

بسمه تعالی

# یادداشت‌هایی در زمینه‌ی منطق

ناصر باقری محمودآبادی

دانشجوی کارشناسی علوم کامپیوتر

نوع مقاله: مقاله علمی - ترویجی

دانشگاه یزد-۱۳۹۲

# چکیده

هرچه نادانسته بود، به دانسته دانسته شود. ولیکن نه هر دانسته‌یی راه برد به هر نادانسته؛ که هر نادانسته‌یی را دانسته‌یی هست اندر خور وی، که از وی شاید او را دانستن، و راهی است که بدان راه شاید شدن از دانسته به نادانسته تا دانسته شود. و علم منطق آن است که اندر وی پدید شود حال دانسته شدن نادانسته به دانسته.<sup>۱</sup>

یادداشت‌های زبانی و تاریخی این مقاله‌ی علمی-ترویجی از [ ۱ ] برگرفته شده است و در کنار آن نکات تکمیلی اضافه شده است، که سعی شده مفهوم این یادداشت‌ها را واضح‌تر مورد بررسی قرار دهد. نگرش کلی بر پیشینه‌ی تاریخی منطق ریاضی و فراهم نمودن زمینه برای مباحث گسترده‌تر بعدی، نیز یکی دیگر از اهداف این مقاله بوده است.

## مقدمه

منطق چیست. آیا واقعاً یک منطق وجود دارد و یا منطقهای مختلفی وجود دارند؟ آیا هر کدام از اینها روش خاص ریاضی را برای بحث می‌طلبد؟ فارغ از اینکه ما چه تعریفی برای منطق قائل باشیم شکی نیست که نقطه آغازین منطق ریاضی ابداع زبان مناسب است و این پیش فرض علمی منطق ریاضی است که منطق یا به عبارتی دیگر نظم های تفکر در قالب زبان متجلی می‌شوند. بنابراین زبان، بحث فلسفی عمیقی را می‌طلبد. چیزی که در قالب زبان نیاید در قلمرو کار منطق و ریاضی قرار نمی‌گیرد. این زبان، زبان طبیعی نیست گرچه با بررسی و تجزیه و تحلیل زبان طبیعی ساخته می‌شوند.

این زبان را اصطلاحاً «زبان صوری» می‌گوییم. در این زبان نمادهایی را به طور صوری ابداع می‌کنیم که این ابداع نمادها آن را از زبان طبیعی جدا می‌کند. اما در عین حال این نمادها بدون مبنا انتخاب و ابداع نمی‌شوند با تجزیه و تحلیل زبان سعی داریم مدل ریاضی بسازیم. به عبارتی دیگر این بخشی از کار منطق ریاضی است که ما برای نحوی از زبان ابتدا مدل ریاضی می‌سازیم. اما مفاهیم دیگری مثل مفهوم صدق یا حقیقت یا تعریف پذیری در قلمرو معنا شناسی و دلالت شناسی قرار می‌گیرند. قسمت دوم کار، مدل سازی برای معنا شناسی یا دلالت شناسی زبان است. اما در منطق ریاضی بین نحو کلام یا زبان و یا معناشناسی زبان برای جلوگیری از هر نوع خلط احتمالی جدایی است. نحو در زبان صوری چیزی شبیه گرامر و دستور زبان است. یکی از مسائل اساسی که در این مرحله در منطق ریاضی به آن توجه شده این است که بین زبانی که به عنوان شیء ساختم و زبانی که در آن درباره این شیء که در زبان هست می‌خواهیم صحبت کنیم، تمایز اساسی وجود دارد. بنابراین هوشمندی در زبان جلوگیری از پارادوکسهایی است که در طول تاریخ وجود داشته و غالباً ناشی از خلط زبان و مفاهیم فرا زبانی بود مثل عبارت پارادوکس دروغگو از مفاهیمی که به نوعی مشترک در زبان شناسی، فلسفه و منطق است و شاید یکی از مفاهیم بسیار اساسی باشد مفهوم «معناداری» است. اما متأسفانه باید گفت هیچ کدام از این سه شاخه تا کنون قادر به ارائه یک مدل از آن نشده‌اند. در این زمینه تحقیقات همچنان ادامه دارد. از مفاهیم اساسی که در نحو زبان وجود دارد مفهوم «برهان» است که در مقابل مفهوم «صدق» قرار دارد. یکی دیگر از علایق اساسی منطق ریاضی رابطه این دو است. اینکه ما در نحو زبان مفاهیمی داریم و آنها را ابداع کردیم و همین طور در دلالت شناسی زبان مفاهیمی را مدل سازی ریاضی کردیم و طبیعتاً روابط به این دو مقوله از علائق اساسی منطق است. اینکه آیا در یک دستگاه منطقی گزاره ای مثل  $E$  اثبات یا استنتاج شود کاملاً یک مفهوم نحوی است که چگونه یک جمله را از بقیه مفروضاتتان تولید کنید. تولید کاملاً یک مفهوم مبتنی بر گرامر زبان است و از طرف دیگر بپرسید که آیا این جمله راست است یا دروغ؟ یک مفهوم معنایی است اینکه خارج از زبان بین این دو چه رابطه ای وجود دارد و بررسی رابطه این دو مفهوم از علائق ذاتی بررسی منطق ریاضی است.

بخش بزرگی از منطق (و فلسفه) که امروزه رواج دارد، نشأت گرفته از آراء افرادی چون «وایتهد و راسل» است که شالوده منطق ریاضی جدید را بنا نهادند.

در واقع، منطق ریاضی را باید از مبانی ریاضیات جدید و فلسفه تحلیلی به حساب آورد، کاری که به دست برخی از فلاسفه در این حوزه آغاز گردید، بطور عمده به اصول ریاضیات و رابطه ریاضیات و منطق مربوط بود، اما نتایج چنان گسترده ای به بار آورد که به تدریج در فلسفه تأثیر عمیق برجای گذاشت.

## ۱. تعریف منطق<sup>۱</sup>

درباره تعریف منطق اگر چه اتفاق نظر نبوده و تعاریف متعددی بر منطق ارائه شده، اما نباید از این نکته غافل بود که تعریف ممکن و قابل قبول برای منطق باید جامع بوده باشد. تعریفی که در نوشته مزبور به آن اشاره شده تعریف به غرض یا آثار است؛ یعنی طبقه بندی استدلالها یا شناسایی استدلال های درست و نادرست از آثار منطق است و نمی توان آن را به عنوان تعریف علم منطق به شمار آورد یا تعریف نقل شده از سوزان هاگ<sup>۲</sup> تعریف به هدف است و این نوع تعریف برای علوم ناکافی و ناکارآمد می باشد.

آنچه به نظر می رسد که در تعریف منطق به عنوان علمی آلی درست باشد این است که، علم منطق علمی است که قواعد و قوانینی را یاد می دهد، کسی که رعایت آن قوانین را می کند، می تواند از خطای در فکر و خطای در استدلال در امان باشد.

## ۲. استنتاج

استنتاج اصطلاحی است که در فلسفه و منطق به کار می رود. این واژه به معنای نتیجه گیری می باشد و منظور از آن این است که ذهن از یک حکم کلی، یک حکم جزئی را نتیجه بگیرد و به اصطلاح از کلی به جزئی پی ببرد. مثلاً پس از آنکه بر ما ثابت شد که هر سیاره ای می چرخد (حکم کلی)، و زمین نیز یک سیاره است، نتیجه می گیریم که زمین هم می چرخد. (حکم جزئی) به عبارت دیگر، این حکم را استنتاج (نتیجه گیری) می کنیم. به این نتیجه گیری که حاصل فعالیتی ذهنی است، استنتاج گفته می شود. هر استدلالی با استنتاج همراه است؛ زیرا استدلال برای حصول به یک نتیجه است و اگر نتیجه گرفته نشود، (استنتاج نشود)، دیگر استدلال نخواهد بود. اساساً هر نتیجه ای که در ذهن خود داریم، حاصل یک استنتاج است؛ استنتاج از یک سری مقدمات که ممکن است خودمان هم از این مقدمات آگاه نباشیم. یکی از ویژگی های اصلی استنتاج، این است که در آن، نتیجه به طور ضروری از مقدمات حاصل می شود؛ یعنی ممکن نیست نتیجه از مقدمات حاصل نگردد.

## ۳. تعریف در منطق

با آن که با استفاده از منطق می توان بسیاری از چیزها را تعریف کرد و بسیاری از تعاریف را اثبات کرد اما تمامی اساس منطق بدون تعریف و زیر سؤال است، شاید دلیلش این باشد که منطق براساس فکر آدمی بنا شده و ما انسان ها درباره ی پدیده های غیر از فکر خود می توانیم تفکر کنیم زیرا که تفکر کردن درباره تفکر کردن بی معنا و مفهوم است و ما را وارد دور می کند که باطل است. البته بررسی ذهن به عنوان یک دستگاه منطقی ما را قادر می سازد تا بتوانیم منشاء منطق که همانا ذهن آدمی است را بیشتر کشف کنیم.

---

1) Logic

۲- سوزان هاگ، یکی از اهداف اساسی منطق، تشخیص استدلال های معتبر از استدلال های نامعتبر است و هدف از نظام های صوری منطقی مانند منطق جمله ها و منطق محمولات وضع قوانین دقیق اعتبار با همان تعیین معیارهای صوری محض آن است.

به طور مثال: نقیض گزاره ها

نمی توان آن را تعریف کرد، زیرا اگر بخواهیم آن را تعریف کنیم باز نیاز به استفاده از خودش برای تعریف خودش داریم. به چند تعریف زیر توجه کنید:

۱ - نقیض یک گزاره ، گزاره ای است که دارای ویژگی های آن گزاره نباشد.

۲ - نقیض یک گزاره یعنی اگر گزاره ای درست باشد آنگاه نقیض آن نادرست است.

۳ - نقیض یک گزاره یعنی مکمل حالت هایی که آن گزاره شامل نیست.

و تعاریفی مانند این ها ...

تعاریف بالا گرچه مفهوم را می رسانند و منظور از آوردن آن ها القاء مفهوم نقیض بوده است اما غلط هستند چون در آنها به نوعی از خود مفهوم نقیض استفاده شده است.

برای مثال در جمله ی اول، عبارت **دارای ویژگی های آن گزاره نباشد**. خود نقیض عبارت **دارای ویژگی های آن گزاره** باشد. است، همچنین در جملات بعدی عبارات **نادرست** و **نیست** خود به ترتیب نقیض عبارات **درست** و **هست** می باشند

بخش بندی منطق جمله‌ها و محمولها و نشان دادن مرز دقیق و کشف ارتباط آنها با یکدیگر و نیز به قاعده درآوردن آنها از «گوتلوب فرگه»، منطقدان آلمانی و پایه گذار منطق جدید، است. کتاب کوچکی را که فرگه در ۱۸۷۹ در منطق نوشت امروزه مهمترین کتاب منطق پس از «ارغنون ارسطو» می باشد. بخش بندی فرگه یکی از تفاوت‌های اساس منطق ارسطویی و منطق جدید است. در آثار منطقیان ارسطویی نه تنها منطق جمله‌ها و محمولها به هم آمیخته است، بلکه منطق جمله‌ها را، برعکس منطق جدید، بر منطق جمله‌ها اسطوار می کنند. فرگه این ترتیب را وارون کرد. اکنون همه‌ی کتابهایی که در منطق جدید نوشته می شوند نخست به منطق جمله‌ها می پردازند و پس از آن به منطق محمولها.

### نکات تکمیلی

از سال ۱۸۴۰ به بعد منطق جدید در دو مسیر و جریان متفاوت شروع به رشد کرد. جریان اول با جرج بول ریاضی دان انگلیسی آغاز شد. وی با به کارگیری روش‌ها و نمادهای جبری به فرمول بندی و نمادگذاری منطق همت گماشت و این فرمول بندی را در تبیین هر چه دقیق تر استدلال‌های منطق ارسطو به کار گرفت. بنابراین هدف عمده این جریان را می توان ارائه یک زبان نمادی جدید برای منطق ارسطویی دانست. جریان دوم با کوشش‌ها و تلاش‌های دموورگان ریاضی‌دان انگلیسی و چارلز پیرس دانشمند و فیلسوف آمریکایی شکل گرفت. این دو دانشمند مستقل از یکدیگر درصدد تبیین منطقی استدلال‌های ریاضی برآمدند و در این راستا به فرمول بندی و نمادگذاری استدلال‌های مبتنی بر «نسب» همت گماشتند. این گونه استدلال‌ها اگر چه پایه و اساس ریاضیات را تشکیل می دهند، در چارچوب منطق ارسطویی توجیه پذیر نیستند. این دو جریان متفاوت در قرن نوزدهم در تحقیقات ارزشمند گوتلوب فرگه فیلسوف و ریاضی دان بزرگ آلمانی به جریان واحدی تبدیل شد. فرگه در سال ۱۸۷۹ با نگارش کتاب مهم مفهوم انگاری منطق جدید را، رسماً پایه ریزی و اولین سیستم اصل موضوعی منطق گزاره‌ها و منطق محمولات را طراحی و ارائه کرد. تحقیقات فرگه به وسیله پئانو ریاضی دان ایتالیایی و دو تن از فلاسفه و ریاضی دان بزرگ انگلیسی، برتراند راسل و آلفرد نورث وایتهد ادامه یافت. کتاب اصول ریاضی راسل و وایتهد که طی سال‌های ۱۹۱۰-۱۹۱۳ منتشر شد در کنار کتاب مفهوم انگاری فرگه نقش عمده‌ای در تدوین منطق جدید داشته است.

گوتلوب فرگه از مفهوم تابع در ریاضیات به مفهوم تابع در گزاره‌های زبانی رسید. در جبر « $x+1$ » را تابع متغیر  $x$  می خوانند. عبارت « $x+1$ » تابع  $x$  است، زیرا مقدار یا ارزش آن به این بستگی دارد که ما به ازای  $x$  چه عددی را قرار دهیم. اگر  $x=2$  قرار دهیم، تابع ما ۳ می‌شود. یا اگر ۴ بگذاریم تابع ما ۵ می‌شود. عددی که جایگزین  $x$  می‌شود شناسه تابع گویند. فرگه از این شگرد در تحلیل گزاره‌ها استفاده کرد.

مثلاً گزاره سقراط چاق است» را در نظر بگیرید. بجای اینکه بگوییم «سقراط» موضوع و «چاق است» محمول ما می‌باشند، می‌گوییم: « $x$  چاق است» تابعی است که سقراط شناسه آن می‌باشد. و به همین ترتیب می‌توان تمام جملات زبانی را به شکل توابعی با شناسه‌های گوناگون و به صور نمادین درآورد. این رهیافت افق‌های تازه‌ای را در پیش روی فلاسفه قرن بیستم گشود که از آن جمله می‌توان به اعضای حلقه وین، مور، راسل، ویتگنشتاین، تارسکی اشاره کرد. [۲]

منطق جدید را می‌توان یکی از ابزارهای نیرومندی دانست که در بسط و شکوفایی فلسفه تحلیلی نقش بسزایی را ایفا کرده است، بطوریکه امروزه فلسفه تحلیلی را با این منطق می‌شناسند.

برای بیان ارزش‌ها و توانمندی‌های منطق جدید به یک رویداد تاریخی در حوزه «اعصاب مصنوعی» یا «*Neural Network*» می‌پردازیم که بعدها تاثیراتی شگرف را در صنعت رایانه به همراه داشت.

در سال ۱۹۴۳ دو پژوهشگر به نامهای «مک کلاچ» و «پیتر» بر پایه فهم خود از عصب‌شناسی مدل‌هایی از شبکه‌های عصبی را بوجود آوردند که بر پایه منطق ارسطویی و بر روی سیستم دودویی بنا گردیده بود. اما محدودیت‌هایی را که منطق ارسطویی به همراه داشت کم‌کم پژوهشگران این عرصه را ناامید ساخت. ولی مابین دهه ۷۰ و ۸۰ میلادی دوباره این رشته قوت گرفته و حمایت‌های گوناگونی را به خود دید و سرّ این مطلب در این بود که این بار منطق جدید به کمک «اعصاب مصنوعی» شتافته بود.

## یادداشت زبانی

در زبان طبیعی برای هر کدام از ثابت‌های منطقی معادل‌های گوناگونی وجود دارد. برای مثال، اگرچه در زبان فارسی «اگر» نشانه‌ی شرط است، اما تنها نشانه‌ی آن نیست. نشانه‌های دیگری هم برای بیان شرط داریم. جمله‌های

• در صورتی که باران ببارد زمین تر می‌شود؛

• هنگامی که باران ببارد زمین تر می‌شود؛

• وقتی باران ببارد زمین تر می‌شود؛

• باران که ببارد زمین تر می‌شود؛

همه شرطی هستند و ساخت منطقی آنها ساخت منطقی این جمله است:

اگر باران ببارد زمین تر می‌شود.

یا به عبارتی دارای صور منطقی:

$$(P \rightarrow Q)$$

از طرف دیگر جمله‌هایی هستند که در آنها «اگر» به کار رفته اما شرطی نیستند:

• اگر این آدم است آن کار را خواهد کرد؛

• به خدا اگر یک گلوله از تفنگ من شلیک شده باشد؛

• به خدا اگر من بودم؛

البته می‌توان با کم و زیاد کردنها و دست زدن به تعبیرهایی هر کدام از این جمله‌ها را به جمله‌های شرطی تبدیل کرد. گاهی چنین تبدیل‌هایی لازم است، اما در مورد این جمله‌ها شاید درست‌تر و طبیعی‌تر آن باشد که بگوییم به معنای جمله‌های غیر شرطی زیر هستند:

- این آدم آن کار را خواهد کرد؛
- یک گلوله هم از تفنگ شلیک نشد؛
- من نبودم (آن کار را نکردم).

بنابراین برای یافتن ساخت منطقی هر جمله نه تنها باید ثابتهای منطقی، بلکه باید معادلهای آنها را هم دانست و نیز دانست که این ثابتها به معنای منطقی خود به کار رفته اند یا نه.

زبان طبیعی از تواناییها و امکانهای بیانی فراوانی برخوردار است که هر کدام زایندهی نیازی و پاسخگوی پرسشی است. اما در منطقی که کار ما با صدق و کذب جملهها و درستی و نادرستی استنتاجهاست، بدین معنا که در منطق با زیور و تکیهها و تاکیدها و سبک و سیاق هنری کلام، و کوتاه سخن آنکه با هرچه با صدق و کذب جملهها ارتباطی ندارد و در استنتاج به کار نمی آید، کاری نداریم.

برای مثال جملهی :

بله، همانطور که می دانید من گفته بودم که حسن یا در تهران باید باشد یا در اصفهان. اما حالا که معلوم شده است که در اصفهان نیست، پس دیگر مسلم است که در تهران باید باشد.

از نظر منطقی، دارای استنتاج

حسن در تهران است یا در اصفهان.

حسن در اصفهان نیست.

---

حسن در تهران است.

جملهها و عبارتهای دیگر، با همه ریزه کاریهایی که گوینده ممکن است در آنها گنجانده شده باشد، دخالتی در استنتاج ندارد و برای پیدا کردن این استنتاج باید همه آنها را نادیده گرفت.

## نکات تکمیلی

گروهی از این ثابتها مانند «یا» و «اگر» هم از لغتهای منطق جملهها هستند و هم منطق محمولها. گروهی مانند «هر»، «بعضی» تنها از لغتهای منطق محمولها. این خود یکی از معیارهای صوری برای جدا کردن این دو منطق از یکدیگر است. ثابتهایی چون «چنین نیست که»، «یا»، «و» و «اگر» که به جمله می پیوندند یا جملهها را با هم پیوند می دهند، ادات منطقی<sup>۱</sup> و ثابتهایی چون «هر» و «بعضی» (و معادلهای آنها) که جزئی از ساختار جمله هستند، سور<sup>۲</sup> نامیده می شود. [ ۱ ]



اما قاعده مربوط به «تنها اگر» عبارت است از:

---

«تنها اگر» پیش از تالی گزاره‌ی شرطی می‌آید.

---

و قاعده‌ی مربوط به «اگر» عبارت است از:

---

«اگر» پیش از مقدم گزاره‌ی شرطی می‌آید.

---

به دو مثال زیر توجه کنید:

۱. پدram کناره‌گیری ( $R$ ) می‌کند اگر پسرش دانیال رئیس شرکت ( $P$ ) شود.

۲. پدram کناره‌گیری می‌کند **تنها اگر** پسرش دانیال رئیس شرکت شود.

در صورت علامتی «۱» آنچه را برای حاصل کردن کناره‌گیری پدram کافی است بیان می‌کند، اما در این مورد که آیا این مطلب لازم نیز هست یا نه، بی تفاوتی می‌باشد و به زبان صوری منطق چنین می‌شود:

$$(P \rightarrow R)$$

اما در صورت علامتی «۲» برای بیان جهت مخالف «۱»، یعنی :

$$(R \rightarrow P)$$

«تنها اگر» را به کار می‌بریم. [۴]

## یادداشت زبانی

گاهی تالی هم خود جمله‌ی شرطی است.

۱. اگر فردا آفتابی باشد **آنگاه اگر** امشب زود نخوابم **آنگاه** فردا به کوه نخواهم رفت.

زبان صوری منطق :

$$(P \rightarrow ((\sim Q) \rightarrow (\sim R)))$$

اگر می‌خواستیم جمله‌ی «۱» را به زبان عادی بیان کنیم، باید می‌گفتیم :

اگر فردا آفتابی هم باشد، **اگر** امشب زود نخوابم فردا به کوه نخواهم رفت.

و طبیعی‌تر:

**اگر** فردا آفتابی هم باشد **ولی** امشب زود نخوابم فردا به کوه نخواهم رفت.

هر دو جمله‌ی اخیر همان ساختار منطقی «۱» را دارند. ولی هیچ کدام این ساخت را بروشنی آن نشان نمی‌دهند. بویژه در جمله‌ی آخر نمی‌توان دریافت که «ولی» به معنای «اگر» به کار رفته است.

در زبان فارسی، مانند زبان‌های دیگر، برای ترجمه‌ی جمله‌های شرطی اغلب با دو دشواری روبه‌رو می‌شویم:

۱. برای بیان شرط همیشه «اگر» به کار نمی‌رود.

۲. همیشه «اگر» به معنای شرطی به کار نمی‌رود.

برای مثال جمله‌ی

چه بیایی، چه نیایی، خواهم رفت؛

اگر چه شرطی نمی‌نماید، اما هم ارز دو جمله‌ی شرطی زیر است:

اگر بیایی خواهم رفت و اگر نیایی خواهم رفت.

آنچه در مورد «اگر» گفتیم در مورد همه‌ی ثابتهای منطقی دیگر هم صدق می‌کند.

## یادداشت تاریخی

در منطق سنتی ما دو قاعده وضع مقدم و رفع تالی را باهم قیاس استثنایی می‌نامند و آن را چنین بیان می‌کنند: وضع مقدم مستلزم وضع تالی است، و رفع تالی مستلزم رفع مقدم.

## نکات تکمیلی

قاعده‌ی وضع مقدم (و.م)<sup>۱</sup>

از دو مقدمه‌ی  $A$  و  $(A \rightarrow B)$  می‌توان  $B$  را نتیجه گرفت.

قاعده‌ی رفع تالی (ر.ت)<sup>۲</sup>

از دو مقدمه‌ی  $(A \rightarrow B)$  و  $\sim A$  می‌توان  $\sim B$  را نتیجه گرفت.

قاعده‌ی وضع مقدم تنها حاکم بر « $\rightarrow$ » بود، اما قاعده‌ی رفع تالی حاکم بر « $\rightarrow$ » و « $\sim$ » است.

1) Modus Ponendo Ponens

2) Modus Tollendo Tollens

## یادداشت زبانی

در زبان فارسی برای عطف دو جمله واژه‌های دیگری هم جز «و» به کار می‌روند. برای مثال جمله‌های زیر:

هوا ابری بود اما باران نیامد؛

هوا ابری بود ولی باران نیامد؛

با اینکه هوا ابری بود باران نیامد؛

همه همان ترکیب عطفی<sup>۱</sup> «هوا ابری بود و باران نیامد» یا به زبان صوری:

$$(P \wedge Q)$$

می‌باشند. همچنین جمله‌ی «نه تنها حسن ترسو نیست، بلکه شجاع هم هست» همان ترکیب عطفی «حسن ترسو نیست و حسن شجاع است» است.

از سوی دیگر در جمله‌ی «حسن و حسین برادرند»، «و» نشانه‌ی عطف دو جمله نیست. در اینجا «و» برای عطف دو اسم به کار رفته است و بنابراین آن را «عاطف» نمی‌دانیم.

اما در جمله‌ی «حسن و حسین اصفهانی هستند»، «و» نشانه‌ی عطف دو جمله است، زیرا این دو جمله در واقع کوتاه شده‌ی جمله‌ی زیر است:

حسن اصفهانی است و حسین اصفهانی است.

## نکات تکمیلی

گزاره های عطفی، گزاره هایی هستند که در آنها حرف ربط «و» به کار رفته است. گزاره های چند جزئی که با حرف ربط «و» به یکدیگر مربوط می شوند حتی اگر یکی از گزاره ها درست نباشد شرط نادرست است و برای درستی شرط باید تمامی گزاره ها درست باشند. می توان گفت که نقیض گزاره های فصلی به شکل عطفی است و نقیض گزاره های عطفی به شکل فصلی است. توجه داشته باشید که کلمه «و» در زبان صوری با «^» مختصر می کنند. این علامت به عاطف<sup>1</sup> موسوم است. گاهی اوقات «و» برای اینکه به معنی «وبعد» باشد نیز به کار می رود.

به هرکدام از دو جمله ای که «و» به هم عطف کرده است، منعطف<sup>2</sup> گویند. اما ترتیب منعطف ها به دور «و» در زبان فارسی می تواند دارای اهمیت باشد. به طور مثال:

فروغ ازدواج کرد و بچه دار شد.

فروغ بچه دار شد و ازدواج کرد.

## یادداشت زبانی

در زبان فارسی جمله‌ای را که به شکل «این عدد زوج است یا فرد است» نوشتیم، بیشتر به شکل

این عدد فرد است یا زوج؛

می‌نویسند. در این جمله دو «یا» به کار رفته است، اما اولی نشانه‌ی فصل نیست و همیشه هم می‌توان آن را حذف کرد. در واقع «یا»ی اولی را می‌توان گفت از پیش خبر از وجود «یا»ی فصلی می‌دهد و تأکیدی بر وجود آن است، اما خود «یا»ی فصلی نیست. در همین جمله سازی دوم را هم کوتاه‌تر کرده‌ایم و «زوج» در واقع به جای «این عدد زوج است» به کار رفته است.

## نکات تکمیلی

«یا» دارای دو معنی است.

در یک مفهوم، « $P$  یا  $Q$ » به معنی « $P$  یا  $Q$  یا هر دو» می‌باشد که به مفهوم جامع<sup>۱</sup> «یا» موسوم است.

در مفهوم دیگر به معنی « $P$  یا  $Q$  اما نه هر دو» می‌باشد که به مفهوم مانع «یا» موسوم است. موارد استعمال جامع «یا» بر مفهوم دیگر غلبه می‌کند.

رمی‌ها برای «یا»ی دو کلمه متفاوت داشتند، و کلمه‌ی «*aut*» را به مفهوم مانع، و کلمه‌ی «*vel*» را به مفهوم جامع به کار می‌بردند. به همین علت حرف « $v$ » به جای مفهوم جامع «یا» در نظر می‌گیریم.

حرف « $v$ » شبیه گووه به نظر می‌رسد، به همین جهت، آن را گووه<sup>۲</sup> یا فاصل می‌نامیم.

گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

نادر شناگر یا دونده است.

پدرام قهوه یا چای می‌خواهد.

آیا تصور می‌کنید نادر هم شناگر است و هم دونده؟

جواب مثبت است!

این «یا» به مفهوم جامع یعنی « $P$  یا  $Q$  یا هر دو» است. یعنی:  $P \vee Q$

آیا تصور می‌کنید پدرام قهوه و چای هر دو را باهم می‌خواهد؟

جواب منفی است!

این «یا» به مفهوم مانع یعنی « $P$  یا  $Q$  اما نه هر دو» باشد.

## یادداشت تاریخی

در منطق سنتی آنچه را جمله‌ی اتمی<sup>۱</sup> نامیدیم قضیه‌های شخصی می‌نامند. در این منطق هر قضیه چه شخصی باشد و چه از نوعهای دیگر، به سه بخش تحلیل می‌شود: موضوع، محمول و رابطه.

برای مثال در «فردوسی شاعر است»، «فردوسی» را موضوع، «شاعر» را محمول و «است» را رابطه می‌نامند. همچنین «حسن برادر حسین است» را به «حسن» (موضوع)، «برادر حسین» (محمول) و «است» (رابطه) تحلیل می‌کنند. بنابراین تحلیل منطق جدید دو تفاوت بنیادی با منطق سنتی دارد:

۱) در منطق جدید بخش محمولی، مجموعه‌ی محمول و رابطه در منطق سنتی است. به همین دلیل هم آن را بخش محمولی نامیدیم. تا با محمول سنتی اشتباه نشود.

۲) در منطق سنتی، که همه‌ی جمله‌ها به موضوع و محمول و رابطه تحلیل می‌شوند، تمایز میان انواع جمله‌های اتمی و تمایز محمولهای یک موضعی و چند موضعی پنهان می‌ماند.

## نکات تکمیلی

به جمله‌های زیر توجه کنید:

۱. پدرام کشاورز است.

۲. پدرام برادر نادر است.

جمله‌ی اول از دو بخش ساخته شده است: «پدرام» و «-کشاورز است». بخش اول را بخش اسمی و بخش دوم را بخش محمولی گویند. بخش محمولی را با حروف لاتین بزرگ و بخش اسمی را با حروف کوچک نشان می‌دهند.

جمله‌ی اول دارای یک بخش محمولی یک موضعی «-» است. و ساخت منطقی آن به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$Fm$$

که در اینجا « $m$ » به جای «پدرام» و « $F$ » به جای «کشاورز است»، آمده است.

جمله‌ی دوم از سه بخش ساخته شده است: «پدرام» و «نادر»، (بخش اسمی) و «- برادر- است» یک بخش محمولی دو موضعی است و ساخت منطقی آن به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$Gnm$$

که در اینجا « $m$ » به جای «پدرام»، « $n$ » به جای «نادر» و « $G$ » به جای «برادر است»، آمده است.

به این جمله‌ها، که از یک یا چند اسم و یک بخش محمولی ساخته شده است ولی اساس تحلیل جمله‌های پیچیده ترند جمله‌های اتمی می‌نامیم. [ ۱ ]

## یادداشت زبانی

دو جمله‌ی

• حافظ شیرازی است؛

• حافظ شاعر است؛

را می‌توان یکجا باهم چنین نوشت:

حافظ شاعر و شیرازی است.

اما دو جمله‌ی

• بعضی زن هستند؛

• بعضی مرد هستند؛

را به قیاس بالا نمی‌توان یکجا به شکل «بعضی زن و مرد هستند!» نوشت. از اینجا بروشنی می‌توان دریافت که «بعضی» در حکم اسم خاص نیست و نباید آن را با مسندالیه یا فاعل جمله یکی دانست.

در زبان فارسی گاهی به جای «بعضی» کلمه‌های «برخی»، «پاره‌ای»، «کسی»، «چیزی» و مانند آنها به کار می‌روند که همه در بیشتر موردها در حکم سور وجودی هستند.

## یادداشت زبانی

در زبان فارسی به جز «هر» و «هیچ» کلمه‌های دیگری هم مانند «تمام» و «همه» هستند که برای بیان کلیت به کار می‌روند. در بسیاری از جمله‌ها نیز این سورها حذف می‌شوند و باید از معنای جمله، کلی بودن آن را دریافت. برای مثال جمله‌های

نازپرورد تنعم نبرد راه به دوست؛

کسی که روی ترا دید حال من داند؛

به معنای

هیچ نازپرورد تنعم نبرد راه به دوست؛

هرکسی که روی ترا دید حال من داند؛

می‌باشد.

## نکات تکمیلی

### جمله‌های وجودی<sup>۱</sup>

«بعضی ستاره‌های بیس‌بال وجود دارند» به چه معنی است؟

به این معنی است که «برای پر کردن مکان خالی در « $x$  ستاره‌ی بیس‌بال است»، برای به دست آوردن گزاره‌ی راست، طریقی موجود است»، برای صرفه‌جویی در وقت عبارت آگاهی دهنده‌ی طولانی «برای پر کردن مکان خالی  $x$  در.....» را با نوشتن « $E$ » معکوس به جای «وجود دارد» مختصر می‌کنیم.

سور « $(\exists x)$ » به صورت « $x$  ی وجود دارد به طوری که» یا «بعضی  $x$  ها وجود دارند به طوری که» خوانده می‌شود و بنابراین به «سور وجودی»<sup>۲</sup> موسوم است.

به این ترتیب «بعضی ستاره‌های بیس‌بال وجود دارند» را به صورت:

$$(x \text{ ستاره‌ی بیس‌بال است}) (\exists x)$$

علامتی و سپس فرض می‌کنیم:

$G$  : ستاره‌ی بیس‌بال است.

$b$  : پدram.

در این صورت، «پدram ستاره‌ی بیس‌بال است» را به صورت  $Gb$  علامتی می‌کنیم؛ و در نتیجه:

$$(x \text{ ستاره‌ی بیس‌بال است}) (\exists x)$$

و به صورت:

$$(\exists x)(Gb)$$

نمایش داده می‌شود. و به صورت « $x$  ی چنان وجود دارد که  $x$  ستاره‌ی بیس‌بال است» خوانده می‌شود. [۴]



به گزاره‌های زیر توجه کنید:

۱. بعضی اشخاص بیکار معتاد هستند.

۲. بعضی اشخاص بیکارند و بعضی اشخاص معتادند.

با علامتی کردن گزاره‌ها به:

$Fx$ : «X شخص (انسان) است»

$Gx$ : «X بیکار است»

$Hx$ : «X معتاد است»

ترجمه‌ی گزاره‌ی اول به صورت:

$$(\exists x)((Fx \wedge Gx) \wedge Hx)$$

و ترجمه‌ی گزاره‌ی دوم به صورت:

$$(\exists x)(Fx \wedge Gx) \wedge (\exists x)(Fx \wedge Hx)$$

حال اگر « $x$  ای هست» را «شخص  $x$  ای هست» بخوانیم (سور مقید) آنگاه گزاره‌های «۱» و «۲» به زبان صوری به صورت:

$$(\exists x)(Gx \wedge Hx) \quad ۱.$$

$$(\exists x)Gx \wedge (\exists x)Hx \quad ۲.$$

خواهند بود.

### جمله‌های کلی<sup>۱</sup>

در مورد سور عمومی<sup>۲</sup> از « $A$ » سروه استفاده می‌کنیم. تا یادآور کلمه‌ی «تمام و همه<sup>۳</sup>» باشد.

گزاره‌ی «چیزی زیباست» به صورت  $(\exists x)(Sx)$  علامتی می‌شود.

گزاره‌ی «هر چیز زیباست» یا «تمام چیزها زیبا هستند» به صورت  $(\forall x)(Sx)$  علامتی می‌شوند.

گزاره‌ی «هیچ چیز زیبا نیست» با کدام یک از گزاره‌های زیر معادل است:

۱. هر چیز که باشد آن چیز زیبا نیست.

۲. راست نیست که چیزی زیبا است.

۳. دروغ است که چیزی زیبا نیست.

۴. چیزی هست که زیباست

تصور می‌کنیم دو شیء، یعنی آدم و حوا در جهان موجوداند. در این صورت اگر هیچ چیز زیبا نباشد. آیا آدم و حوا زیبا هستند؟ (نه) اگر تنها این دو در جهان موجود باشند، کسی زیبا است؟ (نه). از آنجا که آدم و حوا زیبا نیستند، در این صورت در دنیای کوچک، هر چیز که باشد آن چیز زیبا نیست. به این ترتیب، اگر هیچ چیز زیبا نیست، در این صورت هر چیز که باشد آن چیز زیبا نیست. و برعکس. بنابراین، «هیچ چیز زیبا نیست» منطقاً معادل «۱» است.

دو گزاره‌ی «هیچ چیز زیبا نیست» و «راست نیست که هر چیز زیبا است» (گزاره ۲) نیز منطقاً معادلند. پس گزاره‌ی «هیچ چیز زیبا نیست» را می‌توان به دو صورت علامتی کرد:

$S$  : زیبا است.

$$\sim((\exists x)(Sx)) \equiv (\forall x)(\sim(Sx))$$

اما گزاره‌ی سوم یعنی «دروغ است که چیزی زیبا نیست.» منطقاً معادل «چیزی هست که زیباست» (گزاره ۴)، است. پس:

$$(\exists x)(Sx) \equiv \sim((\forall x)(\sim(Sx)))$$

(طبق قوانین دموگن)

## یادداشت تاریخی

۱) اولین نظام اصل موضوعی منطق جمله‌ها از فرگه است (۱۸۷۹). قاعده‌های این نظام دو قاعده‌ی وضع مقدم و جانشین‌سازی است. فرگه قاعده‌ی جانشین‌سازی را به کار برده، اما به آنها اشاره نکرده است.

اصل‌های موضوع نظام فرگه اینها هستند:

۱.  $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
۲.  $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
۳.  $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$
۴.  $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((\sim Q) \rightarrow (\sim P))$
۵.  $((\sim (\sim P)) \rightarrow P)$
۶.  $(P \rightarrow (\sim (\sim P)))$

در این نظام، «۳» اصل مستقلی نیست و آن را می‌توان و آن را می‌توان از «۱» و «۲» استنتاج کرد. به جای اصل‌های «۴» تا «۵» نیز می‌توان  $((\sim Q) \rightarrow (\sim P)) \rightarrow (P \rightarrow Q)$  را نهاد.

۲) پس از نظام بالا معروفترین نظام که بیش از نظام فرگه به کار رفته، نظام راسل در کتاب معروف پرنسیپیا ماتماتیکا<sup>۱</sup> است. در اینجا اداتهای « $\sim$ » و « $\vee$ » و قاعده‌های استنتاج همان دو قاعده‌ی جانشین‌سازی و وضع مقدم است. قاعده‌ی وضع مقدم چنین بیان می‌شود: از  $A$  و  $(\sim A) \vee B$  می‌توان  $B$  را نتیجه گرفت.

اصل‌های موضوع این نظام اینها هستند (در این اصل‌ها  $(A \rightarrow B)$  بنا به تعریف همان  $(\sim A) \vee B$  است):

۱.  $((P \vee P) \rightarrow P)$
۲.  $(Q \rightarrow (P \vee Q))$
۳.  $((P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P))$
۴.  $((P \vee (Q \vee R)) \rightarrow (Q \vee (P \vee R)))$
۵.  $(Q \rightarrow R \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)))$

$$S \vDash A \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad S \vdash A$$

را به دو گونه می‌توان در نظر گرفت: یکی با شرط متناهی بودن فحس‌های مجموعه‌ی  $S$  و دیگری بدون این شرط. گونه‌ی اول را شکل ضعیف<sup>۱</sup> و دوم را شکل قوی<sup>۲</sup> فراقضیه‌ی سازگاری و تمامیت می‌نامند.

اثبات شکل ضعیف فراقضیه‌ی تمامیت از کرت گدل<sup>۳</sup> (۱۹۳۰) و نیز از هربراند<sup>۴</sup> (۱۹۳۰) است. اصول روشی که هر دو به کار برده‌اند پیش از آنان در مقاله‌ای از اسکولم<sup>۵</sup> (۱۹۲۸) آمده بوده است. اثبات این شکل قوی آن، از لئون هنکین (۱۹۴۷) است. روش هنکین، بویژه به اعتبار شگردی که در ساختن الگو از خود زبان به کار برده است، اهمیت و کاربردهای فراوان یافته است.

### نکات تکمیلی

شهرت لئون هنکین بیشتر به دلیل اثبات تمامیت منطق محمول‌ها به روشی بسیار ساده‌تر و کلی‌تر از روش گودل است. (برهان تمامیت گودل اولین برهان تمامیت برای منطق محمول‌هاست). امروزه، بیشتر برهان‌های تمامیت در نظام‌های گوناگون منطق جدید به روش هنکین صورت می‌گیرد.

گودل در برهان خود بر ناتمامیت علم حساب، گزاره‌ای مشابه پارادوکس دروغگو (= من دروغ می‌گویم) را در علم حساب پیدا کرد که می‌گفت همین گزاره در علم حساب قابل اثبات نیست. اگر این گزاره در علم حساب قابل اثبات باشد قابل اثبات نخواهد بود و بنابراین، علم حساب ناسازگار می‌شود و اگر قابل اثبات نباشد علم حساب همه گزاره‌های صادق را نمی‌تواند اثبات کند و بنابراین، ناتمام است. از آنجا که این گزاره یا قابل اثبات است یا قابل اثبات نیست پس علم حساب یا ناسازگار است یا ناتمام؛ و به عبارت دیگر، علم حساب اگر سازگار باشد ناتمام است.

هنکین در ۱۹۵۲، این سوال را مطرح کرد که گزاره مشابه پارادوکس راستگو (= من راست می‌گویم) که می‌گوید همین گزاره در علم حساب قابل اثبات است چه وضعیتی دارد؟ آیا قابل اثبات است یا قابل ابطال؟ و یا برخی قابل اثبات و برخی قابل ابطال؟

# منابع

- [۱]. موحّد، ضياء، «درآمدی به منطق جدید»، تهران، انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۷۳
- [۲]. موحّد، ضياء، «تمایزات مبنایی منطق قدیم و جدید»، فصل‌نامه دانشگاه مفید، ۱۳۷۶،  
([www.logic.new-philosophy.ir](http://www.logic.new-philosophy.ir))
- [۳]. مقاله‌ای است تحقیقی در فلسفه‌ی زبان فرگه نقل قول از علیرضا محمدی
- [۴]. هاکینگ، یان، خودآموز منطق ریاضی، ترجمه‌ی غلامرضا یاسی‌پور، تهران، انتشارات بینش، ۱۳۷۰
- [۵]. اندرتون، هربرت، ب. آشنایی با منطق ریاضی، ترجمه‌ی غلامرضا برادران خسروشاهی و محمد رجبی طرخورانی، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۶