

به نام خالق مهربانی‌ها

آزمون تئوری چهارم
زمان : ۴ ساعت

مجموع ارقام [۲۰ نمره] $S(k)$ را برابر با مجموع ارقام عدد k در نظر می‌گیریم. ثابت کنید یک مجموعه‌ی نامتناهی از اعداد طبیعی مثل n داریم به طوری که $S(2^n) > S(2^n + n)$.

$$\begin{aligned}F[0] &= \text{"A"} \\F[1] &= \text{"B"} \\F[2] &= \text{"BA"}\end{aligned}$$

...

$$F[i] = F[i - 1] + F[i - 2]$$

رشته‌سازی [۳۰ نمره] - دنباله‌ی F را به شکل مقابل می‌سازیم. ثابت یا رد کنید: به ازای هیچ i ایی رشته‌ای مثل C وجود ندارد که طول C کوچکتر از طول $F[i]$ باشد و با کنار هم قرار دادن چند C بتوان دقیقاً $F[i]$ را ساخت.



پازل پانزده [۵۰ نمره] - یک جدول 4×4 داریم و ۱۵ کارت مربعی با شماره‌های ۱ تا ۱۵ داخل جدول قرار گرفته‌اند. در هر مرحله می‌توانیم یکی از کارت‌های مجاور با خانه‌ی خالی را به خانه‌ی خالی ببریم. هدف این است که از یک حالت به هم‌ریخته به حالت مرتب برسیم.

شرط لازم و کافی روی وضعیت قرار گیری کارت‌ها پیدا کنید که مرتب کردن کارت‌ها ممکن باشد.

[پیدا کردن الگوریتم برای حل پازل در حالات حل پذیر ۱۰ نمره اضافه دارد]

سربلند باشید.