جزوه درس :

«آمار و کاربرد آن در بیمه»

رشته :

مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص

استاد :

جناب آقای عبدالحسینی

رشته تحصیلی: **کارشناسی مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص**

نام دانشگاه: **علمی کاربردی امور مالیاتی استان قم**

تهیه و تنظیم : دانشجو **محمد یونس امیدی**

نیمسال تحصیلی ۹۴۱

* آمار : علمی است که داده ها را دسته بندی، استنباط و تحلیل می نماید. در کل آمار به داده ها و اطلاعات مفهوم می بخشد.

* انواع آمار :

۱ـ توصیفی : وضعیت فعلی جامعه را توصیف می کند.

۲ـ استنباطی : با استفاده از اطلاعات گذشته، اقدام به پیش بینی و یا استنباط برخی فرضها می نماید.
مانند بورس ـ آب و هوا

ـ مفاهیم اولیه آمار :

* جامعه ← دسته ای از اشیاء و یا افراد که حداقل در یک ویژگی با هم مشترک هستند.

* نمونه ← هر زیر مجموعه از جامعه را گویند.

* متغیر ← ویژگی که از یک عنصر به عنصر دیگر تغییر می کند.

بلند	عالی	طولانی	سنگین
متوسط	متوسط	نیمه کوتاه	نیمه سنگین
کوتاه	ضعیف	کوتاه	سبک

* انواع متغیر :

① کمی : قابل اندازه گیری
← ترتیبی (رتبه ای) : بزرگتر و کوچکتری معنی دارد قد ـ نمره ـ مسافت ـ وزن
← فاصله ای : قابل اندازه گیری ـ واحد اندازه گیری ـ بزرگتر و کوچکتری معنی دارد.
وزن (کیلوگرم) ـ مسافت (کیلومتر) ـ قد (سانتی متر)
← نسبی : دارای صفر واقعی ـ نسبتها واقعی هستند

② کیفی : غیر قابل اندازه گیری
← اسمی : نه قابل اندازه گیری می باشد ـ بزرگی و کوچکی معنی ندارد.
رنگ چشم ـ گروه خونی ـ نژاد
← رتبه ای

ـ نکته : ضعیف ترین مقیاس اندازه گیری اسمی می باشد.

* زیگما Σ (Sumation) : جمع متغیرها را گویند:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

دانشگاه علمی کاربردی امور مالیاتی قم
رشته مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص
دانشجو : محمد یونس امیدی

* خواص زیگما :

(۱) $\sum_{i=1}^{n} bx_i = b\sum_{i=1}^{n} x_i$

(۲) $\sum_{i=1}^{n} a = na$

(۳) $\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

* دسته بندی متغیرها :

(۱) محدود ← شمارش پذیر : مانند مجموعه یک سری اعداد مشخص
← شمارش ناپذیر

(۲) نامحدود ← شمارش پذیر (گسسته) : مانند مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$
← شمارش ناپذیر (پیوسته) : مانند وزن

* پارامترهای مرکزی :

(۱) میانگین حسابی : جمع مشاهدات تقسیم بر تعداد آنها وقتی که داده ها تکراری نباشد.

$$\bar{x} = \mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

مثال : نمره مسئولیت پذیری پنج مدیر به شرح $x_i = 10, 15, 14, 8, 13$ می باشد. میانگین حسابی این مشاهدات را بدست آورید.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{10+15+14+8+13}{5} = 12$$

(۲) میانگین وزنی : اگر مشاهدات دارای تکرار باشد، میانگین وزنی بجای میانگین حسابی استفاده می شود.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
w_i	w_1	w_2	...	w_n

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

دانشگاه علمی کاربردی امور مالیاتی قم
رشته مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص
دانشجو : محمد یونس امیدی

مثال : محاسبه میانگین وزنی اعداد روبرو به شرح زیر : ۷۵، ۸۰، ۸۰، ۷۵، ۸۰، ۶۰، ۷۵، ۷۵

x_i	۶۰	۷۵	۸۰
w_i	۱	۴	۳

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{3} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{3} w_i}=\frac{(60\times 1)+(75\times 4)+(80\times 3)}{1+4+3}=\frac{60+300+240}{8}=75$$

ـ خواص میانگین حسابی :

① $$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})=0$$

② $$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \longrightarrow \bar{X}$$
$$x_1+a, x_2+a, x_3+a, \dots, x_n+a \longrightarrow \bar{X}+a$$

③ $$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \longrightarrow \bar{X}$$
$$bx_1, bx_2, bx_3, \dots, bx_n \longrightarrow b\bar{X}$$

④ $$x, y, z=x+y \Longrightarrow \bar{z}=\bar{x}+\bar{y}$$

۳) میانگین هندسی : میانگین اندازه‌های نسبی مانند نسبتها، درصدها، نرخ‌های رشد و شاخص‌ها بصورت میانگین هندسی بدست می‌آید.

$x_1 \to$ نسبت دوم به اول $x_2 \to$ نسبت سوم به دوم   ... $x_n \to$ نسبت $n+1$ به n ام

$$\mu_G=\sqrt[n]{x_1\times x_2\times x_3\times \dots \times x_n}$$

مثال : سود شرکتی طی پنج سال به قرار زیر بوده است . متوسط رشد سود سالانه چند درصد بوده است ؟

سال	۱	۲	۳	۴	۵
سود (میلیون)	۱۰۰	۱۲۰	۱۳۰	۱۵۰	۲۰۰

$$x_1=\frac{120}{100}=1.2 \qquad x_2=\frac{130}{120}=1.08$$

$$x_3=\frac{150}{130}=1.154 \qquad x_4=\frac{200}{150}=1.333$$

$$\mu_G=\sqrt[4]{(1.2)\times(1.08)\times(1.154)\times(1.333)}=1.189$$

۴) میانگین هارمونیک : اگر مشاهدات از مقیاس ترکیبی مانند کیلومتر در ساعت ، دور در دقیقه ، نوسان و ... برخوردار باشند از میانگین هارمونیک استفاده می شود.

در این میانگین ، مقیاس دوم بحث زمان است.

برای محاسبه میانگین هارمونیک ، میانگین معکوس مشاهدات را بلعکس می کنیم.

$$x_1 , x_2 , x_3 , \dots , x_n \longrightarrow \frac{1}{x_1} , \frac{1}{x_2} , \frac{1}{x_3} , \dots , \frac{1}{x_n}$$

$$\mu_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}{n} \Longrightarrow \mu_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

* رابطه سه میانگین هارمونیک ، هندسی و حسابی :

میانگین هارمونیک ≤ میانگین هندسی ≤ میانگین حسابی

$$\mu_A \geq \mu_G \geq \mu_H$$

۵) شاخص مُد (Mode) : توزیع آماری یا مشاهده‌ای که بیشترین تکرار را داشته باشد.
(الزاما همیشه یک عدد نیست)

۷۰، ۷۵، ۶۰، ۷۵، ۷۰، ۹۵، ۸۰، ۷۵، ۷۰، ۶۰ → M = ۷۰ , ۷۵

۶) شاخص چارک : مقادیری هستند که مشاهدات را به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنند.

i=1 ..... %۲۵ ..... %۵۰ ..... %۷۵ ..... n

Q_1 ..... Q_2 ..... Q_3

Q_1 → چارک اول

Q_2 → چارک دوم

Q_3 → چارک سوم

%۲۵ > Q_1 > ۷۵%

%۵۰ > Q_2 > ۵۰%

%۷۵ > Q_3 > ۲۵%

* مراحل محاسبهٔ چارک ها :

① داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم

② داده های مرتب شده را از یک تا n کدگذاری می کنیم

③ محل چارک a ام (۱و۲و۳) بوسیلهٔ رابطهٔ زیر مشخص می شود :

$$C_{Q_a} = \frac{an}{4} + \frac{1}{2} = \frac{an+2}{4}$$

④ مقدار چارک مشخص می شود .

مثال : مقادیر چارک های اول و دوم و سوم برای مشاهدات زیر را بدست آورید .

۸۵ , ۱۴۰ , ۱۲۰ , ۸۰ , ۹۰ , ۱۰۰

$$\begin{array}{cccccc} ۸۰ , & ۸۵ , & ۹۰ , & ۱۰۰ , & ۱۲۰ , & ۱۴۰ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \end{array}$$

$$C_{Q_1} = \frac{(1\times6)+2}{4} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow Q_1 = 85$$

$$C_{Q_2} = \frac{(2\times6)+2}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \Rightarrow Q_2 = 95$$

$$C_{Q_3} = \frac{(3\times6)+2}{4} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow Q_3 = 120$$

* پارامترهای پراکندگی :

① دامنهٔ تغییرات R : بزرگترین داده منهای کوچکترین داده را دامنهٔ تغییرات گویند .

$$\boxed{R = x_{max} - x_{min}}$$

مثال : ۵ , ۷ , ۹ , ۸ , ۳ , ۲ , ۱۰ , ۱۲ , ۱ , ۵ , ۶ , ۶

$$R = 12 - 1 = 11$$

دانشگاه علمی کاربردی امور مالیاتی قم
رشته مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص
دانشجو : محمد یونس امیدی

② دامنه میان چارکی IQR : چارک سوم منهای چارک اول را دامنه میان چارکی می‌گویند.

$$\boxed{IQR = Q_3 - Q_1}$$

مثال : ۵۵ , ۶۰ , ۶۵ , ۷۰ , ۷۰ , ۷۵ , ۸۶ , ۹۳ , ۹۵ , ۱۲۰

$$CQ_1 = \frac{an+2}{4} = \frac{n+2}{4} = \frac{10+2}{4} = 3 \Rightarrow Q_1 = 65$$

$$CQ_3 = \frac{an+2}{4} = \frac{3n+2}{4} = \frac{30+2}{4} = 8 \Rightarrow Q_3 = 93$$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 93 - 65 = 28$$

$R = 120 - 55 = 65$ ← تفاوت دامنه این داده‌ها با دامنه میان چارکی آنها بخاطر این است که تاثیر داده‌های پرت بوده است.

③ نیمه میان چارکی : (انحراف چارکی) ← $\frac{1}{2}$ از دامنه میان چارکی را نیمه میان چارکی گویند.

$$\boxed{SIQR = \frac{Q_3 - Q_1}{2}}$$

④ واریانس : شاخص اندازه‌گیری تغییرات براساس میانگین را واریانس گویند.

σ^2 : جامعه S^2 : نمونه

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2}{N}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$
واریانس نمونه برآوردگر واریانس جامعه می‌باشد.

دانشگاه علمی کاربردی امور مالیاتی قم
رشته مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص
دانشجو : محمد یونس امیدی

مثال : واریانس داده‌های زیر را محاسبه کنید :

۱۵ ، ۲۰ ، ۲۵ ، ۲۷ ، ۱۳ ، ۲۰

$$\bar{X} = \mu_x = \frac{15+20+25+27+13+20}{6} = 20$$

$$\sum_{i=1}^{6} (x_i - 20)^2 = (15-20)^2 + (20-20)^2 + (25-20)^2 + (27-20)^2 + (13-20)^2 + (20-20)^2$$
$$= 25 + 0 + 25 + 49 + 49 + 0 = 148$$

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i - 20)^2}{6} = \frac{148}{6} = 24/66$$

نکته : واحد اندازه‌گیری متغیر x در واریانس ، مجذور واحد اصلی می‌باشد .

۵) انحراف معیار : جذر واریانس را انحراف معیار می‌گویند .

$$\delta = \sqrt{\delta^2}$$

مثال : انحراف معیار داده‌های مثال قبل چقدر است ؟ $\sqrt{24/66} = 4/96$

مثال : انحراف معیار سود یک شرکت در سال ۹۳ مقدار ۲/۳۶ شده است . واریانس سود شرکت چقدر می‌باشد ؟

واریانس = (انحراف معیار)^2 = $(2/36)^2$

ـ خواص واریانس :

۱) اگر به مشاهدات مقدار ثابت a اضافه گردد ، واریانس مشاهدات جدید‌ها واریانس مشاهدات اصلی است و تغییری نمی‌کند :

$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \longrightarrow \delta_x^2 \\ x_1+a, x_2+a, x_3+a, \ldots, x_n+a \longrightarrow \delta_x^2 \end{cases}$$

۲) اگر مشاهدات در مقدار ثابت b ضرب شوند ، واریانس مشاهدات جدید ، b^2 برابر مشاهدات اصلی می‌گردد یا واریانس مشاهدات جدید معادل واریانس مشاهدات اصلی x b^2 است :

$$\begin{cases} x_1, x_2, \ldots, x_n \longrightarrow \delta_x^2 \\ bx_1, bx_2, \ldots, bx_n \longrightarrow b^2\delta_x^2 \end{cases}$$

دانشگاه علمی کاربردی امور مالیاتی قم
رشته مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص
دانشجو : محمد یونس امیدی

⑥ ضریب تغییرات (ضریب پراکندگی) : C.V

$$C.V = \frac{S_x}{\mu_x} = \frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}$$

- برای مقایسه پراکندگی دو جامعه که دارای واحد اندازه گیری یکسان نیستند و یا اگر دارای واحد اندازه گیری یکسان هستند ولی اندازه مشاهدات در آنها بزرگ می باشد از ضریب تغییرات استفاده می کنیم.

- نکته : همگن یعنی مشاهدات، پراکندگی کمتری دارد.

مثال : پژوهشگری می خواهد بررسی کند متوسط سود شرکتهای کدامیک از دو صنعت x و y متجانس تر است؟ بدین جهت متوسط سود شرکتهای دو صنعت را طی چهار سال گذشته بدست آورده است. سود کدام شرکت همگن تر بوده است؟

$X_i = 19, 12, 17, 12$ $\qquad$ $Y_i = 60, 55, 80, 85$

$$\mu_x = \frac{19+12+17+12}{4} = 15 \qquad \mu_y = \frac{60+55+80+85}{4} = 70$$

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i-15)^2}{4} = \frac{(19-15)^2+(12-15)^2+(17-15)^2+(12-15)^2}{4} = 9.5$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}(y_i-70)^2}{4} = \frac{(60-70)^2+(55-70)^2+(80-70)^2+(85-70)^2}{4} = 162.5$$

$$S_x = \sqrt{9.5} \qquad S_y = \sqrt{162.5}$$

$$C.V_x = \frac{\sqrt{9.5}}{15} = 0.205$$

$$C.V_y = \frac{\sqrt{162.5}}{70} = 0.182$$

هر متغیری که دارای CV کمتری باشد مشاهداتش از پراکندگی کمتری برخوردار است و به اصطلاح همگن تر است، پس CV_y همگن تر است.

دانشگاه علمی کاربردی امور مالیاتی قم
رشته مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص
دانشجو : محمد یونس امیدی

* جدول توزیع فراوانی :

برای درک بهتر و بیشتر داده‌های خام ضروری است آنها را سازمان دهی و خلاصه نماییم. خلاصه کردن خصوصیات عمده داده‌ها، انبوه مشاهدات را به شکل قابل تفسیری در می‌آورد. در آمار، سازمان‌دهی مشاهدات را توزیع فراوانی می‌گوییم.

توزیع فراوانی جدولی است خلاصه شده از داده‌های جمع‌آوری شده جامعه آماری.

- فراوانی مطلق (f_i) ← تعداد مشاهدات (تکرار) هر داده یا دسته را گویند.
- فراوانی تجمعی (F_i) ← فراوانی مطلق هر دسته بعلاوه‌ی فراوانی مطلق دسته‌های قبل‌تر.
- فراوانی نسبی (f_i/n) ← فراوانی مطلق هر دسته تقسیم بر تعداد کل داده‌ها.

نکته : فراوانی تجمعی دسته اول، همان فراوانی مطلق آن دسته است.

نکته : به عبارت دیگر فراوانی تجمعی هر دسته همان جمع فراوانی مطلق آن دسته با فراوانی تجمعی دسته‌ی قبل است.

نکته : فراوانی تجمعی دسته‌ی آخر، برابر کل داده‌ها است.

نکته : جمع کل تمام فراوانی‌های مطلق همان تعداد کل داده‌ها است.

نکته : جمع کل فراوانی‌های نسبی همیشه یک است.

- درصد فراوانی تجمعی و درصد فراوانی نسبی :

برای محاسبه درصد، نسبت هر فراوانی به کل داده‌ها را ضربدر ۱۰۰ می‌نماییم.

$$\frac{f_i}{n} \times 100 = \text{درصد فراوانی نسبی}$$

$$\frac{F_i}{n} \times 100 = \text{درصد فراوانی تجمعی}$$

- حدود طبقات :

داده‌ها در جدول را می‌توان دسته‌بندی نمود تا هر داده‌ها بتواند درون یک دسته قرار گیرد.

(کران پایین (L) ـ کران بالا (c)) = حدود طبقات

(حد بالا ـــ حد پایین) = یا

دانشگاه علمی کاربردی امور مالیاتی قم
رشته مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص
دانشجو : محمد یونس امیدی

ـ تعداد طبقات :

تعداد دسته‌های هر جدول توزیع فراوانی از فرمول زیر محاسبه می‌گردد :

$$K = 1 + (3{,}32 \ Log\ n)$$

* متوسط دسته i ام :

نصف مجموع حد پایین و حد بالای هر دسته را متوسط آن دسته می‌گویند .

$$\text{متوسط دسته‌ی i ام} = \frac{\text{حد بالای دسته i ام} + \text{حد پایین دسته i ام}}{2}$$

ـ طول طبقه :

حد فاصل بین حد پایین و حد بالای هر دسته را طول دسته یا طول طبقه گویند .

$$\text{طول هر طبقه} \leftarrow I = \frac{R \rightarrow \text{دامنه‌ی تغییرات}}{K \rightarrow \text{تعداد طبقات}}$$

* نکته : دسته اول = [کوچکترین داده یا اولین داده ــــ کوچکترین داده + I]

مثال : داده‌های زیر نشان دهنده نرخ $\frac{P}{E}$ سهام ۲۵ شرکت در بازار بورس تهران است :

۲۰٫۵ ـ ۱۹٫۵ ـ ۱۵٫۶ ـ ۲۴٫۱ ـ ۹٫۹ ـ ۱۵٫۴ ـ ۱۲٫۷ ـ ۵ ـ ۱۷ ـ ۲۸٫۶

۱۶٫۹ ـ ۷٫۸ ـ ۲۳٫۳ ـ ۱۱٫۸ ـ ۱۸٫۴ ـ ۱۳٫۴ ـ ۱۴٫۳ ـ ۱۹٫۲ ـ ۹٫۲

۱۶٫۸ ـ ۸٫۸ ـ ۲۲٫۱ ـ ۲۰٫۸ ـ ۱۲٫۶ ـ ۱۵٫۹

$n = ۲۵$ $\quad$ $R = x_{max} - x_{min} = ۲۸٫۶ - ۵ = ۲۳٫۶$

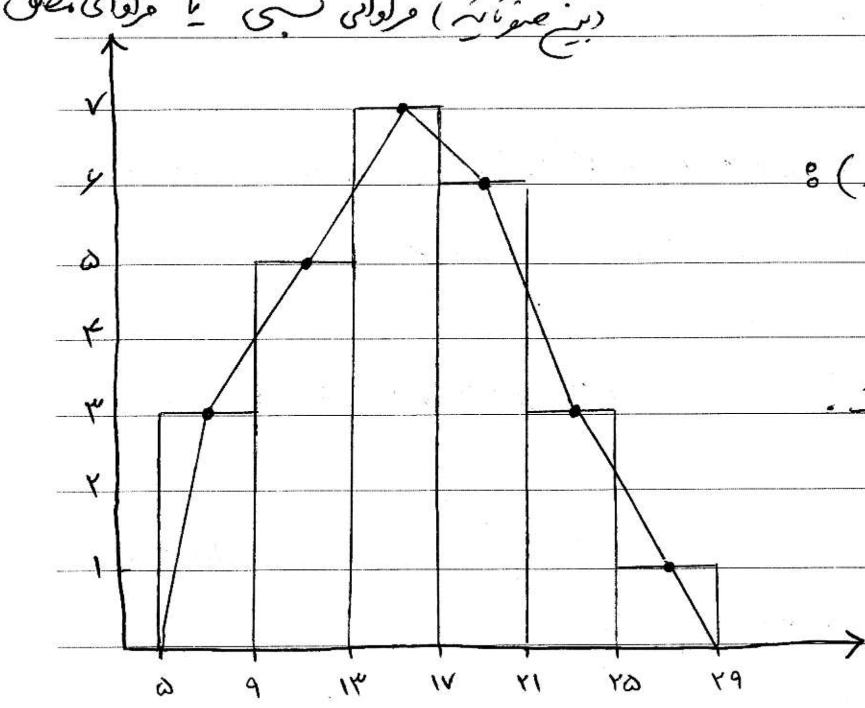
$K = 1 + (۳٫۳۲ \ Log\ n) = 1 + (۳٫۳۲ \ Log\ ۲۵) \simeq ۶$

$I = \frac{R}{K} = \frac{۲۳٫۶}{۶} = ۳٫۹۳۳ \simeq ۴$

(جدول در صفحه‌ی بعدی)

دانشگاه علمی کاربردی امور مالیاتی قم
رشته مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص
دانشجو : محمد یونس امیدی

حدود دسته	خط و نشان	فراوانی مطلق f_i	متوسط دسته	فراوانی نسبی f_i/n	فراوانی تجمعی F_i
(۵-۹]	|||	۳	$\frac{۵+۹}{۲}=۷$	$\frac{۳}{۲۵}$	۳
(۹-۱۳]	||||	۵	$\frac{۱۳+۹}{۲}=۱۱$	$\frac{۵}{۲۵}$	۸
(۱۳-۱۷]	|||| ||	۷	$\frac{۱۳+۱۷}{۲}=۱۵$	$\frac{۷}{۲۵}$	۱۵
(۱۷-۲۱]	|||| |	۶	$\frac{۱۷+۲۱}{۲}=۱۹$	$\frac{۶}{۲۵}$	۲۱
(۲۱-۲۵]	|||	۳	$\frac{۲۱+۲۵}{۲}=۲۳$	$\frac{۳}{۲۵}$	۲۴
(۲۵-۲۹]	|	۱	$\frac{۲۵+۲۹}{۲}=۲۷$	$\frac{۱}{۲۵}$	۲۵
		n=۲۵			



* نمودارهای آماری:

۱) نمودار هیستوگرام (بافت نگار):

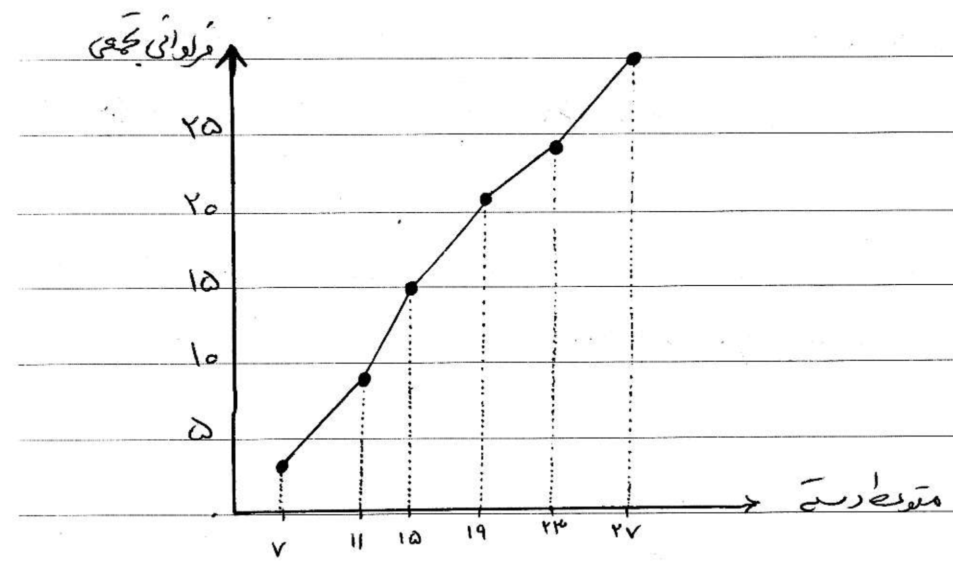
در این نمودار خط افقی، حدود طبقات است.

۲) نمودار چندضلعی:

در این نمودار خط افقی، متوسط هر دسته است.

(خطوط قرمز نمودار چند ضلعی است)

۳) نمودار فراوانی تجمعی:



دانشگاه علمی کاربردی امور مالیاتی قم
رشته مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص
دانشجو : محمد یونس امیدی

* احتمال :

- مفهوم احتمال ← شانس وقوع یک پیشامد (اتفاق)

- آزمایش تصادفی ← اتفاقی که نتیجه قطعی آن از قبل مشخص نباشد.

مانند : پرتاب سکه - ریختن تاس - تولد نوزاد

- فضای نمونه : تمام نتایج یا پیامدهای ممکن برای یک آزمایش تصادفی (S)

مثال : فضای نمونه پرتاب سکه ⇐ S = {خط ، شیر}

ریختن تاس " ⇐ S = {۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶}

تولد نوزاد " ⇐ S = {پسر ، دختر}

* انواع فضای نمونه → گسسته (شمارش پذیر) : محدود یا نامحدود
→ پیوسته (شمارش ناپذیر) : محدود یا نامحدود

- پیشامد : هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای

مثال : سکه ای را آنقدر پرتاب می کنیم تا برای اولین بار شیر بیاید. فضای نمونه و نوع آن ؟

S = {۱، ۲، ۳، ...} گسسته و نامحدود

مثال : فضای نمونه و نوع آن برای نوعی لامپ که حداکثر عمر آن ۱۷۸۰ ساعت است ؟

S = {۰ ≤ x ≤ ۱۷۸۰} پیوسته و محدود

مثال : مفروض است S = {۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶} . پیشامد اینکه عدد ظاهر شده زوج باشد ؟

A = {۲، ۴، ۶}

دانشگاه علمی کاربردی امور مالیاتی قم
رشته مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص
دانشجو : محمد یونس امیدی

- پیامدهای مقدماتی هم شانس : اگر تمام عناصر فضای نمونه ای یک آزمایش دارای شانس وقوع برابر باشند، آنها را پیامدهای مقدماتی هم شانس می نامیم.

⊛ احتمال برای پیامدهای هم شانس :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\quad \frac{\text{تعداد نمونه پیامد A}}{\text{تعداد فضای نمونه}}$$

مثال : می خواهیم در پرتاب دو سکه، احتمالات زیر را حساب کنیم :

الف) دقیقاً دو خط ظاهر شود. $S=\{$(خط، شیر) (شیر، شیر) (شیر، خط) (خط، خط)$\}$

ب) حداقل یک خط ظاهر شود.

الف) $P(A)=\frac{1}{4}$ ب) $P(A)=\frac{3}{4}$

ج) هر دو طرف یکسان باشند.

ج) $P=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

⊛ خواص مقدماتی احتمال :

① احتمال پیشامدی همچون A که متعلق به S $(A\in S)$ همواره $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

② $P(S)=1$

مثال : کدامیک از پیشامدهای زیر، فضای احتمال S را تعریف می کند؟ $S=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$

الف) $P(e_1)=\frac{1}{2}\quad P(e_2)=\frac{1}{3}\quad P(e_3)=\frac{1}{4}\quad P(e_4)=\frac{1}{5}$ ✗

$0\leqslant P(e_1\cdots e_4)\leqslant 1$ ✓ $P(S)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\neq 1$

ب) $P(e_1)=\frac{1}{2}\quad P(e_2)=\frac{-1}{4}\quad P(e_3)=\frac{1}{4}\quad P(e_4)=\frac{1}{2}$ ✗

$0\leqslant P(e_2)\leqslant 1$ ✗

ج) $P(e_1)=\frac{1}{2}\quad P(e_2)=\frac{1}{4}\quad P(e_3)=\frac{1}{8}\quad P(e_4)=\frac{1}{8}$ ✓

$0\leqslant P(e_1\cdots e_4)\leqslant 1$ ✓ $P(S)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1$ ✓

د) $P(e_1)=\frac{2}{5}\quad P(e_2)=\frac{3}{5}\quad P(e_3)=0\quad P(e_4)=0$ ✓

$0\leqslant P(e_1\cdots e_4)\leqslant 1$ ✓ $P(S)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+0+0=1$ ✓

دانشگاه علمی کاربردی امور مالیاتی قم
رشته مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص
دانشجو : محمد یونس امیدی

* قاعده ضرب: اگر عملی مستلزم k مرحله باشد که مرحله اول به n_1 طریق و مرحله دوم به n_2 طریق و مرحله k ام به n_k طریق انجام شود، آنگاه عمل مزبور به $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ طریق ممکن انجام می‌شود.

مثال: بین دو شهر A و B سه مسیر و بین دو شهر B و C چهار مسیر وجود دارد. به چند حالت می‌توان از شهر A به شهر C رفت؟

$n_1 = 3 \qquad n_2 = 4$

$n_1 \times n_2 = 3 \times 4 = 12$

مثال: می‌خواهیم بدانیم اگر قرار باشد پلاک اتومبیل‌ها را با استفاده از نام یک شهر، یک حرف فارسی و ۵ رقم مشخص کنیم با این شرط که فقط از ۲۵ نام شهر می‌توان استفاده کرد؛ چند ماشین مختلف را می‌توانیم شماره‌گذاری کنیم. (رقم اول شماره ماشین نباید صفر باشد)

نام شهر		حرف فارسی						
۲۵	×	۳۲	×	۹	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰

$= 25 \times 32 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

* جایگشت: تعداد حالت‌هایی که پیامدها در تعداد انتخاب مشخص می‌توانند قرار بگیرند (ترتیب مهم است)

ـ تعداد کل جایگشت‌ها برای n شیء: $n!$

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

ـ جایگشت r شیء از n شیء متمایز: $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

مثال: برای سه حرف A و B و C چند جایگشت وجود دارد؟

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

دانشگاه علمی کاربردی امور مالیاتی قم
رشته مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص
دانشجو : محمد یونس امیدی

مثال : می‌خواهیم بدانیم به چند روش می‌توان ۵ کارمند نمونه را در حضور تمام اعضای شرکت معرفی کرد؟

$$۵! = ۵\times۴\times۳\times۲\times۱ = ۱۲۰$$

مثال : چهار حرف A و B و C و D چند جایگشت دارد؟
اگر قرار باشد فقط از دو حرف در هر آرایش استفاده کرد، آنگاه جایگشت چگونه خواهد شد؟

$$\text{چهار حرف} \rightarrow ۴! = ۴\times۳\times۲\times۱ = ۲۴$$

$$P(n,r) = \frac{۴!}{۲!} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲$$

مثال مهم : می‌خواهیم از بین ۱۵ نفر عضو شرکت کننده در جلسه، یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کنیم.

$$P(۱۵,۳) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{۱۵!}{۱۲!} = \frac{۱۵\times۱۴\times۱۳\times\cancel{۱۲!}}{\cancel{۱۲!}}$$

* جایگشت دوری : اگر جایگشت‌های اشیاء روی دایره‌ای مرتب شده باشند به آن جایگشت دوری می‌گویند.

$$\text{جایگشت دوری} = (n-1)!$$

مثال : جایگشت‌های حاصل از چهار نفر که دور یک میز نشسته‌اند چقدر است؟ $(n-1)! = (۴-۱)! = ۳! = ۶$

* ترکیب : در ترکیب برخلاف جایگشت ترتیب مهم نیست. $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

مثال : به چند طریق می‌توان از بین ۸ نفر سه نفر را انتخاب کرد؟

$$\binom{n}{r} = \binom{۸}{۳} = \frac{۸!}{۵!\,۳!} = \frac{۸\times۷\times۶\times\cancel{۵!}}{\cancel{۵!}\times۶} = ۵۶$$

مثال بسیار مهم : به چند طریق می‌توان از بین ۷ گوی سفید و ۴ گوی سیاه، برای کیسه‌ای ۴ گوی سفید و ۲ گوی سیاه انتخاب کرد؟

$$\binom{۷}{۴}\times\binom{۴}{۲} = \frac{۷!}{۳!\,\cancel{۴!}}\times\frac{\cancel{۴!}}{۲!\,۲!}$$

$$= \frac{۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{(\cancel{۶\times۴})(\cancel{۴!})} = ۴۲\times۵ = ۲۱۰$$

Subject:
Year Month Day

دانشگاه علمی کاربردی امور مالیاتی قم
رشته مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص
دانشجو : محمد یونس امیدی

* متغیر تصادفی گسسته :

متغیر تصادفی تابعی است که روی فضای نمونه تعریف می شود و حوزه آن مجموعه ای از اعداد حقیقی است .

دامنهٔ متغیر تصادفی فضای نمونه و برد آن تابع تعریف شده می باشد که زیر مجموعهٔ اعداد حقیقی است .

- متغیرهای تصادفی با حروف بزرگ نمایش داده می شوند : X ، Z

- مقادیر مشاهده شده از متغیرهای تصادفی را با حروف کوچک نمایش می دهیم .

* تابع احتمال : به تابعی که بتوان با استفاده از آن ، احتمال هریک از مقادیر ممکن متغیر تصادفی را مشخص کرد تابع احتمال یا توزیع احتمال گفته می شود .

- خواص تابع احتمال : ۱) $0 \leq P(x,X) \leq 1$

۲) مجموع تمام مقادیر احتمالات همیشه برابر یک می باشد .

مثال - سکهٔ سالمی را دوبار پرتاب می کنیم .

فضای نمونه بصورت مقابل است : $S=\{$ (شیر شیر) (خط خط) (شیر خط) (خط شیر) $\}$

ارتباط آن با شیرهای ظاهر شده بصورت زیر است :

(خط خط) → ۰ (شیر خط) (خط شیر) → ۱ (شیر شیر) → ۲

تابع احتمال عبارت است از :

x	۰	۱	۲
$P(x,X)$	۰/۲۵	۰/۵	۰/۲۵

۱

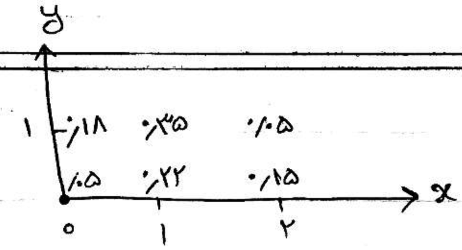
$$P(x\leq 1) = P(x=0) + P(x=1) = 0.25 + 0.5 = 0.75$$

مثال - فروش روزانه دو بنگاه اتومبیل را در نظر می گیریم . تعداد فروش اتومبیل در بنگاه اول به x ، حداکثر ۲ خودرو و تعداد فروش روزانه اتومبیل در بنگاه دوم به y حداکثر ۱ خودرو است . مطلوبست فضای نمونه و تابع احتمال ؟

$$S=\{(0,0)\,(0,1)\,(1,0)\,(1,1)\,(2,0)\,(2,1)\}$$

$(0,0) \to 0$ $(0,1)(1,0) \to 1$ $(1,1)(2,0) \to 2$ $(2,1) \to 3$

NoteBook Sarv



Y	0	1	2	3
$P(x,y)$	0.05	$0.22+0.18=0.4$	$0.15+0.35=0.5$	$0.05+0.15=0.2$

⊛ تابع توزیع (احتمال تجمعی): $F(x)=P(X\leqslant x)$

این تابع، احتمال وقوع مقداری کوچکتر یا مساوی با x را نشان می دهد.

مثال – $F(3)$ و $F(1)$ برای مثال اتومبیل:

$$F(1)=P(x\leqslant 1)=P(x=0)+P(x=1)=0.05+0.4=0.45$$

$$F(3)=P(x\leqslant 3)=P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)=$$
$$0.05+0.4+0.5+0.2$$

مثال – می خواهیم بدانیم $P(X=x)=\dfrac{\binom{4}{x}}{16}$ و $x=0,1,2,3,4$ یک تابع احتمال است یا خیر؟ اگر بلی $P(x=0)$ چقدر است؟

$$0\leqslant P(X=x)\leqslant 1$$
$$\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)=1$$

$$\frac{\binom{4}{0}}{16}=\frac{\frac{4!}{4!\,0!}}{16}=\frac{1}{16} \qquad \frac{\binom{4}{1}}{16}=\frac{\frac{4!}{3!\,1!}}{16}=\frac{4}{16}$$

$$\frac{\binom{4}{2}}{16}=\frac{\frac{4!}{2!\,2!}}{16}=\frac{6}{16} \qquad \frac{\binom{4}{3}}{16}=\frac{\frac{4!}{1!\,3!}}{16}=\frac{4}{16}$$

$$\frac{\binom{4}{4}}{16}=\frac{\frac{4!}{0!\,4!}}{16}=\frac{1}{16} \qquad \frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=1$$

$$P(x=0)=\frac{\binom{4}{0}}{16}=\frac{1}{16}$$

تابع احتمال است و خواص صدق می کند

⊛ امید ریاضی: $E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i\,\underbrace{f(x)}_{\text{تابع احتمال}}$

مثال ـ مفروض است تابع احتمال زیر . امید ریاضی و امید ریاضی $2x$ ها را حساب کنید .

x	-2	1	3	5
$f(x)$	$0/2$	$0/4$	$0/3$	$0/1$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot f(x) = (-2\times 0/2) + (1\times 0/4) + (3\times 0/3) + (5\times 0/1)$$

$$E(2x) = \sum_{i=1}^{4} 2x_i \cdot f(x) = (-4\times 0/2) + (2\times 0/4) + (6\times 0/3) + (10\times 0/1)$$

* خواص امید ریاضی :

① $E(b)=b$

② $E(ax)=aE(x)$

③ $E(ax+b)=aE(x)+b$

* واریانس متغیر تصادفی : $Var(x)=E(x^2)-E^2(x)$

* توزیع برنولی : آزمایشهایی که دارای دو پیامد ممکن باشند و احتمال موفقیت و شکست هر پیامدی از آزمایشی به آزمایش دیگر ثابت باشد و آزمایشها از هم مستقل باشند یک آزمایش برنولی است ؛ و توزیع تعداد موفقیت ها را توزیع برنولی گویند .

در یک آزمایش برنولی ، احتمال موفقیت را با P و احتمال شکست را با Q نشان می دهند .

$$Q=1-P$$

مثال ـ در جعبه ای ۲۰ کالا وجود دارد که پنج تای آنها نامرغوب است . اگر بخواهیم با جایگذاری چند کالا را انتخاب کنیم . می خواهیم بدانیم احتمال خارج کردن یک کالای مرغوب در هر بار چقدر است ؟

P	$\frac{15}{20}$	احتمال موفقیت
$q=1-P$	$\frac{5}{20}$	احتمال عدم موفقیت

* توزیع دوجمله‌ای : یک آزمایش برنولی n بار تکرار می‌شود که در آن احتمال موفقیت p و متغیر تصادفی x را تعداد موفقیت‌ها در نظر می‌گیریم. توزیع متغیر x را توزیع دوجمله‌ای با احتمال موفقیت p می‌نامیم که در آن متغیر x مقادیر $0, 1, 2, \ldots, n$ را می‌تواند بگیرد.

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x\cdot q^{n-x} \qquad x=0,1,2,\ldots,n$$

$$P(X=x)=\binom{1}{x}p^x\cdot q^{1-x} \leftarrow \text{تابع توزیع برنولی}$$

مثال - دانشجویی می‌خواهد به پنج سؤال ۲ گزینه‌ای (درست - غلط) پاسخ دهد. احتمال دادن پاسخ درست به هر سؤال ۰/۷ است. می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه دقیقاً به دو سؤال پاسخ درست بدهد چقدر است؟
احتمال اینکه حداقل به یک سؤال درست پاسخ بدهد چقدر است؟
احتمال اینکه حداکثر به یک سؤال درست پاسخ بدهد چقدر است؟

$$n=5 \qquad p=0/7 \qquad q=1-p=1-0/7=0/3$$

$$P(x=2)=\binom{n}{x}p^x\cdot q^{n-x}=\binom{5}{2}\cdot(0/7)^2\cdot(0/3)^3$$

$$P(x\geq 1)=p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)+p(x=4)+p(x=5)$$

یا $P(x\geq 1)=1-p(x<1)=1-\left[p(x=0)+p(x=1)\right]$ فرمول معکوس

$$P(x\leq 1)=P(x=0)+P(x=1)=\binom{5}{0}(0/7)^0(0/3)^5+\binom{5}{1}(0/7)^1(0/3)^4$$

دانشگاه علمی کاربردی امور مالیاتی قم
رشته مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص
دانشجو : محمد یونس امیدی

* تمرینات درس آمار و کاربرد آن در بیمه

۱) اگر برای بررسی جامعه آماری از تمام مشاهدات آن استفاده شود، روش آماری را چه می‌نامند؟

الف) توصیفی ب) استنباطی ج) پارامتریک د) الف و ب

۲) برای هر کدام از مقیاسهای تعریف شده، حداقل دو نمونه جدید ذکر کنید.

- کدام مقیاسها، از ویژگی‌های بهتری برای اندازه گیری برخوردار است؟

۳) با توجه به این مقادیر $X = ۵, ۴, -۳, ۱$ و $Y = -۱, ۱, ۵, ۲$، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\left(\sum_{i=1}^{۳} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{۲} y_j\right)$ ب) $\sum_{i=1}^{۴} x_i \times \sum_{i=1}^{۴} y_i$

پ) $\left(\sum_{i=1}^{۳} x_i\right)^۲$ ت) $\sum_{i=1}^{۴} x_i^۲$

۴) میانگین مشاهدات زیر را بدست آورید: $X = ۷۵, ۶۵, ۸۰, ۸۳, ۶۷$

۵) نمره مسئولیت پذیری بیست مدیر به شرح زیر است. میانگین نمرات مدیران را بدست آورید.

(نمره) x_i	۵	۶	۱۰	۱۲	۱۵
(تکرار) w_i	۳	۲	۵	۶	۴

۶) با داشتن مقادیر $x_i = ۱, ۳, ۵, ۷$ و $z_i = ۱, ۴, ۳, ۶$ و مقدار ثابت $a = -۲$ و $b = ۳$ می‌خواهیم صحت خواص میانگین حسابی را بررسی کنیم.

* نسبت جذب دانشجویان به دانشگاه در سالهای زیر به مرکز داده شده است. متوسط رشد جذب سالانه چند درصد بوده است؟

سال	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴
مقدار جذب	۱۰۰۱	۱۵۶۱	۱۷۲۹	۱۸۰۰	۱۸۰۵

دانشگاه علمی کاربردی امور مالیاتی قم
رشته مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص
دانشجو : محمد یونس امیدی

۷) سرعت پنج موتور الکتریکی برحسب دور در ثانیه به شرح زیر است. میانگین سرعت موتورها چقدر است؟

موتور	۱	۲	۳	۴	۵
سرعت	۵	۶	۱۰	۱۵	۶

۸) مد هریک از گروههای زیر را تعیین کنید:

A : ۳و۵و۷و۸و۹و۱۰و۵و۸و۵

B : ۱۰۰و ۱۵۰ و ۱۱۰ و ۱۰۰ و ۱۵۰ و ۱۱۰

C : ۹، ۱۰، ۸، ۷، ۵، ۳، ۲

۹) چارکهای ۱و۲و۳ را برای مشاهدات زیر بدست آورید: ۱۶۰و۱۰۰و۹۰و۸۰و۱۲۰و۱۴۰و۸۵

۱۰) با داشتن $x_i = -1, 4, 3, 6$ و مقدار ثابت $a = -2$ و $b = 3$، صحت خواص واریانس را برای مشاهدات $y_i = x_i + a$ و $Z_i = bx_i$ را نشان بدهید.

۱۱) مشاهدات زیر وزن محصولات تولید شده در یک کارخانه طی یک روز است:

۱۴۰، ۱۳۵، ۱۲۵، ۱۴۰، ۱۳۵، ۱۴۰، ۱۳۰، ۱۲۰، ۱۵۰، ۱۰۰

الف) انحراف معیار را محاسبه نمایید.

ب) دامنه میان چارکی را حساب کنید.

۱۲) در پرتاب دو سکه احتمال اینکه حداکثر یک خط ظاهر شود چقدر است؟

۱۳) آیا پیشامدهای $P(e_1)=\frac{3}{2}$ و $P(e_2)=\frac{1}{2}$ و $P(e_3)=\frac{1}{4}$ و $P(e_4)=0$ فضای احتمالی S را تعریف می‌کنند؟ $S=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

۱۴) به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ مشتری یک شرکت ۳ مشتری را انتخاب کرد؟

دانشگاه علمی کاربردی امور مالیاتی قم
رشته مدیریت بیمه ـ بیمه اشخاص
دانشجو : محمد یونس امیدی

(۱۵) تابع احتمال زیر مفروض است.

Y	-۱	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	۰/۱	۰/۰۵	۰/۳۵	۰/۳	۰/۲

مطلوبست موارد زیر:

الف) $E(x)$ و $2E(2x)$

ب) $F(1)$ و $F(2)$

ج) $Var(x)$ و $Var(1)$

(۱۶) دانشجویی می‌خواهد به پنج سؤال ۲ گزینه‌ای (درست ـ غلط) پاسخ دهد. احتمال دادن پاسخ درست به هر سؤال ۰/۶ است. مطلوبست:

الف) احتمال اینکه حداکثر به سه سؤال درست پاسخ دهد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه به هیچ سؤالی پاسخ درست ندهد چقدر است؟