر های آن به مثلث هایی تقسیم و، سپس، مثلث ها را به رنگ های سیاه و سفید طوری در آورده ایم که هر دو مثلثی که ضلع مشترکی دارند، به دو رنگ مختلف باشند. ثابت کنید، تعداد مثلث های سیاه، از سه برابر تعداد مثلث های سفید تجاوز نمی کند.
۳. آیا ۵۷۵۹۹، عددی اول است؟
۴. حداقل چند مهره ی شاه شطرنج باید انتخاب کرد تا پس از این که به دلخواه روی صفحه ی ۸×۸ قرار دهیم، به ناچار دو شاه پیدا شود که یک خانه را بزنند؟
۵. آیا می توان عدد های طبیعی از ۱ تا ۱۹۷۸ را طوری در کنار هم، روی یک سطر قرار داد که، هر دو عدد مجاور و، همچنین، هر دو عددی که یک عدد بین خود دارند، نسبت به هم اول باشند.
۶. زاویه ی B، راس مثلث متساوی الساقین، برابر ۲۰ درجه است. ثابت کنید:

$$۳|AC|>|AB| \text{ و } ۲|AC|<|AB|$$

سال هفتم
۷. پنج عدد درست، در مجموع دو به دو، ۱۰ عدد می دهند. آیا ممکن است، این ها، ۱۰ عدد پشت سر هم باشند؟
۸. a، عددی طبیعی است. آن را بر همه ی عدد های طبیعی کوچکتر از خودش تقسیم و، سپس، همه ی باقی مانده ها را با هم جمع کرده ایم. نتیجه ی جمع، خود عدد A شده است. عدد a را پیدا کنید.
۹. همان مساله ی ۴.
۱۰. نقطه ی دلخواهی در درون مربع انتخاب و آن را به همه ی رأس های مربع وصل کرده ایم. سپس، از هر رأس مربع، عمودی بر پاره خط راستی رسم کرده ایم که از رأس مجاور آن، در جهت حرکت عقربه های ساعت، گذشته است. ثابت کنید، این چهار خط راست عمود، از یک نقطه می گذرند.
۱۱. روی محیط دایره و در رأس های یک صدضلعی منتظم، ۱۰۰ عدد سه رقمی گذاشته ایم. ثابت کنید، قطری از دایره وجود دارد که اگر مجموع عدد های واقع در هر طرف آن را به دست آوریم، تفاضل آن ها از لحاظ قدرمطلق، از ۹۰۰ تجاوز نمی کند.
۱۲. n ضلعی کوژی داده شده است ($n \geq ۵$). ثابت کنید، می توان سه ضلع n ضلعی را طوری انتخاب کرد که، با ادامه ی آن ها، مثلثی به دست آید که تمامی n ضلعی را در بر بگیرد.
سال هشتم
۱۳. قطر های چهارضلعی، آن را به چهار مثلث با محیط های برابر تقسیم کرده است. ثابت کنید، این چهارضلعی، یک لوزی است.
۱۴. عددی پنج رقمی بر ۴۱ بخش پذیر است. ثابت کنید، هر عدد پنج رقمی دیگری هم که از تبدیل دوری رقم های این عدد به دست آید، بر ۴۱ بخش پذیر است.
۱۵. میدان بزرگ مسابقه های دو، به شکل یک شش ضلعی است که هر یک از زاویه های آن برابر ۱۲۰ درجه است و طول هر ضلع آن، بر حسب کیلومتر، با عددی درست بیان می شود. هر مرحله از مسابقه، در طول یکی از ضلع ها انجام می شود؛ در ضمن، مر حله های اول، سوم و پنجم به خانم ها و مرحله های دوم، چهارم و ششم به آقایان مربوط است. بعد از پایان مسابقه ها، خانم ها ادعا کردند که، مجموع طول های قطعه های مربوط به آن ها، ۳ کیلومتر از مجموع طول های قطعه های مربوط به مردان بیشتر بوده است؛ ولی مردان ادعا داشتند که مجموع طول قطعه راه های مربوط به آن ها، از مجموع طول قطعه راه های مربوط به زنان، ۵ کیلومتر بیشتر بوده است. کدام یک از دو طرف به روشنی دروغ می گویند؟
۱۶. آیا می توان عدد های درست را در خانه های یک صفحه ی شطرنجی بی پایان طوری قرار داد که مجموع عدد ها، در هر مستطیل ۱۹۷۸×۱۹۱۸، برابر ۶۰ باشد؟
۱۷. شش دایره روی صفحه رسم شده است؛ در ضمن، دایره ی اول بر دایره ی ششم و دوم مماس است، دایره ی دوم بر دایره ی اول و سوم، دایره ی سوم بر دایره ی دوم و چهارم مماس است و غیره. ثابت کنید، دایره ی تازه ای وجود دارد که هر شش دایره ی مفروض را قطع می کند.
سال نهم
۱۸. همان مساله ی ۱۴.
۱۹. چندجمله ای با ضریب بزرگترین درجه ی مثبت، تنها به ازای مقدار های طبیعی و اول متغیر، برابر عدد های اول می شود. ثابت کنید، این چندجمله ای به ازای همه ی عدد های اول، برابر عدد هایی اول است.
۲۰. برای عدد های مثبت $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $b_۱$، $b_۲$، $b_۳$ می دانیم:

$$\sum_{i \leq j} a_i a_j \leq ۱, \sum_{i \leq j} b_i b_j \leq ۱$$

ثابت کنید:

$$\sum_{i \leq j} (a_i - b_i)(a_j - b_j) \leq ۱$$

۲۱. همان مساله ی ۱۶.
۲۲. مساله ی ۱۷ را ببینید. آیا همین حکم، برای هشت دایره درست است؟
سال دهم
۲۳. همان مساله ی ۱۹.
۲۴. از برخورد شش خط راست، حداکثر چند مثلث متساوی الاضلاع ممکن است به وجود آید؟
۲۵. همان مساله ی ۱۴.
۲۶. همان مساله ی ۲۰.
۲۷. یک شش ضلعی کوژ داده شده است و می دانیم، هر قطر بزرگ آن، شش ضلعی را به دو بخش با مساحت های برابر تقسیم می کند. ثابت کنید، این قطرها، در یک نقطه یکدیگر را قطع می کنند.
دور نهایی
۲۸. خانه های یک جدول ۱۰۰×۱۰۰ را با چند رنگ مختلف، رنگ کرده ایم؛ در ضمن، دو خانه ی هم رنگ، رأس مشترکی ندارند. ثابت کنید، خانه های چهار گوشه ی جدول، رنگ های مختلفی دارند.
۲۹. A و B دو مجموعه ی با پایان (محدود) در صفحه اند. فرض می کنیم:

$$d_H(A,B) = \max(d_1, d_2)$$

که در آن، d_1 برابر است با بزرگترین فاصله ی از نقطه های مجموعه ی A تا مجموعه ی B، و d_2، بزرگترین فاصله ی از نقطه های مجموعه ی B تا مجموعه ی A است. برای d_H، نابرابری مثلثی را ثابت کنید، یعنی ثابت کنید، برای هر سه مجموعه ی با پایان X، Y و Z در روی صفحه، این نابرابری برقرار است:

$$d_H(X, Y) + d_H(Y, Z) \geq d_H(Y, Z)$$

۳۰. در رأس های یک ۱۰۰ ضلعی منتظم، عدد های درستی گذاشته ایم. جهت را، حرکت عقربه های ساعت می گیریم. هر دقیقه، هر یک از عدد ها، تغییر می کند و به تفاضل این عدد با عدد بعد از خودش تبدیل می شود. ثابت کنید، بعد از پنج دقیقه، مجموع عدد های رأس های ۱۰۰ ضلعی، بر ۵ بخش پذیر است.
۳۱. روی خط راستی، ۱۹۷۸ پاره خط راست داده شده است که، هیچ دو پاره خط راستی، در یکی از دو انتهای خود مشترک نیستند. ثابت کنید، این پاره خط های راست را نمی توان طوری شماره گذاری کرد که، برای هر k از ۱ تا ۱۹۷۸، k امین پاره خط راست، درست شامل k انتها از دیگر پاره خط های راست باشد.
* ۳۲. دنباله ی (a_n)، که همه ی جمله های آن برابر ۰ یا ۱ می باشد، چنان است که، اگر $k < 2^n$، آن وقت a_k برابر a_{k+2^n}. ثابت کنید، این دنباله، متناوب نیست.
۳۳. M، چندضلعی کوژ و H، تجانس با ضریب $-\frac{1}{2}$ است. ثابت کنید، انتقال موازی T وجود دارد که چندضلعی $T(H(M))$ در درون چندضلعی M قرار می گیرد.
* ۳۴. راس های یک گراف محدود، با دو رنگ مختلف، رنگ شده اند. در هر ثانیه، هر نقطه تغییر رنگ می دهد و به رنگی در می آید که در همسایگی آن بیشتر است. ثابت کنید، برای هر نقطه لحظه ای فرا می رسد که، بعد از آن، یا تغییر رنگ نمی دهد و یا در هر ثانیه، تغییر رنگ می دهد.
* ۳۵. چندضلعی کوژ M، که طول همه ی ضلع ها و قطر های آن با عدد های درست بیان شده است، مفروض است. مربع K هم داده شده است. ثابت کنید، می توان تعداد محدودی چندضلعیِ هم نهشت M انتخاب کرد، به نحوی که اجتماع آن ها، K را در بر بگیرد و، در ضمن، هر نقطه از مربع، که روی ضلع یکی از چندضلعی ها نیست، به وسیله ی تعدادی از چندضلعی ها (که برای همه ی این گونه نقطه ها تعداد ثابتی است) پوشانده شده باشد.

۱۹۷۹

سال پنجم
۱. روی صفحه ی کاغذ شطرنجی، مستطیل ۷×۱۳ را رسم کرده ایم. از آن، ۱۵ مستطیل ۲×۳ جدا کنید.
۲. امسال (یعنی سال ۱۹۷۹)، سن شخصی برابر است با مجموع رقم های سال تولد او، این شخص کی به دنیا آمده است؟
۳. در مستطیل ۷×۶، ۲۵ خانه را رنگ کرده ایم. ثابت کنید، می توان، در آن، یک مربع ۲×۲ پیدا کرد که، دست کم سه خانه ی آن رنگی باشد.
۴. در کیسه ای ۱۰ کارت که روی آن ها عدد های ۰، ۱، ۲، ۳، ...، ۹ (و روی هر کارت یک عدد) نوشته شده است، در اختیار داریم:
الف) سه کارت، به تصادف، بیرون می آوریم. ثابت کنید، با این سه کارت، می توان عددی (یک رقمی، دو رقمی یا سه رقمی) درست کرد که بر ۳ بخش پذیر باشد.
ب) چند کارت باید از کیسه بیرون آورد، تا، به کمک آنها، بتوان عددی بخش پذیر بر ۹ درست کرد؟
۵. در کلاسی، هر پسر با سه دختر و هر دختر با دو پسر دوست است. در کلاس ۱۹ نیمکت و ۳۱ پیش آهنگ وجود دارد. این کلاس، چند دانش آموز دارد؟

سال ششم

۶. a، b، و c عدد هایی اول اند؛ در ضمن $a+b$ و ab بر c بخش پذیر اند. ثابت کنید $a^{۳}-b^{۳}$ بر c بخش پذیر است.

۷. یکی از زاویه های مثلث قائم الزاویه ای برابر ۳۰ درجه است. از نقطه ی وسط وتر، عمودی بر وتر اخراج کرده ایم. ثابت کنید، طول پاره خط راستی از این عمود که در درون مثلث قرار دارد، یک سوم طول ضلع بزرگتر مجاور به زاویه ی قائمه است.

۸. چگونه می توان با دو ساعت شنی که، به ترتیب، می توانند ۵ دقیقه و ۷ دقیقه را اندازه بگیرند، ۹ دقیقه را اندازه گرفت؟

۹. در خانه های یک جدول مستطیلی، عدد های طبیعی را نوشته ایم. اجازه داریم همه ی عدد های یک سطر را دو برابر یا از همه ی عدد های یک ستون، یک واحد کم کنیم. ثابت کنید، می توان به آنجا رسید که همه ی عددهای جدول، برابر صفر باشند.

۱۰. حداکثر چند عدد طبیعی کوچکتر از ۵۰ می توان انتخاب کرد که، هر دو تا از آن ها، نسبت به هم اول باشند؟

۱۱. عددی شامل سه رقم برابر واحد و چند رقم برابر صفر است. مجموع رقم های مکعب این عدد را پیدا کنید.

سال هفتم

۱۲. این دستگاه معادله ها را حل کنید:

$$\begin{cases} ۱+a+b=ab \\ ۲+a+c=ac \\ ۵+b+c=bc \end{cases}$$

۱۳. $AA_۱$، $BB_۱$ و $CC_۱$ ارتفاع ها و $AA_۰$، $BB_۰$ و $CC_۰$ میانه های مثلث ABC هستند. ثابت کنید، طول محیط مثلث ABC، برابر است با طول خط شکسته ی $A_۰B_۱C_۰A_۱B_۰C_۱A_۰$.

۱۴. مستطیل ۱۰۰۰×۱۹۷۹، به خانه هایی تقسیم شده است. اگر قطر آن را رسم کنیم، تمام مستطیل، به چند قسمت تقسیم می شود؟

۱۵. می دانیم $a^{۶}$ عددی است هشت رقمی که از رقم های ۰، ۱، ۲، ۲، ۲، ۳، ۴، ۴ تشکیل شده است. a را پیدا کنید.

۱۶. مثلث ABC در دایره ای محاط است. $A_۱$ وسط کمان BC، $B_۱$ وسط کمان AC و $C_۱$ وسط کمان AB است. ضلع های مثلث ABC، روی پاره خط های راست $A_۱B_۱$، $B_۱C_۱$ و $A_۱C_۱$، پاره خط های راست کوچکتری را جدا می کنند که وسط آن ها را، به ترتیب، $M_۱$، $M_۲$ و $M_۳$ می نامیم. ثابت کنید، نقطه های $B_۱$ و $C_۱$ و نقطه های $M_۱$ و $M_۳$ روی محیط یک دایره اند.

۱۷. ثابت کنید، بی نهایت عدد طبیعی وجود دارد که نمی توان آن ها را به صورت مجموع یک مجذور کامل و یک عدد اول نوشت.

سال هشتم

۱۸. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $k>۱$، عددی با $k+۱$ رقم واحد و k رقم برابر صفر به صورت ۱۰۱۰۱۰...۱۰۱، یک عدد مرکب است.

۱۹. a، b، و c، طول ضلع های یک مثلث اند. ثابت کنید:

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{a}{c}-\frac{c}{b}-\frac{b}{a}\right|<۱$$

۲۰. زاویه ی B از مثلث ABC برابر ۶۰ درجه و AK و CE نیمساز های مثلث اند. پاره خط های راست AK و CE یکدیگر را در O قطع کرده اند. ثابت کنید: $|OK|=|OE|$.

۲۱. $۲n$ برداری را در نظر می گیریم که مبداء آن ها، مرکز یک $۲n$ ضلعی منتظم و انتهای آن ها، رأس های این $۲n$ ضلعی است. چند بردار، از این $۲n$ بردار، باید انتخاب کرد که، مجموع آن ها، دارای حداکثر طول ممکن باشد؟

۲۲. n عدد طبیعی دو به دو نسبت به هم اول $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n داده شده است؛ در ضمن $۱<a_i<(۲n-۱)^۲$. ثابت کنید، بین آن ها، دست کم یک عدد اول وجود دارد.

۲۳. در هر یک از خانه های جدول $n\times m$، عدد ۱ گذاشته شده است. می توانیم هر مربع ۲×۲ را در نظر بگیریم و علامت همه ی عدد های آن را عوض کنیم. آیا می توانیم به کمک این عمل ها، به جدولی برسیم که علامت های عدد های آن، به صورت جدول صفحه ی شطرنج باشند (علامت های مثبت، در خانه های سیاه و علامت های منفی در خانه های سفید یا برعکس)؟ پاسخ باید بستگی به مقدار های m و n داشته باشد.

سال نهم

۲۴. ثابت کنید، اگر عدد k رقمی ($k\geq ۲$) اول باشد، آن وقت، یا همه ی عدد هایی که از تبدیل دوری عدد به دست می آیند، مختلف اند و یا عدد k رقمی تنها با رقم های واحد نوشته شده است.

۲۵. مثلث هایی را در نظر می گیریم که دو به دو نا برابر و رأس های آن ها در نقطه هایی از محیط دایره باشند که آن را به n کمان برابر تقسیم کرده اند ($n > ۲$). به ازای چه مقداری از n، درست نیمی از این مثلث ها، متساوی الساقین اند؟
۲۶. عدد های طبیعی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n ($n \ge ۱۲$)، همگی از ۱ بزرگتر و از $۹n^۲$ کوچکتر و، در ضمن، دو به دو نسبت به هم اول اند. ثابت کنید، در بین آن ها، عدد اول وجود دارد.
۲۷. در مرکز کف جعبه ای که به شکل مربع ۵×۵ است، یک سوراخ مربعی ۱×۱ وجود دارد. کدام شکل کوژ را می توان انتخاب کرد که کمترین مساحت را داشته باشد و به هر طریقی که آن را در کف جعبه قرار دهیم، سوراخ را بپوشاند؟
۲۸. نقطه ی B بین دو نقطه ی A و C است. در نیم صفحه های به مرز (AC)، نقطه های K و H را طوری در نظر گرفته ایم که

$$|AK| = |KB|, |BH| = |HC|, \widehat{AKB} = \alpha, \widehat{BHC} = \pi - \alpha$$

زاویه های مثلث KHM را پیدا کنید، به شرطی که M وسط پاره خط راست AC باشد.
۲۹. این دستگاه معادله ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x + \dfrac{x + ۲y}{x^۲ + y^۲} = ۲ \\ y + \dfrac{۲x - y}{x^۲ + y^۲} = ۰ \end{cases}$$

سال دهم
۳۰. همان مساله ی ۲۴.
۳۱. همان مساله ی ۲۷.
۳۲. به ازای کدام عدد طبیعی y، عدد $y^۲ + ۳^y$، مجذور کامل است؟

۳۳. در دایره ای، n قطاع را طوری رنگ کرده ایم که، زاویه ی هر قطاع از $\dfrac{n}{n^۲ - n + ۱}$ کمتر باشد. ثابت کنید، دایره را می توان به نحوی چرخاند که، همه ی قطاع های رنگی، به بخش رنگ نشده ی دایره منتقل شوند.
۳۴. یک چندوجهی کوژ داده شده است که، همه ی وجه های آن، به جز یکی، چندضلعی هایی را تشکیل می دهند که تقارن مرکزی دارند. ثابت کنید، این وجه اخیر هم، دارای تقارن مرکزی است.
* ۳۵. دو قطر AB و CD در دایره ای رسم شده اند. ثابت کنید، برای هر دو نقطه ی دلخواه E و F واقع بر محیط دایره، نقطه ی برخورد خط های راست AE و DF، مرکز دایره و نقطه ی برخورد خط های راست CE و BF، در یک امتداد اند.
۳۶. در مثلث ABC، طول ضلع های مثلث، سه عدد درست متوالی اند؛ در ضمن یکی از نیمساز های مثلث، بر یکی از میانه های آن عمود است. طول ضلع های مثلث را پیدا کنید. (مساله ی ۲.۷۰ را هم ببینید).

۱۹۸۰

سال پنجم
۱. آیا می توان عدد های طبیعی از ۱ تا ۳۰ را در یک جدول ۶×۵ طوری نوشت که، مجموع عدد های واقع در ستون ها، با هم برابر باشند.
۲. در اردوی پیشاهنگی نوجوانانی به سن ۱۰، ۱۱، ۱۲، و ۱۳ سال جمع شده اند. آن ها ۲۳ نفر اند و روی هم ۲۵۳ سال دارند. در این اردو، چند نوجوان ۱۲ ساله وجود دارد، به شرطی که بدانیم تعداد آن ها یک برابر و نیم تعداد ۱۳ ساله ها است؟
۳. ۲۰۰ نقطه روی پاره خط راست AB، به صورتی متقارن نسبت به نقطه ی وسط پاره خط قرار دارند. ۱۰۰۰ تا از این نقطه ها را به رنگ قرمز و بقیه را به رنگ آبی درآورده ایم. ثابت کنید، مجموع فاصله های از نقطه های قرمز تا نقطه ی A، برابر است با مجموع فاصله های از نقطه های آبی تا نقطه ی B.
۴. بین ۹ سکه، دو سکه ی تقلبی وجود دارد. با چهار بار استفاده از ترازوی دو کفه ای، و بدون استفاده از وزنه، سکه های تقلبی را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم، دو سکه تقلبی هم وزن اند و وزن هر کدام، اندکی بیشتر از وزن یک سکه ی واقعی است.
۵. مربع را به پنج ضلعی های کوژ تقسیم کنید.
۶. در رأس ها و محل برخورد قطر های یک چندضلعی، ایستگاه های تراموا به هم نمی رسند. روی برخی از قطر های چندضلعی، خط حرکت تراموا وجود دارد، به نحوی که از کنار هر ایستگاه، دست کم یک خط می گذرد. ثابت کنید، از هر ایستگاه به هر ایستگاه دیگر می توان با حداکثر دو بار عوض کردن تراموا رسید.
سال ششم
۷. همان مساله ی ۱.

۸. همان مساله ی ۳.
۹. آیا می توان عدد های طبیعی از ۱ تا ۱۹۸۰ را طوری در یک ردیف نوشت که، مجموع هر دو عددی که یک عدد دیگر در بین آن ها است، بر ۳ بخش پذیر باشد؟
۱۰. همان مساله ی ۴.
۱۱. تعداد $۲n$ شکلات، به صورتی در n قوطی گذاشته شده است. دختربچه و پسربچه ای به نوبت، و هر بار یک شکلات، بر می دارند. نخستین شکلات را دختربچه انتخاب می کند. ثابت کنید، پسربچه می تواند طوری شکلات انتخاب کند که دو شکلات آخر، متعلق به یک قوطی باشند.
۱۲. صفحه ی کاغذ شطرنجی را طوری با پنج رنگ، رنگ کنید که هر شکل نوع اول (شکل $۷-a$) هر پنج رنگ را داشته باشد، ولی در هر شکل نوع دوم (شکل $۷-b$)، هر پنج رنگ وجود نداشته باشد.
سال هفتم
۱۳. همه ی گروه عدد های درست a، b و c را پیدا کنید که، برای آن ها، داشته باشیم:
$$a^۲-b^۲-c^۲=۱, b+c-a=۳$$
۱۴. همان مساله ی ۹.
۱۵. یک n ضلعی بر دایره ای محیط شده است. از نقطه ی دلخواهی واقع در درون دایره، به همه ی رأس ها و نقطه های تماس وصل کرده ایم. مثلث های حاصل را، پشت سر هم، از ۱ تا $۲n$ شماره گذاری کرده ایم. ثابت کنید، حاصل ضرب مساحت های مثلث های ردیف زوج، برابر است با حاصل ضرب مساحت های مثلث های ردیف فرد.
۱۶. مربع ABCD با بعد های ۹×۹ را به مربع های ۱×۱ تقسیم کرده ایم. راس های این مربع ها را به چهار رنگ در آورده ایم: هر ۲۵ رأس را به یک رنگ. همه ی بردار های به صورت $\overrightarrow{MA}$ را، که M نقطه ای با رنگ اول است؛ همه ی بردار های به صورت $\overrightarrow{MB}$ را که M نقطه ای از رنگ دوم است؛ همه ی بردار های به صورت $\overrightarrow{MC}$ را که M نقطه ای از رنگ سوم است و، سرانجام، همه ی بردار های به صورت $\overrightarrow{MD}$ را که M نقطه ای از رنگ چهارم است، در نظر می گیریم. ثابت کنید، مجموع همه ی این بردار ها، برابر بردار صفر است.
۱۷. ثابت کنید، عدد زیر، عددی مرکب است:
$$۵۳\times ۸۳\times ۱۰۹+۴۰\times ۶۶\times ۹۶$$
۱۸. همان مساله ی ۱۱.
۱۹. همان مساله ی ۱۲.
۲۰. مجموع چهار عدد مثبت a، b، c، و d برابر واحد است. ثابت کنید:
$$\sqrt{۴a+۱}+\sqrt{۴b+۱}+\sqrt{۴c+۱}+\sqrt{۴d+۱}<۶$$
۲۱. نقطه ی O، مرکز دایره ی محاطی مثلث ABC است. نقطه های M و K را، به ترتیب، روی ضلع های AC و BC، طوری انتخاب کرده ایم که داشته باشیم:
$$|BK|.|AB|=|BC|^۲, |AM|.|AB|=|AO|^۲$$
ثابت کنید، نقطه های M، O و K، روی یک خط راست اند.
۲۲. سه نفر به بازی تنیس روی میز مشغول اند. در هر دور بازی، کسی که بازی را ببازد، کنار می رود و کسی که در بازی شرکت نداشته است، جای او را می گیرد. در پایان بازی ها، معلوم شد، نفر اول ۱۰ دور و نفر دوم ۲۱ دور بازی کرده است. نفر سوم چند دور بازی کرده است؟
۲۳. آیا می توان عدد های از ۱ تا ۶۴ را در خانه های صفحه ی شطرنج طوری قرار داد که، مجموع عدد ها در هر چهار خانه ای که به صورت شکل ۸ است، بر ۵ بخش پذیر باشد؟
۲۴. چهار ضلعی کوژ، به وسیله ی قطر های خود، به چهار مثلث تقسیم شده است. مجموع مجذور های مساحت های دو مثلث رو به رو، برابر است با مجموع مجذور های مساحت های دو مثلث رو به رو ی دیگر. ثابت کنید، دست کم یکی از قطر ها، در نقطه ی برخورد خود با قطر دیگر، نصف می شود.
۲۵. کمترین مقدار عدد طبیعی n چقدر است، به شرطی که در نماد دهدهی کسر $\frac{m}{n}$، بعد از ممیز، با گروه رقم های ۵۰۱۰۰۰... برخورد کنیم؟
۲۶. دو سکه از ۹ سکه، تقلبی است. سکه ی واقعی ۱۰ گرم و سکه ی تقلبی ۱۱ گرم وزن دارد. چگونه می توان به کمک ترازوی یک کفه ای با پنج بار وزن کردن، سکه های تقلبی را کشف کرد؟
سال نهم
۲۷. در مثلث ABC، زاویه ی A دو برابر زاویه ی B است. ثابت کنید:
$$|BC|^۲=(|AC|+|AB|).|AC|$$

۲۸. سه نفر به بازی تنیس روی میز مشغول اند. بعد از هر دور بازی، آن که باخته، جای خود را به کسی واگذار می کند که در بازی شرکت نداشته است. در پایان بازی معلوم شد، اولی ۱۰ دور، دومی ۱۵ و سومی ۱۷ دور بازی کرده است. در دور دوم بازی، چه کسی باخته است؟
۲۹. دو عدد طبیعی مختلف پیدا کنید که، میانگین عددی و میانگین هندسی آن ها، عدد هایی دو رقمی اند و یکی از دیگری با جا به جا شدن رقم ها به دست می آید.
۳۰. ثابت کنید، اگر، برای هر مقدار x واقع در بازه ی $[۰,۱]$ داشته باشیم:

$$|ax^۲ + bx + c| \le ۱$$

آن وقت $|a|+|b|+|c| \le ۱$

۳۱. پاره خط راستی را که وسط دو ضلع رو به رو در چهارضلعی کوژ را را به هم وصل کند، خط میانه ی چهارضلعی می نامیم. ثابت کنید، اگر مجموع طول های دو خط میانه ی چهارضلعی، برابر نصف محیط چهارضلعی باشد، آن وقت این چهارضلعی یک متوازی الاضلاع است.
۳۲. همان مساله ی ۲۵.
۳۳. در خانه های صفحه ی شطرنج، عدد های حقیقی نوشته ایم. می توانیم به جای هر دو عدد دلخواه، در هر دو خانه، میانگین حسابی آن ها را بنویسیم. ثابت کنید، با تکرار این عمل، می توان به جایی رسید که همه ی عدد های واقع بر صفحه ی شطرنج، با هم برابر باشند.
سال دهم
۳۴. در بازی تنیس روی میز، سه نفر شرکت دارند. بعد از هر دور، آن که ببازد، جای خود را به کسی می دهد که در بازی شرکت نداشته است. در پایان بازی ها، معلوم شد، اولی ۱۰ دور بازی را برده است، دومی ۱۲ دور و سومی ۱۴ دور، هر کدام از این سه نفر، چند دور بازی کرده است؟
۳۵. در دنباله ی زیر، با چند عدد مختلف برخورد می کنیم:

$$\left[\frac{۱^۲}{۱۹۸۰}\right],\left[\frac{۲^۲}{۱۹۸۰}\right],\ldots,\left[\frac{۱۹۸۰^۲}{۱۹۸۰}\right]$$

۳۶. $f(x)=ax+b$ مفروض است. آیا عدد های a و b وجود دارند، به نحوی که به ازای هر x از بازه ی $[۰,۲\pi]$ داشته باشیم:

$$f^۲(x)+f(x)\cos x < \frac{۱}{۴}\sin x$$

۳۷. همان مساله ی ۳۱.
۳۸. در جدول مربعی $n \times n$، عدد های حقیقی را نوشته ایم. می توانیم به جای هر دو عدد دلخواه، میانگین حسابی آن ها را در هر دو خانه بنویسیم. همه ی عدد های طبیعی n را پیدا کنید که، برای هر گونه عدد های نخستین، بتوان با تکرار عمل بالا، به جدولی رسید که همه ی عدد های واقع در خانه های آن، با هم برابر باشند.