پاسخ های تشریحی آزمون هفتگی شماره ۲ – قسمت ۱

۱ آبان ۹۳- درس جبر

سوال ۵۶:

گزینه‌ی «۳»

در بین گزینه‌های داده شده فقط روش «استدلال استنتاجی» برای اثبات یک قضیه روش معتبری است.

(جبرواحتمال- صفحه‌ی ۱۷)

سوال ۵۷:

گزینه‌ی «۳»

استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است و در بین گزینه‌ها تنها گزینه‌ی «۳» بر مبنای استدلال استقرایی است.

(جبرواحتمال- صفحه‌ی ۶)

سوال ۵۸:

گزینه‌ی «۳»

$$P_۵ = ۱۱ < ۲(۵+۱)$$
$$P_۶ = ۱۳ < ۲(۶+۱)$$
$$P_۷ = ۱۷ > ۲(۷+۱)$$

بنابراین نامساوی به‌ازای $n \geq ۷$ برقرار است.

(جبرواحتمال- صفحه‌ی ۱۴)

سوال ۵۹:

گزینه‌ی «۲»

$$n = ۲ \Rightarrow ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۲+۱}{۲\times ۲} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

فرض: $n = k \Rightarrow (۱-\frac{۱}{۴})(۱-\frac{۱}{۹})\ldots(۱-\frac{۱}{k^۲}) = \frac{k+۱}{۲k}$

حکم: $n = k+۱ \Rightarrow (۱-\frac{۱}{۴})(۱-\frac{۱}{۹})\ldots(۱-\frac{۱}{k^۲})(۱-\frac{۱}{(k+۱)^۲}) = \frac{k+۲}{۲(k+۱)}$

باید طرفین فرض را در $۱ - \frac{۱}{(k+۱)^۲}$ ضرب کنیم.

$$۱ - \frac{۱}{(k+۱)^۲} = \frac{k^۲ + ۲k}{k^۲ + ۲k + ۱}$$

(جبرواحتمال- صفحه‌های ۸ تا ۱۲)

سوال ۶۰:

گزینه‌ی «۴»

گزینه‌های دیگر مثال نقض دارند:

گزینه‌ی اول: عدد ۸ را نمی‌توان به‌صورت حاصل‌جمع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

گزینه‌ی دوم: اگر ۶ نقطه روی محیط دایره انتخاب کنیم و به هم وصل کنیم، دایره به ۳۰ ناحیه تقسیم می‌شود.

گزینه‌ی سوم: $x = ۲+\sqrt{۲}\ ,\ y = ۲-\sqrt{۲} \Rightarrow x+y = ۴$

گزینه‌ی چهارم به‌ازای هر عدد طبیعی n برقرار است و مثال نقضی ندارد. (تمرین ۶، صفحه‌ی ۱۵ کتاب درسی)

(جبرواحتمال- صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

سوال ۶۱:

گزینه‌ی «۳»

با استفاده از اصل استقرای ریاضی، به‌سادگی می‌توان نشان داد که $۴^{۲n} - ۱$ همواره بر ۵ بخش‌پذیر است. $n = ۱$ مثال نقض برای سایر گزینه‌ها است.

(جبرواحتمال- مشابه مثال ۴- صفحه‌ی ۱۲)

سوال ۶۲:

گزینه‌ی «۲»

۲۰ عدد فرد متوالی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۲k+۱), (۲k+۳), \ldots, (۲k+۳۹)$$

$$(\underbrace{۲k+۲k+\ldots+۲k}_{۲۰\ \text{تا}}) + (۱+۳+\ldots+۳۹)$$

$$= ۲۰\times ۲k + (۲۰)^۲ = ۴۰(k+۱۰) = ۴۰k'$$

که همواره بر ۴۰ بخش‌پذیر است.

نکته: $(n \in N)\quad ۱+۳+\ldots+(۲n-۱) = n^۲$

(جبرواحتمال- صفحه‌های ۱۴ و ۱۹)

سوال ۶۳:

گزینه‌ی «۴»

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$۱^۳ + ۲^۳ + \ldots + n^۳ = (۱+۲+\ldots+n)^۲$$

حاصل عبارت موردنظر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$۱۰^۳ + ۱۲^۳ + ۱۴^۳ + \ldots + ۳۰^۳ = ۲^۳ \times (۵^۳ + ۶^۳ + ۷^۳ + \ldots + ۱۵^۳)$$
$$= ۸\times[(۱^۳ + ۲^۳ + \ldots + ۱۵^۳) - (۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳)]$$
$$= ۸\times[(۱+۲+\ldots+۱۵)^۲ - (۱+۲+۳+۴)^۲]$$
$$= ۸\times[(\frac{۱۵\times ۱۶}{۲})^۲ - (\frac{۴\times ۵}{۲})^۲]$$
$$= ۸(۱۲۰^۲ - ۱۰^۲) = ۸(۱۴۴۰۰ - ۱۰۰) = ۱۱۴۴۰۰$$

(جبرواحتمال- صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

سوال ٦٤:

گزینه‌ی «۳»

$$۲\times ۱^{۲}+۳\times ۲^{۲}+...+۱۱\times ۱۰^{۲}$$
$$=(۱+۱)\times ۱^{۲}+(۲+۱)\times ۲^{۲}+...+(۱۰+۱)\times ۱۰^{۲}$$
$$=(۱^{۲}+۲^{۲}+...+۱۰^{۲})+(۱^{۳}+۲^{۳}+...+۱۰^{۳})$$
$$=\frac{۱۰\times ۱۱\times ۲۱}{۶}+(\frac{۱۰\times ۱۱}{۲})^{۲}$$
$$=۵\times ۱۱\times ۷+۵۵^{۲}=۵۵(۵۵+۷)=۳۴۱۰$$

نکته: $(n\in N)$

$$۱^{۲}+۲^{۲}+...+n^{۲}=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$
$$۱^{۳}+۲^{۳}+...+n^{۳}=(\frac{n(n+۱)}{۲})^{۲}$$

(جبرواحتمال- صفحه‌های ۹ و ۱۴)

سوال ٦٥:

گزینه‌ی «۴»

در این سؤال، شخص قصد دارد از روش اثبات بازگشتی استفاده کند، اما باید بدانیم اثبات بازگشتی هنگامی درست است که تمامی مراحل رفت، بازگشت‌پذیر باشد. اما کاملاً مشخص است که از $۸=۸$ نمی‌توان $۳=۵$ را نتیجه گرفت یعنی از مرحله‌ی آخر نمی‌توانیم به مرحله‌ی ۲ برسیم.

(جبرواحتمال- مشابه مثال ۱۲- صفحه‌ی ۲۵)

سوال ٦٦:

گزینه‌ی «۳»

از درستی $P(۳)$ درستی $P(۲+۳)=P(۵)$ به‌دست می‌آید. حال از درستی $P(۵)$، درستی $P(۷)$ و از درستی $P(۷)$، درستی $P(۹)$ و . . . به‌دست می‌آید. یعنی داریم:

$$P(۳)\Rightarrow P(۵)\Rightarrow P(۷)\Rightarrow P(۹)\Rightarrow ...\Rightarrow P(۲k+۱)$$

پس حکم P به‌ازای اعداد مجموعه‌ی $A=\{۲n+۱|n\in N\}$ درست است.

(جبرواحتمال- صفحه‌های ۸ تا ۱۲)

سوال ٦٧:

گزینه‌ی «۳»

به‌ازای $n=۱$ و $n=۳$ نامساوی برقرار نیست و به‌ازای $n=۴$ داریم: $۴\times ۲^{۴}<۵!$ که این نامساوی برقرار است و نیز به‌ازای تمامی $n\geq ۴$ نیز برقرار است.

(جبرواحتمال- صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

سوال ٦٨:

گزینه‌ی «۲»

از مثال نقض برای رد کردن حکم استفاده می‌کنیم:

$$A=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\neq ۰$$
$$B=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\neq ۰$$

سوال ٦٩:

گزینه‌ی «۳»

$$f(۱)=\frac{۱}{۲}\ ,\ f(۲)=\frac{۲}{۳}\ ,\ f(۳)=\frac{۳}{۴}\ ,\ f(۴)=\frac{۴}{۵}$$

با توجه به عبارت بالا، حدس این است که $f(n)=\frac{n}{n+۱}$

توجه: این حدس باید اثبات شود (مثلاً از طریق استقراء)

(جبرواحتمال- صفحه‌ی ۱۵)

سوال ٧٠:

گزینه‌ی «۴»

عدد $a=۱-\sqrt{۲}$ عددی گنگ است (گنگ $=$ گنگ $\pm$ گویا) همچنین داریم:

$$b=\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲-۱}=\sqrt{۲}+۱ \text{ گنگ}$$

مجموع $a+b$ برابر ۲ است که عددی گویا است، ولی a و b، هر دو اعدادی گنگ هستند.

(جبرواحتمال- صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)