المپیاد: فیزیک		زمان پاسخگویی: ۳۰۰ دقیقه
سوالات امتحان: نهایی تئوری۱	باشگاه دانش پژوهان جوان	تاریخ آزمون: ۹۳/۶/۱۵
نام :		تعداد مسائل : ۵ مسئله
نام خانوادگی :		سوالات ۵ صفحه در ۳ برگه

تذکر:

۱- مشخصات خود به هیچ وجه روی برگه های پاسخنامه ننویسید.

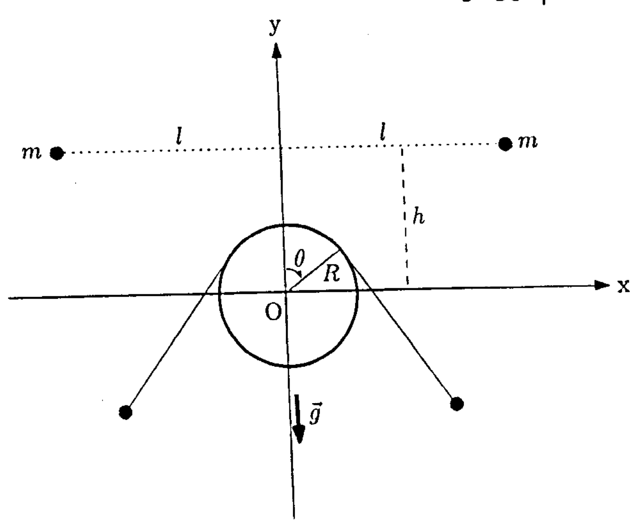
۲- جهت پاسخ گویی ازلاک غلط گیر یا مداد استفاده ننمایید.

۳- پاسخ هر سوال را با خط خوانا در برگه پاسخنامه مخصوص به خود بنویسید.

امتحان نهایی دوره تابستانی المپیاد فیزیک ۹۳

مساله) ۱

مسئله‌ی 1) دو جسم نقطه ای به جرم m به دو سر ریسمانی به طول $2l$ بسته شده‌اند. ریسمان از حالت افقی در ارتفاع h نسبت به محور استوانه‌ی ثابتی به شعاع R رها می‌شود و بر اثر گرانش سقوط می‌کند. محور استوانه بر صفحه شکل عمود است. ریسمان پس از رسیدن به استوانه از دو طرف به طور همزمان و متقارن دور آن می‌پیچد. در یک لحظه نامشخص آخرین نقطه تماس ریسمان با استوانه مطابق شکل در زاویه θ نسبت به امتداد قائم قرار دارد.



a) معادلات پارامتری مسیر ذره سمت راست را به صورت $x(\theta)$ و $y(\theta)$ به دست آورید. (۱ نمره)

b) شکل کیفی مسیر ذره سمت راست را رسم کنید و مختصات نقطه‌ای که در آن مختصه y کمینه است را به دست آورید. (۱ نمره)

c) کشش نخ در نقطه‌ی ذکر شده (نقطه‌ای که مختصه y کمینه است) را به دست آورید. (۱/۵ نمره)

d) معادله‌ای برای محاسبه θ_0، زاویه θ ای که در آن دو ذره با هم برخورد می‌کنند به دست آورید و با یک شکل واضح، روشی ترسیمی برای یافتن θ_0 ارائه کنید. (۱/۵ نمره)

e) محل برخورد دو ذره را بر حسب θ_0 تعیین کنید. (۰/۵ نمره)

f) طول l را چنان تعیین کنید که‌بردار سرعت ذرات قبل از برخورد زاویه ۴۵ درجه نسبت به محور x داشته باشد. (۰/۵ نمره)

g) فرض کنید برخورد ذرات کشسان و شرایط برخورد مطابق بند قبل باشد. معادله مسیر ذره سمت راست را پس از برخورد به صورت $y(x)$ به دست آورید. (۲ نمره)

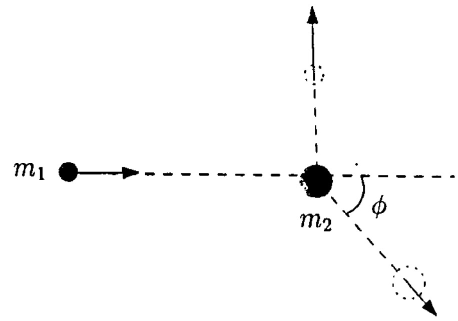
h) فرض کنید در زاویه $\theta = \theta_1$ ریسمان مجددا به حالت کشیده در می آید. معادله‌ای بنویسید که θ_1 را بدهد و تا جای ممکن آن را ساده کنید. (۲ نمره)

ادامه سوالات در صفحه بعد

ادامه سوالات در صفحه بعد

مساله) ۲

مسئله‌ی 2) ذره‌ای به جرم m_1 و انرژی جنبشی T به ذره ساکنی به جرم m_2 برخورد کشسان می‌کند و تحت زاویه قائم نسبت به امتداد اولیه حرکت منحرف می‌شود.



a) با استفاده از روابط غیر نسبیتی انرژی جنبشی ذره پراکنده شده (T_1) و زاویه پس‌زدگی ذره ساکن نسبت به امتداد اولیه حرکت (ϕ) را حساب کنید. چه شرطی باید برقرار باشد تا برخوردی با این شرایط صورت گیرد؟ (۲ نمره)

b) حال روابط نسبیتی به کار ببرید. شرایط برخورد مثل قبل و انرژی نسبیتی ذره فرودی $\mathcal{E}$ است. انرژی نهایی ذره پراکنده شده و زاویه پس زدگی را در این حالت نیز حساب کنید. چه شرطی برقرار باشد تا برخوردی با این شرایط صورت گیرد؟ (۴ نمره)

c) نتیجه نسبیتی قسمت b را با فرض کوچک بودن انرژی جنبشی ذره فرودی (در واحدهای طبیعی $T \ll m_1$) بسط دهید و تصحیح نسبیتی نتایج قسمت a را تا اولین مرتبه نسبت به پارامتر کوچک $\epsilon = T/m_1$ حساب کنید. (۴ نمره)

d) نتایج قسمت b رابرای حالتهای حدی $m_2 \gg \mathcal{E}$ و $\mathcal{E} \gg m_1, m_2$ بررسی کنید. تقریب مرتبه صفرم نسبت به کمیت‌های کوچک کافی است. (۲ نمره)

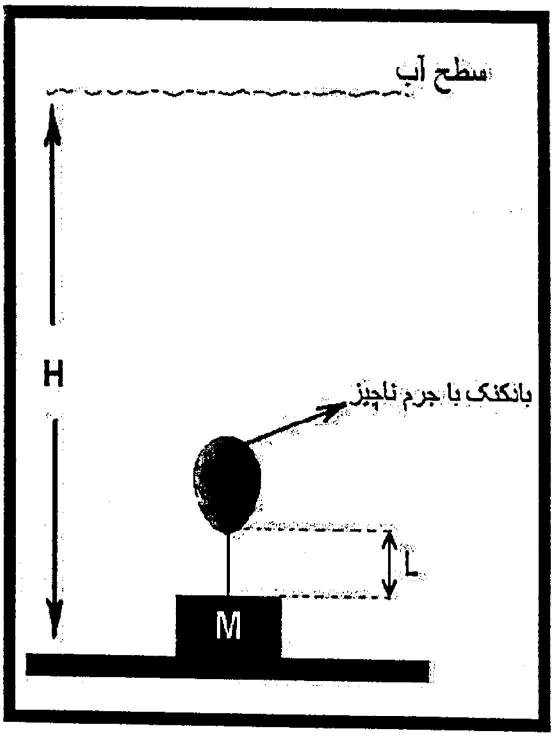
e) پروتونی با جرم سکون $m_1 = 938.3\ \mathrm{MeV}/c^2$ پس از عبور از اختلاف پتانسیل 200.0 MeV به نوترون ساکنی به جرم سکون $m_2 = 939.6\ \mathrm{MeV}/c^2$ برخورد کشسان می‌کند و در زاویه ۹۰ درجه منحرف می‌شود انرژی جنبشی نهایی پروتون را بر حسب MeV و زاویه پس‌زدگی نوترون نسبت به امتداد پروتون فرودی را حساب کنید. (هر الکترون ولت مقدار انرژی است که بار e در عبور از اختلاف پتانسیل یک ولت به دست می‌آورد و $\mathrm{MeV} = 10^6\ \mathrm{eV}$.) (۳ نمره)

طرح از دکتر شیرزاد

ادامه سوالات در صفحه بعد

مساله) ۳

جسمی به جرمِ M و حجمِ ناچیز، مطابقِ شکل در عمقِ H از سطحِ دریا، روی بسترِ دریا قرار دارد. بادکنکی با جرمِ ناچیز، توسطِ یک نخِ بی‌جرم به طولِ L به جسم وصل است. بادکنک حاوی n مول از یک گازِ ایده‌آل است. برای گازهای ایده‌آل، رابطه‌ی $PV = nRT$ برقرار است که در آن P فشار، V حجم، T دما، n تعدادِ مول و R یک ثابت است. برای ساده‌گی، فرض کنید دمای آب در همه‌ی عمق‌ها T_0 و چگالی‌اش همه‌جا ρ_0 است. جنسِ بادکنک خیلی نازک است و نمی‌تواند اختلاف فشاری بین دو سمتش تحمل کند. فرض کنید ابعادِ بادکنک نسبت به سایرِ ابعادِ طولی مسئله ناچیز است، طوری که می‌توان فشارِ آب بر همه‌ی نقاط بادکنک را مساوی فشار آب بر نقطه‌ی میانی بادکنک تقریب زد. فشارِ هوا در سطحِ آب را P_0 بگیرید.



الف) فرض کنید دیواره‌ی بادکنک رسانای خوبِ گرماست، و همیشه دمای گاز درونِ بادکنک با دمای آب برابر است. حجمِ بادکنک را بیابید. (۱)

ب) می‌خواهیم جرمِ M از سطح جدا شود. جرمِ M حداکثر چه قدر باشد تا این اتفاق بیفتد؟ (۲)

جرمی که در قسمتِ ب یافتید را با M_{max} نشان می‌دهیم. همچنین برای سادگی، L را صفر بگیرید.

پ) فرض کنید M کوچک‌تر از M_{max} است. در هر لحظه، فاصله‌ی جرمِ M از سطحِ آب را با x نشان می‌دهیم. مشتقاتِ اول و دومِ x نسبت به زمان را به صورتِ تابعی از x بیابید. (۲)

طرح از دکتر آقامحمدی

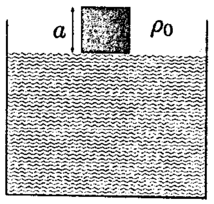
ادامه سوالات در صفحه بعد

مساله) ۴

الف- مطابقِ شکل مکعبی به طولِ a و چگالیِ ρ_0 را درون مایعی با چگالیِ ρ_1 می‌اندازیم، به طوری‌که $\rho_1 = \frac{3}{2}\rho_0$ است. در حالتِ تعادل چه حجمی از جسم خارج از مایع است؟ (۱ نمره)

ب- پس از این‌که دستگاه به تعادل رسید، رویِ این مجموعه مقداری از مایعِ دیگری به چگالیِ ρ_0 می‌ریزیم به طوری‌که دو مایع مخلوط نمی‌شوند و ارتفاعِ مایع دوم رویِ مایعِ اول $\frac{a}{3}$ شود. در این صورت چه حجمی از مکعب خارج از مایعِ بالایی است؟ با ریختنِ مایع جابه‌جاییِ مرکزِ مکعب نسبت به ظرف چه‌قدر است؟ (۲ نمره)

ج- مکعبی به طولِ a و چگالیِ ρ_0 را مطابقِ شکل رویِ مایع تراکم‌پذیری که چگالیِ آن به صورت $\rho = \rho_2 + \alpha x$ است، قرار داده و رها می‌کنیم. $\rho_2 < \rho_0$ است. پس از مدتی جسم به تعادل می‌رسد. سطحِ آزادِ مایع در $x = 0$، محورِ x را در راستایِ قائم و جهتِ مثبتِ آن را رو به پایین بگیرید. در این زمان مرکزِ مکعب در ارتفاعِ $x_2 = \frac{a}{2}$ از سطحِ آزادِ مایع است. ضریبِ α را به دست آورید.(۲ نمره)



طرح از دکتر آقامحمدی

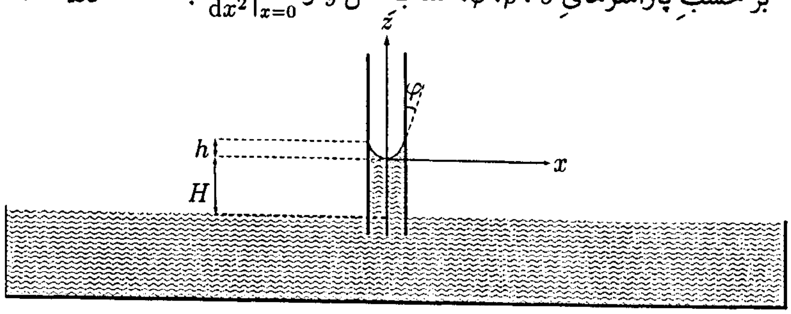
ادامه سوالات در صفحه بعد

مساله) ۵

مطابقِ شکل بینِ دو صفحه‌یِ تختِ خیلی بزرگِ موازی که فاصله‌یِ آن‌ها $2d$ است از مایعی با چگالی‌یِ ρ، و کششِ سطحی‌یِ σ پُر شده است. چسبندگی‌یِ مایع به صفحه‌ها را γ بگیرید. مایعِ مجاورِ صفحه‌ها کمی بالا می‌رود.

الف- زاویه‌ای که سطحِ مایع با هر صفحه می‌سازد، φ، را بر حسبِ γ و σ به دست آورید. (۱ نمره)

ب- ارتفاعِ h یعنی فاصله‌یِ بینِ بالاترین و پایین‌ترین نقطه‌یِ مایع بینِ دو صفحه را بر حسبِ پارامترهایِ σ، ρ، φ، شتاب ثقل g و $\left.\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$ به دست آورید. (۴ نمره)



راهنمایی: شعاعِ انحنایِ خمِ $z(x)$، $R = \frac{(1+z'^2)^{3/2}}{z''}$ است.

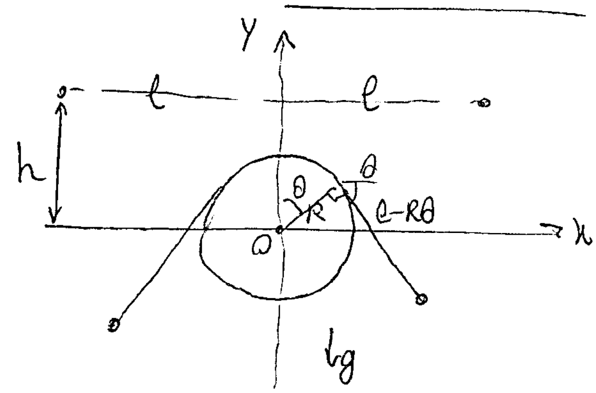
ج- حالا فرض کنید مجموعه‌یِ دو صفحه‌یِ موازی درونِ ظرفِ بزرگی که عرضِ آن از d خیلی بزرگ‌تر است و پر از مایع است، فرو رفته و مایع بینِ دو صفحه کمی بالا آمده است. H فاصله‌یِ مبدا از سطحِ آزادِ مایعِ درونِ ظرف است (آنجا که مایع افقی است.) قانونِ نیوتن برایِ بخشی از مایع که بینِ دو صفحه بالا آمده است را بنویسید. از جرمِ بخشی از مایع که بالایِ محورِ x است چشم‌پوشی کنید.

رابطه‌ای بینِ $\left.\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$، H، ρ، و همین‌طور شتابِ ثقل g به دست آورید. نهایتاً h را بر حسبِ σ, ρ, g, d و φ به دست آورید. (۵ نمره)

طرح از دکتر آقامحمدی

« موفق باشید».

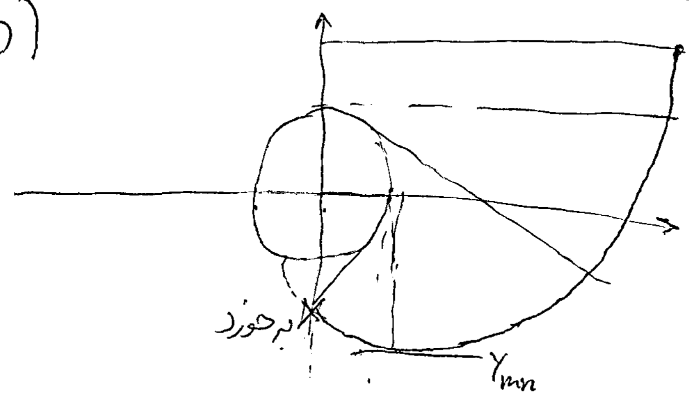
مسئله ① فاینال ۹۹



a)

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\sin\theta + (\ell-R\theta)\cos\theta \\ R\cos\theta - (\ell-R\theta)\sin\theta \end{pmatrix}}$$

b)



$$\frac{dy}{d\theta} = 0 \Rightarrow -R\sin\theta - (\ell-R\theta)\cos\theta + R\sin\theta = 0$$

$$\xrightarrow{\ell-R\theta\neq 0} \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{نقطه کمینه}} = \boxed{\begin{pmatrix} R \\ -(\ell-\frac{\pi}{2}R) \end{pmatrix}}$$

c)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{\theta}(\ell-R\theta)\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -(\ell-R\theta)\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}\ddot{\theta} + R\dot{\theta}^2\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - (\ell-R\theta)\dot{\theta}^2\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}_{\text{نقطه کمینه}} = \begin{pmatrix} -(\ell-R\theta)\ddot{\theta} + R\dot{\theta}^2 \\ (\ell-\frac{\pi}{2}R)\dot{\theta}^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\theta=\pi/2} \Rightarrow \ddot{Y}_m = (\ell-\frac{\pi}{2}R)\dot{\theta}_m^2$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\ell-R\theta)^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow v_m^2 = (\ell-\frac{\pi}{2}R)^2\dot{\theta}_m^2$$

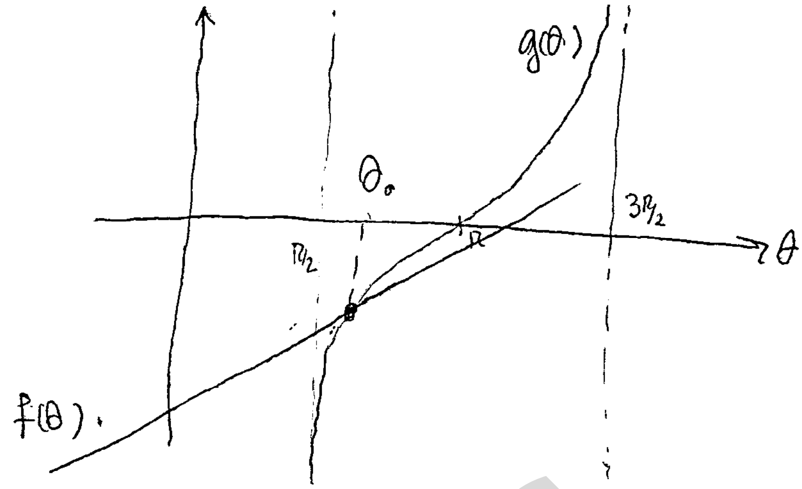
پایستگی انرژی : $mg(h - Y_m) = \frac{1}{2}mv_m^2 \Rightarrow v_m^2 = 2g\left(h + (\ell-\frac{\pi}{2}R)\right) = (\ell-\frac{\pi}{2}R)^2\dot{\theta}_m^2$

$$\Rightarrow \ddot{Y}_m = (\ell-\frac{\pi}{2}R)\dot{\theta}_m^2 = 2g\left(1 + \frac{h}{\ell-\frac{\pi}{2}R}\right)$$

$$m\ddot{Y}_m = T_m - mg \Rightarrow \boxed{T_m = mg\left(3 + \frac{2h}{\ell-\frac{\pi}{2}R}\right)}$$

d) $x(\theta_0) = 0 \Rightarrow \sin\theta_0 + \left(\frac{\ell}{R} - \theta_0\right)\cos\theta_0 = 0 \Rightarrow \boxed{\tan\theta_0 = \theta_0 - \ell/R}$

روش ترسیمی:
$$\begin{cases} f(\theta) = \theta - \ell/R \\ g(\theta) = \tan\theta \qquad \pi/2 < \theta < \pi \end{cases}$$



e) $y(\theta_0) = R\cos\theta_0 - (\ell - R\theta_0)\sin\theta_0 = R\cos\theta_0 + R\tan\theta_0 \sin\theta_0 = \boxed{\dfrac{R}{\cos\theta_0}} = R\sqrt{1+(\theta_0 - \ell/R)^2}$

f) $\theta_0 = 3\pi/4 \Rightarrow 3\pi/4 - \ell/R = \tan 3\pi/4 = -1 \Rightarrow \ell/R = 3\pi/4 + 1 \Rightarrow \boxed{\ell = (1+\frac{3\pi}{4})R}$

g) پس از برخورد: $\begin{cases} v'_y = v_y \\ v'_x = -v_x \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = -(\ell - \tfrac{3\pi}{4}R)\begin{pmatrix} \sin\frac{3\pi}{4} \\ \cos\frac{3\pi}{4} \end{pmatrix}\dot\theta = -R\begin{pmatrix} \sqrt2/2 \\ -\sqrt2/2 \end{pmatrix}\dot\theta = -\tfrac{\sqrt2}{2}R\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\dot\theta$$

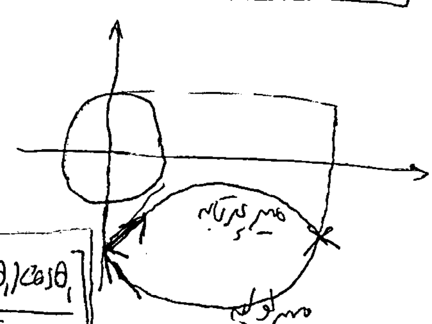
$$\Rightarrow v^2 = v_x^2 + v_y^2 = R^2\dot\theta^2$$

$$\tfrac12 m v^2 = mg(h-y) \Rightarrow R^2\dot\theta^2 = 2g(h+\sqrt2 R) \Rightarrow R\dot\theta = \sqrt{2g(h+\sqrt2 R)}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt2}{2}\sqrt{2g(h+\sqrt2R)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v'_x = \sqrt{g(h+\sqrt2R)} \\ v'_y = \sqrt{g(h+\sqrt2R)} \end{cases}$$

مسیر بعد از برخورد پرتابی است: $\begin{cases} x = v'_x t \\ y = v'_y t - \frac12 g t^2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = x - \dfrac{gx^2}{2v'^2_x} \Rightarrow \boxed{y(x) = x - \dfrac{x^2}{2(h+\sqrt2R)}}$

h) حرکت تا جایی پرتابی است که مسیر پرتابه مسیر اولیه را قطع کند



$$\Rightarrow \boxed{R\cos\theta_1 - (\ell - R\theta_1)\sin\theta_1 = \left[R\sin\theta_1 + (\ell - R\theta_1)\cos\theta_1\right] \times \left[1 - \frac{R\sin\theta_1 + (\ell-R\theta_1)\cos\theta_1}{2(h+\sqrt2R)}\right]}$$

جاگذاری x و y برای مسیر در معادله پرتابه

مسئله 2 فاطمیان

a) $p=\sqrt{2mT}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2m_1T} = \sqrt{2m_2T_2}\,\cos\varphi \\ \sqrt{2m_1T_1} = \sqrt{2m_2T_2}\,\sin\varphi \\ T = T_1+T_2 \end{cases} \xrightarrow[\text{مجذور}]{\text{جمع}} 2m_1(T+T_1) = 2m_2T_2 \Rightarrow T_2=\frac{m_1}{m_2}(T+T_1)$$

$$\Rightarrow T\left(1-\frac{m_1}{m_2}\right) = T_1\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) \Rightarrow \boxed{T_1=\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}T} \qquad T_1>0 \xrightarrow[\text{وجود}]{\text{شرط}} \boxed{m_2>m_1}$$

$$\boxed{\tan\varphi=\sqrt{\frac{T_1}{T}}=\sqrt{\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}}}$$

---

b)

$$\begin{cases} p = p_2\cos\varphi \\ p_1 = p_2\sin\varphi \\ \mathcal{E}+m_2c^2 = \mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_2^2=p^2+p_1^2 \Rightarrow \mathcal{E}_2^2-(m_2c^2)^2 = \mathcal{E}^2+\mathcal{E}_1^2-2(m_1c^2)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_2^2 = \mathcal{E}^2+\mathcal{E}_1^2+(m_2c^2)^2+2\mathcal{E}(m_2c^2)-2\mathcal{E}_1(m_2c^2)-2\mathcal{E}\mathcal{E}_1$$

$$\Rightarrow (m_1c^2)^2 = \mathcal{E}_1(m_2c^2)+\mathcal{E}\mathcal{E}_1-\mathcal{E}(m_2c^2) \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_1=\frac{(m_1c^2)^2+(m_2c^2)\,\mathcal{E}}{\mathcal{E}+m_2c^2}}$$

$$\tan\varphi=\frac{p_1}{p}=\sqrt{\frac{\mathcal{E}_1^2-(m_1c^2)^2}{\mathcal{E}^2-(m_1c^2)^2}}$$

$$\mathcal{E}_1^2-(m_1c^2)^2=\frac{[(m_1c^2)^2+(m_2c^2)\,\mathcal{E}]^2-[m_1c^2\,\mathcal{E}+(m_1c^2)(m_2c^2)]^2}{[\mathcal{E}+m_2c^2]^2}=$$

$$=\frac{(m_1c^2)^2\left[(m_1c^2)^2-(m_2c^2)^2\right]+\mathcal{E}^2\left[(m_2c^2)^2-(m_1c^2)^2\right]}{[\mathcal{E}+m_2c^2]^2}=\frac{\mathcal{E}^2-(m_1c^2)^2}{(\mathcal{E}+m_2c^2)^2}\left((m_2c^2)^2-(m_1c^2)^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\varphi=\frac{\sqrt{(m_2c^2)^2-(m_1c^2)^2}}{\mathcal{E}+m_2c^2}} \qquad \tan\varphi \;\text{وجود دارد}\; \xrightarrow[\text{بخواهد}]{\text{شرط}} \boxed{m_2>m_1}$$

c) $T \ll m_1c^2$ $\qquad \epsilon := \frac{T}{m_1c^2} \Rightarrow T = \epsilon m_1c^2 = \mathcal{E} - m_1c^2 \Rightarrow \mathcal{E} = m_1c^2(1+\epsilon)$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{(m_1c^2)^2 + (m_2c^2)\mathcal{E}}{\mathcal{E} + (m_2c^2)} = m_1c^2 \frac{m_1c^2 + (1+\epsilon)m_2c^2}{m_2c^2 + m_1c^2 + \epsilon m_1c^2} = m_1c^2 \frac{1+\epsilon\frac{m_2}{m_1+m_2}}{1+\epsilon\frac{m_1}{m_1+m_2}}$$

$$\cancel{\mathcal{E}_1 = m_1c^2\left[1+\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\epsilon\right]} \Rightarrow \mathcal{E}_1 = m_1c^2\left(1+\epsilon\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\left(1-\epsilon\frac{m_1}{m_1+m_2}+\epsilon^2\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\right)$$

$$\Rightarrow T_1 = \mathcal{E}_1 - m_1c^2 = \boxed{\underbrace{m_1c^2\,\epsilon\,\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}}_{\text{غیرنسبی}} + \underbrace{m_1c^2\,\epsilon^2\,\frac{m_1(m_1-m_2)}{(m_1+m_2)^2}}_{\text{تصحیح نسبی}}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{(m_2c^2)^2-(m_1c^2)^2}}{\mathcal{E}+m_2c^2} = \frac{\sqrt{(m_2c^2)^2-(m_1c^2)^2}}{m_1c^2+m_2c^2+\epsilon m_1c^2} = \sqrt{\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}} \times \frac{1}{1+\epsilon\frac{m_1}{m_1+m_2}} = \boxed{\sqrt{\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}}\left(1-\epsilon\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)}$$

---

d) $m_2c^2 \gg \mathcal{E} > m_1c^2$:

$$\mathcal{E}_1 = \left\{\frac{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + \frac{\mathcal{E}}{m_2c^2}}{\frac{\mathcal{E}}{m_2c^2}+1}\right\}(m_2c^2) = \overset{\text{مرتبه اول آ کلاد}}{\frac{\mathcal{E}}{m_2c^2}} \times m_2c^2 = \boxed{\mathcal{E}}$$

$$\tan\varphi = \frac{m_2c^2\sqrt{1-\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2}}{m_2c^2\left(1+\mathcal{E}/m_2c^2\right)} \overset{\text{مرتبه اول}}{=} 1 \Rightarrow \boxed{\varphi = 45^\circ}$$

$\mathcal{E} \gg m_1c^2, m_2c^2$:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\left\{\frac{\left(\frac{m_1c^2}{\mathcal{E}}\right)^2 + \frac{m_2c^2}{\mathcal{E}}}{1+\frac{m_2c^2}{\mathcal{E}}}\right\} = \mathcal{E} \times \frac{m_2c^2}{\mathcal{E}} = \boxed{m_2c^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{\left(\frac{m_2c^2}{\mathcal{E}}\right)^2 - \left(\frac{m_1c^2}{\mathcal{E}}\right)^2}}{1+\frac{m_2c^2}{\mathcal{E}}} \overset{\text{مرتبه صفر}}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\varphi = 0^\circ}$$

---

e) $\mathcal{E} = m_1c^2 + 200\ \text{MeV} = 1138.3\ \text{MeV}$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_1 = \frac{(938.3)^2 + 1138.3 \times 939.6}{1138.3 + 939.6}\ \text{MeV} = 938.4\ \text{MeV} \Rightarrow T_1 = \mathcal{E}_1 - 938.3\ \text{MeV} = \underline{0.125\ \text{MeV}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{939.6^2 - 938.3^2}}{1138.3 + 939.6} = 0.0238 \Rightarrow \varphi \approx \boxed{1.362^\circ}$$

مسئله ③ تابستان اول :

الف) $P = P_0 + \rho g (H-L)$ ، $PV = nRT_0$ $\Rightarrow \boxed{V = \dfrac{nRT_0}{P_0 + \rho_0 g (H-L)}}$

ب) $\rho_0 g V = Mg \Rightarrow M_{max} = \rho_0 V = \boxed{\dfrac{nR\rho_0 T_0}{P_0 + \rho_0 g (H-L)}}$

ج) $M\ddot{x} = Mg - \rho_0 g V_{(x)} \Rightarrow \ddot{x} = g - \dfrac{\rho_0}{M} V_{(x)} g$

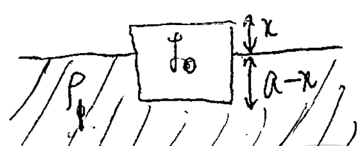
$P(x) = P_0 + \rho_0 g x \Rightarrow V(x) = \dfrac{nRT_0}{P_0 + \rho_0 g x}$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = g - \dfrac{\rho_0 g}{M} \cdot \dfrac{nRT_0}{P_0 + \rho_0 g x}}$ $\qquad \ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}^2}{2dx} \Rightarrow \dot{x}^2(x) = \int_H^x 2\ddot{x}\, dx$

$\Rightarrow \dot{x}^2 = 2g(x-H) - \dfrac{nRT_0}{M} \ln \dfrac{P_0 + \rho_0 g x}{P_0 + \rho_0 g H}$

$\Rightarrow \boxed{\dot{x} = -\sqrt{\dfrac{nRT_0}{M} \ln\left(\dfrac{P_0 + \rho_0 g H}{P_0 + \rho_0 g x}\right) - 2g(H-x)}}$

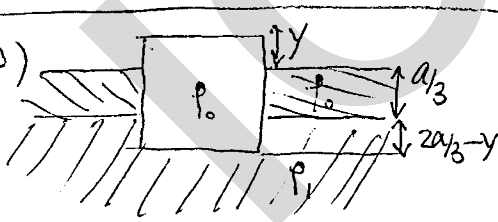
مسئله ④ تابستان اول :

الف) 

$a^2 \rho_1 g (a-x) = \rho_0 g a^3$

$\Rightarrow \dfrac{a-x}{a} = \dfrac{\rho_0}{\rho_1} = 2/3 \Rightarrow x/a = 1/3 \Rightarrow x = a/3$

$\Rightarrow V_1 = a^2 x = \boxed{a^3/3}$

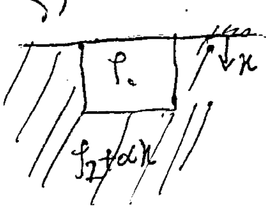
ب) 

$\rho_1 g a^2 (2a/3 - y) + \rho_0 g a^2 (a/3) = \rho_0 g a^3$

$\Rightarrow 2/3\, a \rho_0 = (2a/3 - y)\rho_1 \Rightarrow 2a/3 - y = 2/3\, a \times 2/3 = 4/9\, a$

$\Rightarrow y = 2a/3 - 4a/9 = 2/9\, a \Rightarrow \boxed{V_2 = 2/9\, a^3}$

$\Rightarrow 2a/3 - y = 4a/9 \Rightarrow \Delta y_{cm} = (a-x) - (2a/3 - y) = 2/3\, a - 4a/9 = \boxed{2/9\, a^3}$ $(=y)$

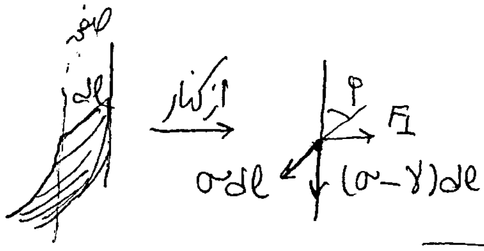
ج) 

$dP = \rho g dx = (\rho_2 + \alpha x) g\, dx \Rightarrow \Delta P_{,\text{پایین مکعب}} = \int_0^a dP = \rho_2 g a + \alpha g\, a^2/2$

$\Delta P a^2 = \rho_0 g a^3 \Rightarrow \rho_0 = \rho_2 + \dfrac{\alpha a}{2}$ $\Rightarrow \boxed{\alpha = \dfrac{2(\rho_0 - \rho_2)}{a}}$

مسئله ⑤ تانسیل ورق :

الف) به یک جزء طولی از مایع (مساحت و حجم صفر) در سطح آزاد نگاه می‌کنیم :



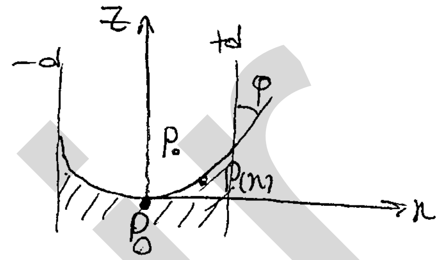
$$\Sigma F_{\parallel}=0 \Rightarrow \sigma dl\cos\varphi+(\sigma-\gamma)dl=0 \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\gamma-\sigma}{\sigma} \Rightarrow \boxed{\varphi=\cos^{-1}\left(\frac{\gamma}{\sigma}-1\right)}$$

ب)

$$P_{(x)}=P_0-\rho g z \qquad z'(d)=\cot\varphi$$

$$P_0-P_0=\frac{\sigma}{R_0}=\sigma z_0''$$

$$P_0-P_{(x)}=\sigma\frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}}=\sigma z_0''+\rho g z$$



$$\Rightarrow \frac{dz'^2}{(1+z'^2)^{3/2}}=2z_0''dz+\frac{2\rho g}{\sigma}z\,dz \Rightarrow \frac{-2}{\sqrt{1+z'^2}}\Big|_{0=x}^{d}=2z_0''h+\frac{\rho g}{\sigma}h^2$$

$$\cancel{\Rightarrow 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}}\right)=2z_0''d+\frac{\rho g}{\sigma}d^2 \Rightarrow 1-\sin\varphi=z_0''d+\frac{\rho g}{2\sigma}d^2}$$

$$\Rightarrow 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}}\right)=2z_0''h+\frac{\rho g}{\sigma}h^2 \Rightarrow 1-\sin\varphi=z_0''h+\frac{\rho g}{2\sigma}h^2 \Rightarrow h^2+\frac{2\sigma z_0''}{\rho g}h-\frac{2\sigma}{\rho g}(1-\sin\varphi)=0$$

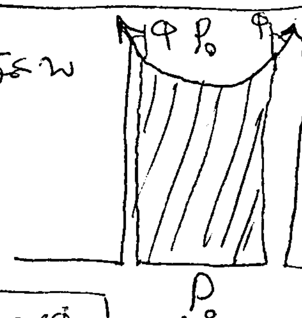
$$\xRightarrow{h>0} \boxed{h=\frac{-\sigma z_0''}{\rho g}+\sqrt{\left(\frac{\sigma z_0''}{\rho g}\right)^2+\frac{2\sigma}{\rho g}(1-\sin\varphi)}}$$

ج)

$$2dwH\rho g=2w\sigma\cos\varphi$$

$$\Rightarrow dH\rho g=\sigma\cos\varphi \Rightarrow H=\frac{\sigma\cos\varphi}{\rho g d}$$

w : عمق صفحه



$$P_0=P_0-\rho g H \Rightarrow P_0-P_0=\rho g H=\sigma z_0''=\frac{\sigma\cos\varphi}{d} \Rightarrow \boxed{z_0''=\frac{\cos\varphi}{d}}$$

$$\Rightarrow h=\frac{-\sigma\cos\varphi}{\rho g d}+\sqrt{\left(\frac{\sigma\cos\varphi}{\rho g d}\right)^2+\frac{2\sigma}{\rho g}(1-\sin\varphi)} = \boxed{\frac{\sigma\cos\varphi}{\rho g d}\left\{\sqrt{1+\frac{2\rho g d^2}{\sigma\cos^2\varphi}(1-\sin\varphi)}-1\right\}}$$