بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

کتاب حاضر نتیجه دو دهه تجربه در تدریس مدارهای الکتریکی I در دانشگاه آزاد اسلامی است. در این کتاب تلاش شده است روش حل مدار به صورت روان و ساده برای دانشجویان دوره کارشناسی در رشته‌های برق و کامپیوتر تدوین شود. دسته‌بندی مطالب به گونه‌ای است که برای درس مبانی برق دانشجویان سایر رشته‌ها نیز قابل استفاده است. در این کتاب، مدارهای غیرخطی مورد بررسی قرار نگرفته و تاکید کتاب بر تمرین خواننده و تسلط او بر حل مدار بوده است. فصل‌بندی‌ها به گونه‌ای تنظیم شده که مطالب مورد نیاز به طور کاربردی در مسائل مختلف به کار رفته است. خوانندگان کتاب تبحر کامل در حل مسائل مدار خواهند یافت و برای توضیحات تکمیلی و استفاده از مفاهیم کامل‌تر مدار، به سایر کتب می‌توانند رجوع کنند. به دانشجویانی که علاقه‌مند به ادامه تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد هستند توصیه می‌شود به مسائل مربوط به کتاب نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها تالیف ارنست کوه-چارلز دسو، کتاب نظریه اصولی مدارهای الکتریکی (خطی و غیرخطی) تالیف قوشه عابد هدتنی و سوالات کارشناسی ارشد سال‌های قبل مراجعه کنند.

لازم است از جناب آقای مهندس بهراد قنبری که جمع آوری، تدوین مطالب و پاسخ به سوالات پایانی فصل‌های کتاب به کوشش ایشان بوده، تقدیر و تشکر نمایم.

در پایان از خوانندگان کتاب تقاضا دارم که پیشنهادات و انتقادات خود را از طریق سایت یا ایمیل زیر مطرح سازند.

www.Circuitsmba.ir

ghanbari.behrad@yahoo.com

محمد باقر علائی

خرداد ۹۳

فهرست مطالب

فصل اول : تعریف مدارهای الکتریکی ۴

فصل دوم : حل مدارهای مرتبه اول و مرتبه دوم ۲۴

تمرین‌های حل شده فصل دوم ۶۱

فصل سوم : تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی ۱۴۹

تمرین‌های حل شده فصل سوم ۱۶۵

فصل چهارم : آشنایی با ترانسفورماتورهای ایده‌آل ۱۸۳

تمرین‌های حل شده فصل چهارم ۲۰۱

فصل پنجم : مدارهای تزویج شده ۲۳۳

تمرین‌های حل شده فصل پنجم ۲۴۲

فصل ششم : تقویت کننده‌های عملیاتی (Op-Amp) ۲۶۵

تمرین‌های حل شده فصل ششم ۲۷۱

فصل اول :

تعریف مدار الکتریکی

فصل ۱ :

تعریف مدار الکتریکی

مدارهای الکتریکی : وقتی عناصر الکتریکی به یکدیگر متصل شوند بطوری که حلقه بسته یا باز تشکیل دهند، مدار الکتریکی به وجود می‌آید.

عناصر الکتریکی : چهار عنصر مقاومت، سلف، خازن و منابع را عناصر الکتریکی می‌نامند که همگی دارای دو سر هستند. پس عناصر الکتریکی به صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند:

عناصر الکتریکی

۱- مقاومت (مانند : کلید – سیم – دیود – لامپ)

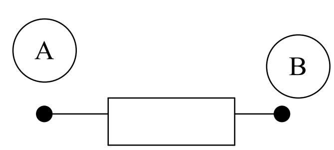
۲- خازن

۳ - سلف (مانند : سیم پیچ)

۴- منابع
- ولتاژ (مانند : باطری)
- جریان (مانند : مدارهای کنترلی)

منابع
- مستقل
- وابسته

شاخه : عنصر الکتریکی را با یک مستطیل نشان می دهیم که به آن شاخه می‌گوییم.

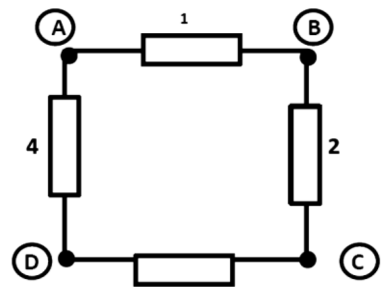


گره : شاخه دارای دوسر است. سر A و سر B که به آنها گره می‌گویند.

هر تعداد گره که به هم وصل شوند یک گره به حساب می‌آیند.

وقتی شاخه‌ها به یکدیگر متصل شوند و حلقه‌ای بوجود آید که اگر از یک گره حرکت کنیم و بعد از طی مسیری دوباره به آن گره برسیم حلقه را حلقه‌ی بسته می‌نامیم . در غیر اینصورت حلقه را حلقه باز می‌نامیم.

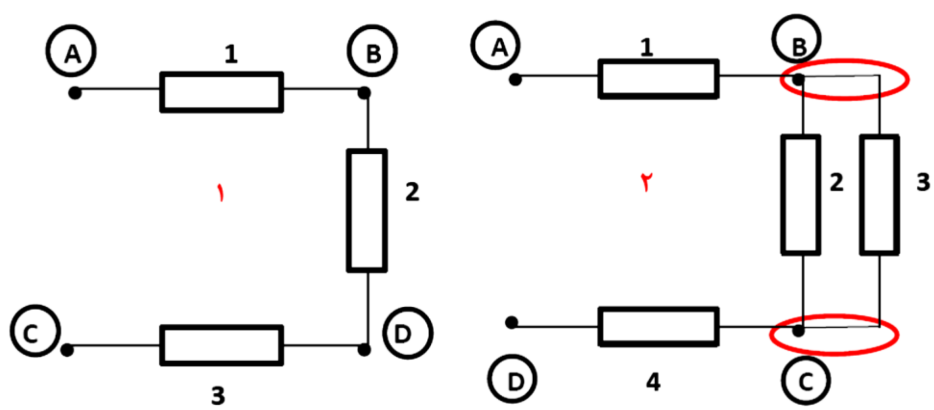
مثال۱) مدار شکل زیر حلقه ی باز است یا بسته؟ و چند شاخه و چند گره دارد؟



۳

جواب :۴ گره به نام‌های A,B,C,D و ۴ شاخه و یک حلقه بسته ABCDAتشکیل داده است.

مثال۲) مدار شکل زیر حلقه باز است یا بسته ؟ و چند شاخه و چند گره دارد؟



جواب ۱ : ۳ شاخه و ۴ تا گره دارد و حلقه باز ABDC است.

جواب ۲ : چهار گره و شش شاخه و دو حلقه باز شامل شاخه‌های 1,2,4 و شاخه‌های 1,3,4 و یک حلقه بسته شامل شاخه‌های 2,3دارد.

حل مدار الکتریکی : مدار الکتریکی با استفاده از دو قانون KVL(kirchhoff voltage law) و KCL(kirchhoff current law) حل می‌شود.

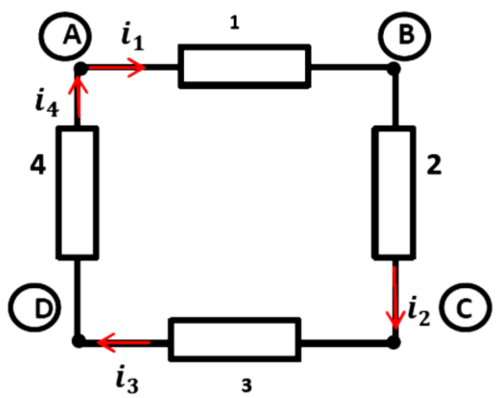
KCL: قانون جریان کیرشهف (روش گره)

KVL: قانون ولتاژ کیرشهف (روش مش یا حلقه)

قانون جریان کیرشهف KCL :

در هر گره از هر مدار الکتریکی مجموع جریان های وارد شده به آن گره برابر است با مجموع جریان‌های خارج شده از آن گره.

مثال۳) در مدار شکل زیر در تمام گره ها KCLبنویسید.



جهت جریان را با فلش → و مقدار جریان را باiنشان می‌دهیم.

$$\left.\begin{aligned} Kcl\ A:&\quad i_4 = i_1\\ Kcl\ B:&\quad i_2 = i_1\\ Kcl\ C:&\quad i_2 = i_3\\ Kcl\ D:&\quad i_4 = i_3 \end{aligned}\right\}\longrightarrow i_1 = i_2 = i_3 = i_4$$

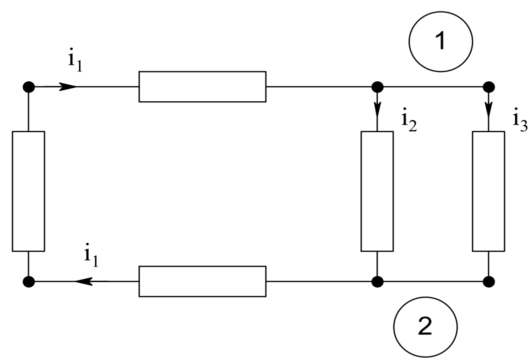
از روابط KCL نوشته شده در گره‌ها مشاهده می‌شود جریان در شاخه‌های سری با هم مساوی است. در این مدار تمام شاخه‌ها سری هستند.

شاخه های سری : اگر در گره ای فقط دو شاخه بهم وصل باشند، آن دو شاخه سری هستند . یعنی وقتی روی گره مورد نظر قرار داشته باشیم فقط دو شاخه به آن متصل شده باشد.

بنابراین از این به بعد در گره‌های مربوط به شاخه‌های سری KCLنمی‌نویسیم، به شرط آنکه جریان شاخه‌های سری را مساوی و متناظر در نظر بگیریم.

جهت متناظردر شاخه‌های سری یعنی یک جریان به گره وارد شود و جریان دیگر از گره خارج شود.

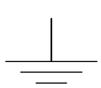
مثال۴) در تمام گره‌هایی که لازم است KCLبنویسید.



Kcl ۱: $i_1 = i_2 + i_3$

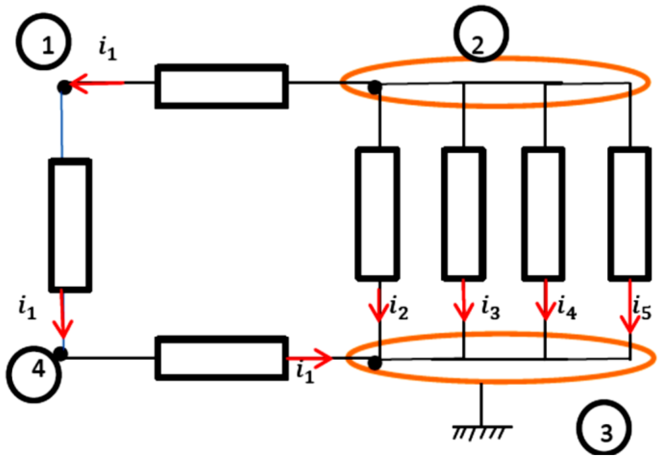
Kcl ۲: $i_1 = i_2 + i_3$

از مساوی بودن Kcl 1 و Kcl2 مشاهده می‌شود در تمام مدارها یک رابطه KCL تکرار خواهد شد بنابراین قبل از حل مدار یکی از گره‌هایی را که لازم است در آن KCL نوشته شود انتخاب کرده و در آن Kcl نمی‌نویسیم. به آن گره ، گره مبنا یا گره زمین می‌گوییم و با علامت زیر آن را مشخص می‌کنیم.



نکته : فقط گره‌هایی را مبنا در نظر می‌گیریم که در آن گره می‌توانیم KCLبنویسیم .

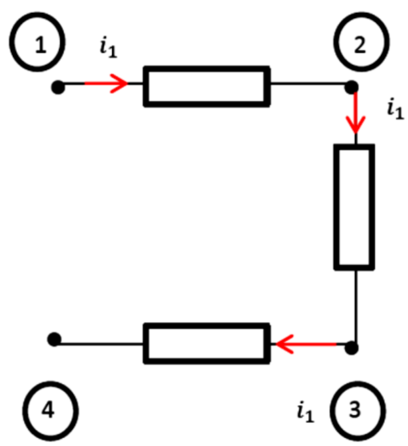
مثال۵) در تمام گره هایی که لازم است KCLبنویسید.



Kcl 2 : $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 0$

در گره ۱ و۴ رابطه KCl نمی‌نویسیم زیرا مربوط به شاخه‌های سری هستند و شرط آن را رعایت می‌کنیم. یعنی جریان شاخه‌های سری گره ۱ و ۴ را مساوی و متناظرi_1 در نظر می‌گیریم.

مثال۶) در تمام گره‌هایی که لازم است KCLبنویسید.



Kcl 2: $i_1 = 0$

Kcl 3: $i_1 = 0$

از kcl2 و kcl 3نتیجه می‌گیریم که جریان شاخه‌ی مدار باز صفر است .

> در گره مربوط به مدار باز kclنمی‌نویسیم به شرط آنکه جریان شاخه مدار باز را صفر در نظر بگیریم.

می‌توان گفت در نوشتن KCL توجه به موارد ذیل ضروری است:

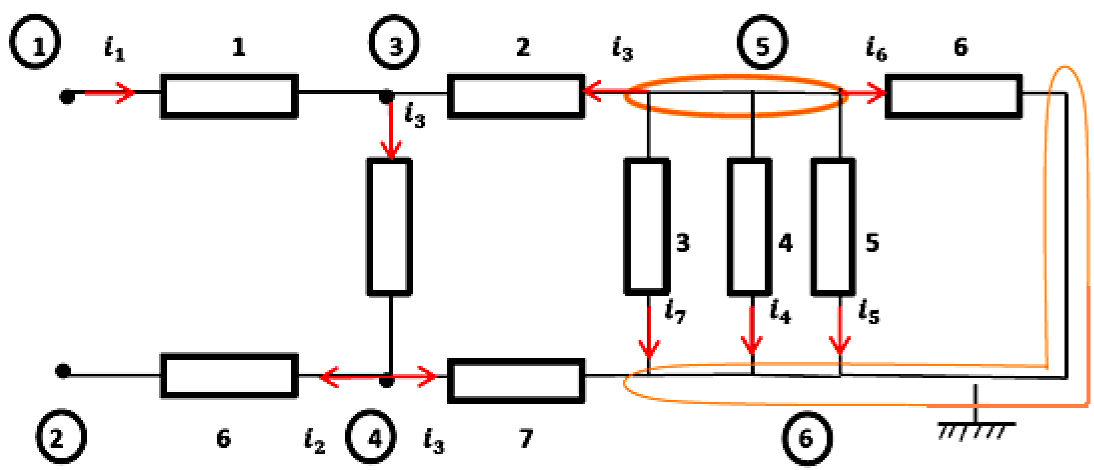
۱- در گره مربوط به شاخه‌های سری یا متوالی نباید Kclنوشت به شرط آنکه جریان شاخه‌های سری را متناظر و مساوی در نظر بگیریم.

جهت متناظردر KcL یعنی جریان از یک شاخه واردگره و از شاخه دیگر از گره خارج می‌شود.

۲- در گره مربوط به شاخه مدار باز نباید KCLنوشت به شرط آنکه جریان شاخه مدار باز را صفر در نظر بگیریم.

۳- از مابقی گره‌هایی که لازم استKCLنوشته شود یکی را به عنوان گره مبنا انتخاب کرده و در آن KCLنمی‌نویسیم. گره مبنا را با این علامت  مشخص می‌کنیم .

مثال۷) در مدار شکل زیر در تمام گره‌هایی که لازم است kcl بنویسید.

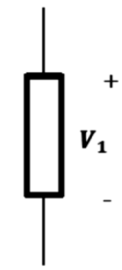


Kcl 5: $i_3 + i_4 + i_5 + i_6 + i_7 = 0$

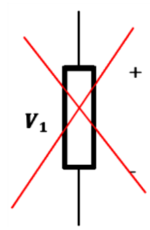
حل مدار با روش KVL:

در هر حلقه از مدار الکتریکی چه باز و چه بسته مجموع ولتاژ شاخه‌ها برابر صفر است.

ولتاژ شاخه‌ها را با علامت + و − نشان می‌دهیم و با حرف V مشخص می‌کنیم. مانند:



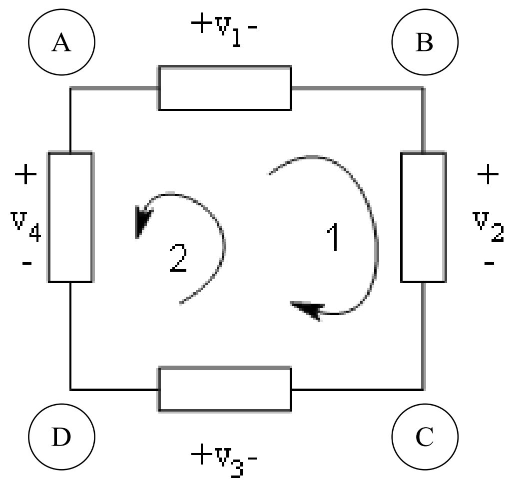
حرف V را بین + و − بنویسید.



مثال۸) در مدار زیر KVL بنویسید.

برای نوشتن رابطه KVL از یک گره در جهت ساعتگرد یا خلاف ساعتگرد حرکن می‌کنیم و ولتاژ شاخه‌ها را با هم جمع می‌کنیم. علامت ولتاژ هر شاخه اولین علامت مثبت یا منفی است که در جهت انتخاب شده حلقه می‌بینیم.

KVL نوشته شده برای جهت ساعتگرد و پادساعتگرد با هم مساوی است.



ساعتگرد KVL ABCDA = KVL 1: $v_1 + v_2 - v_3 - v_4 = 0$

خلاف ساعتگرد KVL ADCBA = KVL 2: $v_4 + v_3 - v_2 - v_1 = 0$

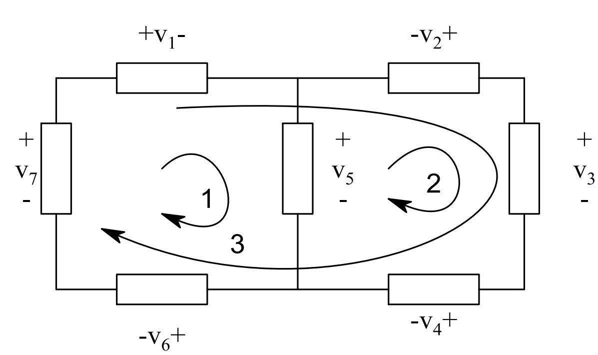
اگر رابطه KVL2 را در منفی ضرب کنیم همان رابطه KVL1 است.

KVL1 در جهت ساعتگرد و KVL2 در جهت پادساعتگرد نوشته شده است که هر دو با هم مساوی است.

نتیجه: نوشتن KVLدر جهت ساعتگرد و پادساعتگرد با هم مساوی است.

مثال۹) در تمام حلقه‌های مدار KVLبنویسید.

این مدار دارای دو حلقه است که مجاور هم هستند و سه KVL می‌توان در آن‌ها نوشت.



KVL 1:$V_1 + V_5 + V_6 - V_7 = 0$

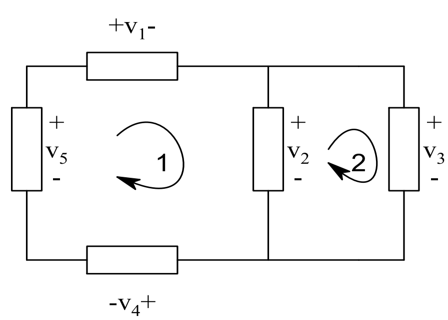
KVL 2: $-V_2 + V_3 + V_4 - V_5 = 0$

KVL 3: $V_1 - V_2 + V_3 + V_4 + V_6 - V_7 = 0$

KVL 1+KVL 2 = $V_1 - V_2 + V_3 + V_4 + V_6 =$ Kvl 3

نتیجه: وقتی دو حلقه مجاور هم هستند که ۳ حلقه را تشکیل می‌دهند نوشتن KVL در ۲ حلقه از ۳ حلقه کافی است زیرا KVLحلقه سوم تکراری خواهد بود پس از این به بعد در شرایط فوق فقط KVL را در دوحلقه می‌نویسیم.

مثال۱۰) در تمام حلقه‌های مدار شکل زیر KVL بنویسید.



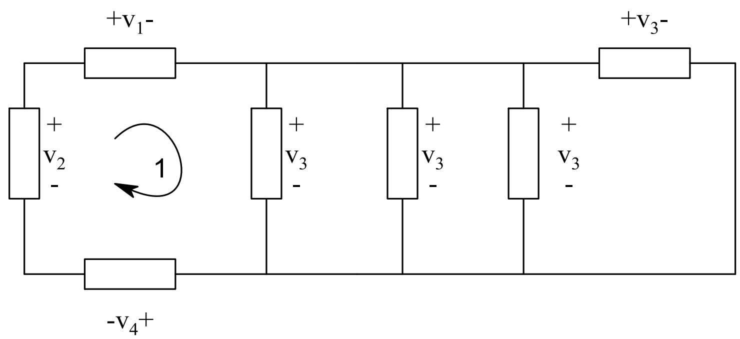
KVL 1: $V_1 + V_2 + V_4 - V_5 = 0$

KVL 2: $V_3 - V_2 = 0 \rightarrow V_2 = V_3$

نتیجه: در این مثال2 KVL نشان می‌دهد ولتاژ شاخه‌های موازی با هم مساوی هستند. پس از این به بعد در حلقه‌ای که شاخه‌های آن موازی است KVL نمی‌نویسیم به شرط آنکه ولتاژهای شاخه‌های موازی را مساوی و متناظر در نظر بگیریم.

جهت های متناظر در شاخه‌های موازی یعنی سرهای مثبت به هم متصل باشند و سرهای منفی نیز به هم متصل باشد.

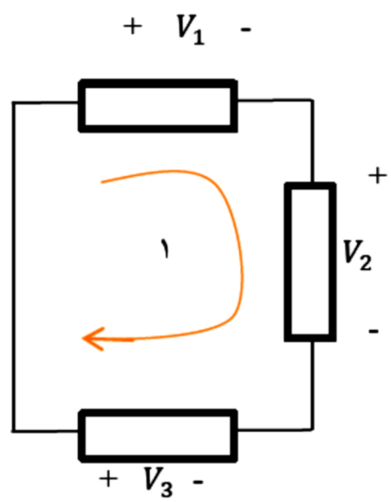
مثال۱۱) در مدار شکل زیر در تمام حلقه‌های مورد نیاز رابطه KVL را بنویسید.



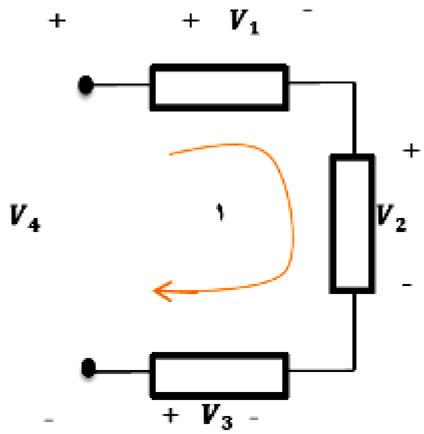
$$\text{KVL 1:}\quad V_1 + V_3 + V_4 - V_2 = 0$$

نتیجه: وقتی جهت ولتاژها را برای شاخه‌های موازی مساوی و متناظر در نظر بگیریم مثل این است که تمام شاخه های موازی را یک شاخه فرض کرده و سپس تعداد حلقه‌ها را مشخص می‌کنیم . پس این مدار فقط یک حلقه بسته دارد.

مثال۱۲) در تمام حلقه‌ها KVL بنویسید.



$$\text{Kvl 1:}\quad v_1 + v_2 - v_3 = 0$$



kvl 1: $v_1 + v_2 - v_3 - v_4 = 0$

وقتی کلید باز است، می‌گوییم مقاومتش بی‌نهایت شده است. (حلقه باز یا مدار باز)

وقتی حلقه بسته است، می‌گوییم مقاومتش صفر است . حلقه بسته (سیم یا اتصال کوتاه)

پس به طور خلاصه می‌توان گفت در زمان نوشتن KVL توجه به موارد ذیل ضروری است:

۱- برای دو سر مدار باز باید ولتاژ در نظر گرفت.

۲- وقتی دو حلقه مجاور هم هستند که ۳حلقه را تشکیل می‌دهند نوشتن KVL در ۲ حلقه از ۳حلقه کافیست و KVLحلقه سوم تکراری خواهد شد.

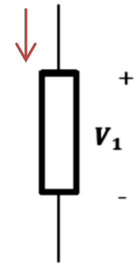
۳- ولتاژ شاخه‌های موازی، مساوی است. پس در حلقه‌ای که دارای شاخه‌های موازی است نباید KVL نوشت به شرط آنکه ولتاژ شاخه‌های موازی را مساوی و با جهت متناظر در نظر بگیریم. جهت متناظر در شاخه‌های موازی یعنی سرهای مثبت به هم متصل و سرهای منفی به هم متصل باشند.

توان برای هر شاخه : توان از حاصلضرب ولتاژ در جریان هر شاخه به دست می‌آید.

برای جهت های متناظررابطه توان مثبت (+) است،برای جهت های متناظر ولتاژ و جریان یک شاخه

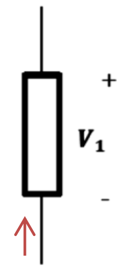
جهت های متناظر ولتاژ و جریان یک شاخه: جریان از سر مثبت (+) ولتاژ وارد شاخه شود.

$P = V \cdot i$



اگر جریان از سر منفی ولتاژ وارد شاخه شود، جهت‌ها نامتناظر است.

$P = - V \cdot i$



حل مدار: حل مدار یعنی محاسبه جریان ، ولتاژ و توان برای هر شاخه.

به عنوان مثال اگر مداری شامل ۵ شاخه باشد دارای ۵ جریان ، ۵ ولتاژ و ۵ توان است. البته جریان‌شاخه‌های سری با هم مساوی هستندو ولتاژ شاخه‌های موازی نیز با هم مساوی است.

در حالت کلی، توان، ولتاژ و جریان تابعی از زمان است یعنی داریم :

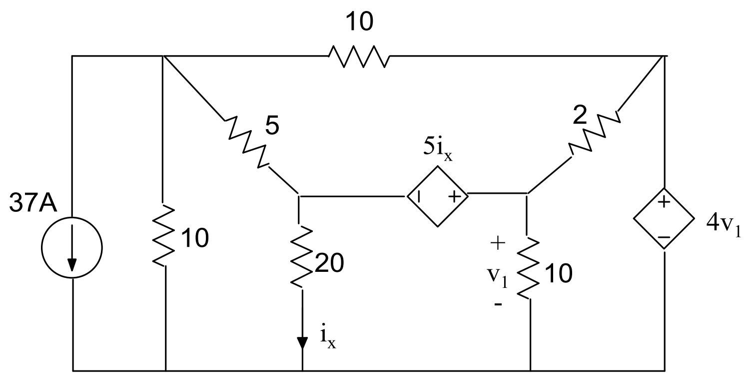
$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

در هر مدار به تعداد شاخه ها باید جریان ، ولتاژ و توان را به دست آورد و حل مدار یعنی به دست آوردن جریان تمام شاخه‌ها، ولتاژ تمام شاخه‌ها و توان تمام شاخه‌ها.اما اگر ولتاژ یا جریان یکی از شاخه‌ها به دست آید، بقیه مجهولات از روی آن قابل محاسبه است.بنابراین در سوالات مدار معمولا ولتاژ یا جریان یا توان یکی از شاخه‌ها را می‌خواهند.

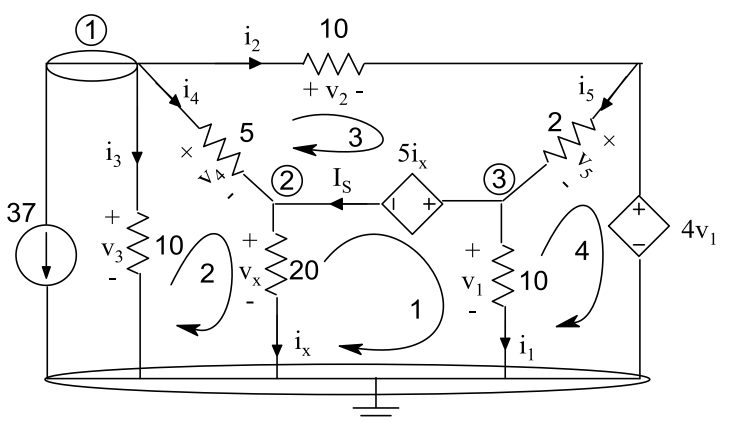
مثال۱۳)

الف) مقادیر v_1 و i_x را بدست آورید.

ب) منبع جریان مستقل مدار چه توانی را تولید یا مصرف می‌کند؟ محاسبه کنید.



"مقاومت‌ها بر حسب اهم می‌باشد."



Kcl 1: $i_2 + i_3 + i_4 + 37 = 0$ (1)

Kvl 1: $-5i_x + v_1 - v_x = 0 \rightarrow -5i_x + 10i_1 - 20i_x = 0 \rightarrow -30i_x + 10i_1 = 0$ (2)

Kvl 2: $v_4 + v_x - v_3 = 0 \rightarrow 5i_4 + 20i_x - 10i_3 = 0$ (3)

Kvl 3: $v_2 + v_5 + 5i_x - v_4 = 0 \rightarrow 10i_2 + 2i_5 + 5i_x - 5i_4 = 0$ (4)

$Kvl\ 4: \quad -v_5 + 4v_1 - v_1 = 0 \rightarrow -v_5 + 3v_1 = 0 \rightarrow -2i_5 + 30i_1 = 0 \quad (5)$

$$\left.\begin{array}{l} kcl\ 2: \ \ I_s = i_x - i_4 \\ kcl\ 3: \ \ I_s = i_5 - i_1 \end{array}\right\} \rightarrow i_x - i_4 = i_5 - i_1 \quad (6)$$

شش معادله، شش مجهول $\rightarrow \begin{cases} i_x = \frac{74}{179} \\ i_1 = \frac{222}{179} \end{cases}$

$v_1 = 10i_1 = \frac{2220}{179}$

ب)

از حل معادلات قسمت الف $\rightarrow i_3 = \frac{-1369}{179}$

$P_{\text{منبع}} = 37 \times v_3 = 37 \times 10 \times i_3 = 37 \times 10 \times \left(\frac{-1369}{179}\right) \cong -2829/78$

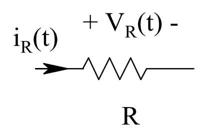
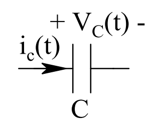
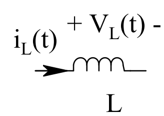
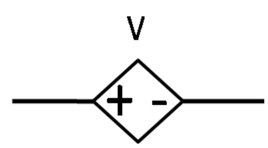
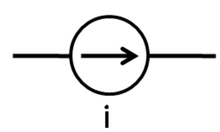
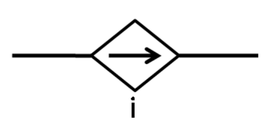
چون منفی است یعنی توان تولید می‌کند.

جدول عناصر الکتریکی:

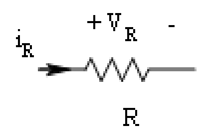
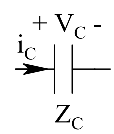
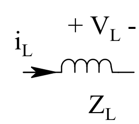
برای حل مدار الکتریکی علاوه بر استفاده از قوانین کیرشف لازم است روابط بین ولتاژ و جریان هر عنصر الکتریکی مشخص باشد. در جدول زیر عناصر الکتریکی به همراه مشخصه الکتریکی و روابط ولتاژ و جریان آن‌ها آمده است.

در این‌جا دو جدول ارائه شده است که یکی جدول عناصر الکتریکی در حوزه زمان و دیگری جدول عناصر الکتریکی در حوزه فازور است. در حوزه فازور زمان وجود ندارد و روابط نوشته شده تابعی از زمان (t) نمی‌باشد. هم‌چنین در حوزه فازور روابط ولتاژ و جریان تمام عناصر قانون اهم است و خازن و سلف به امپدانس خازن (Z_C) و امپدانس سلف (Z_L)تبدیل می‌شوند که واحد آن‌ها اهم است.

جدول(۱) مربوط به عناصر الکتریکی برای جهت‌های متناظر ولتاژ و جریان یک شاخه‌در حوزه زمان

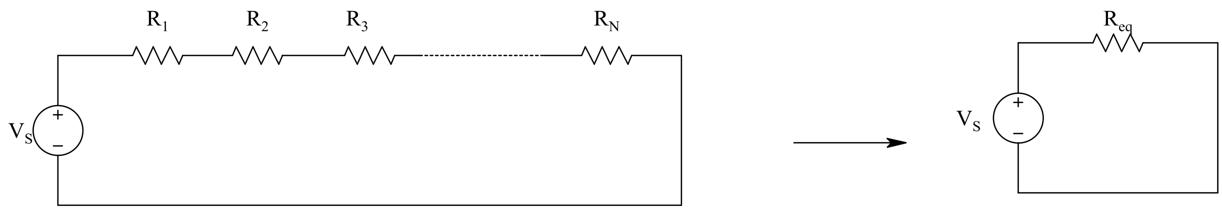
نام عنصر	مشخصه ی الکتریکی عنصر	رابطه ی ولتاژ بر حسب جریان (ولت Volt)	رابطه ی جریان بر حسب ولتاژ (آمپرA)	توضیحات
مقاومتبر حسب اهم (Ω)		$V_R(t)= R\,.\ i_R(t)$	$i_R(t)=\frac{V_R(t)}{R}$	قانون اهم خطی است .
خازنبر حسب فاراد (F)		$V_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_c\,(t)dt$	$i_c(t)=c\frac{dv_c}{dt}$	رابطه‌ی خازن غیر خطی است .
سلفبر حسب هانری (H)		$V_L\,(t)= L\,\frac{di_L}{dt}$	$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(t)\,dt$	رابطه‌ی سلف غیر خطی است .
منبع ولتاژ مستقلبر حسب ولت		-	-	-
منبع ولتاژ وابسته بر حسب ولت		-	-	مقدار ولتاژ منبع وابسته تابعی از ولتاژ یا جریان یکی از شاخه های مدار است . (یک تابع است و ثابت نیست)
منبع جریان مستقلبر حسب آمپر		-	-	-
منبع جریان وابستهبر حسب آمپر		-	-	مقدار جریان منبع جریان وابسته تابعی از ولتاژ یا جریانیکی از شاخه های مدار است و یک مقدار ثابت نیست بلکه یک تابع است.

جدول(۲) مربوط به عناصر الکتریکی برای جهت‌های متناظر ولتاژ و جریان یک شاخه **در حوزه فازور**

نام عنصر در حوزه ی فازور	**رابطه ی ولتاژ بر حسب جریان در حوزه ی فازور**	**رابطه ی جریان بر حسب ولتاژ در حوزه ی فازور**	**نام و مقدار عنصر و واحد آن در حوزه ی فازور**
مقاومت 	قانون اهم $V_R = R\ .\ i_R$	قانون اهم $i_R = \frac{V_R}{R}$	مقاومت بر حسب اهم
 امپدانس خازن	قانون اهم $V_c = Z_c\ .\ i_c$	قانون اهم $i_c = \frac{V_c}{Z_c}$	امپدانس خازن $Z_C = \frac{1}{J\omega C}$, $J = \sqrt{-1}$ بر حسب اهم (Ω)
 امپدانس‌سلف	قانون اهم $V_L = Z_L\ .\ i_L$	قانون اهم $I_L = \frac{V_L}{Z_L}$	امپدانس سلف $Z_L = J\omega L$ بر حسب اهم (Ω)

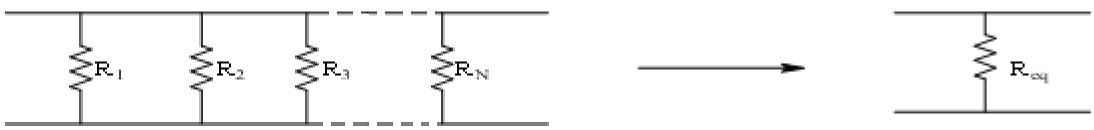
یادآوری: ترکیب موازی و سری مقاومت‌ها، خازن‌ها و سلف‌ها:

- ترکیب سری مقاومت‌ها



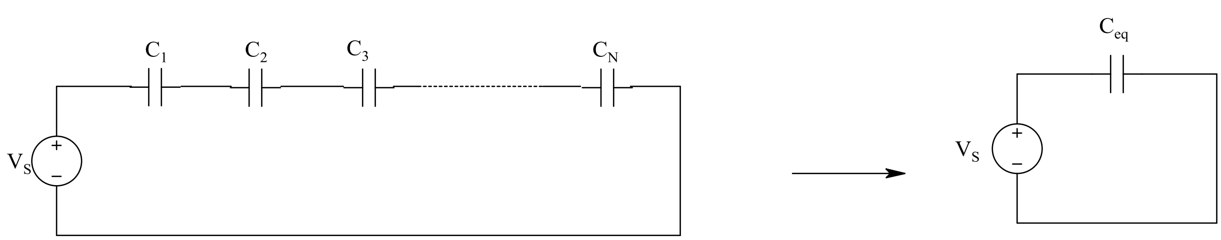
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_N$$

- ترکیب موازی مقاومت‌ها



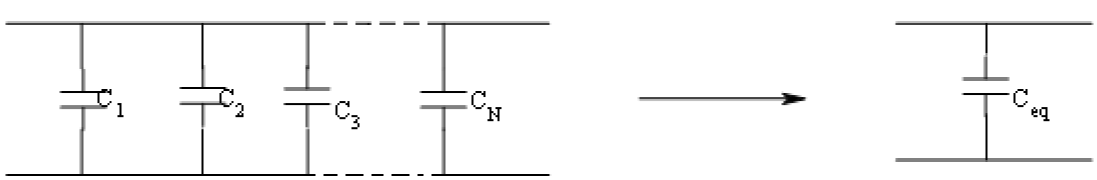
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N}$$

- ترکیب سری خازن‌ها



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_N}$$

- ترکیب موازی خازن‌ها

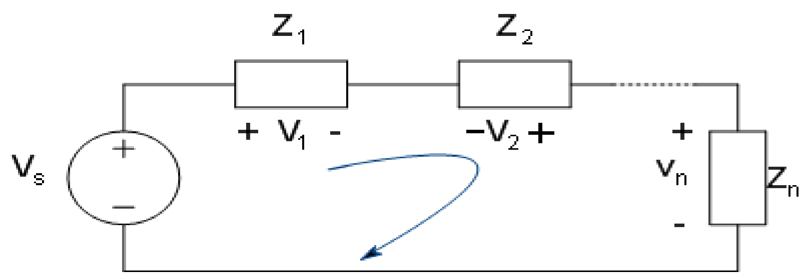


$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_N$$

نکته: ترکیب سری و موازی سلف‌ها و روابط آن‌ها همانند مقاومت‌ها می‌باشد.

رابطه تقسیم ولتاژ :

اگرnامپدانس سری باشند و بخواهیم ولتاژ دو سر یک امپدانس را بدست آوریم از رابطه زیر محاسبه می‌شود که به آن رابطه تقسیم ولتاژ می‌گویند.



$$v_k = \frac{Z_k}{(Z_1+Z_2+\cdots+Z_n)} v_s \quad (k = 1,2,\ldots,n)$$

رابطه تقسیم ولتاژ از نوشتن KVL در حلقه مدار به دست می‌آید. جهت ولتاژ V_K یا مثبت است یا منفی. برای تشخیص جهت V_K باید یک جهت برای حلقه در نظر بگیریم (ساعتگرد یا پادساعتگرد). در جهت حلقه ولتاژ V_S را با V_K مقایسه می‌کنیم. اگر جهت حلقه برای V_S و V_K هم علامت بود رابطه V_K منفی است و در غیر این صورت رابطه V_K مثبت است.

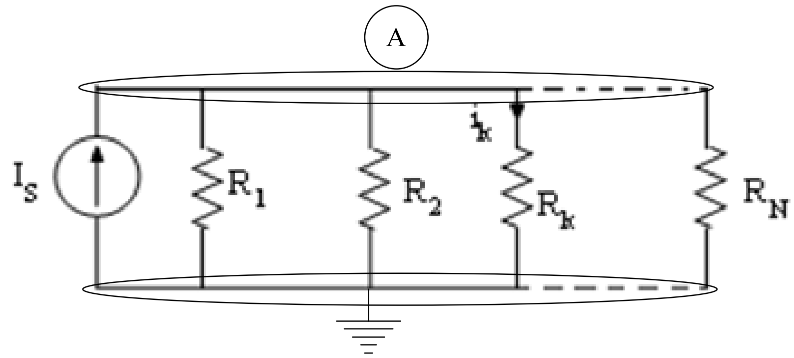
به عنوان مثال برای مدار فوق داریم:

$$v_1 = \frac{Z_1}{(Z_1+Z_2+\cdots+Z_n)} v_s, v_2 = \frac{-Z_2}{(Z_1+Z_2+\cdots+Z_n)} v_s$$

رابطه تقسیم جریان:

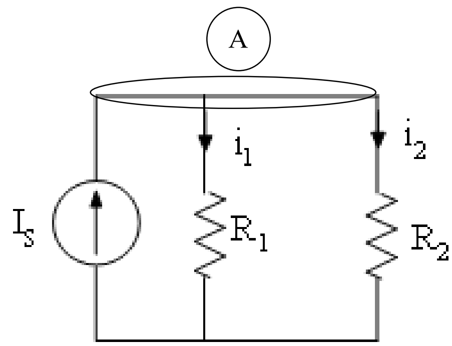
اگرnامپدانس موازی باشند و بخواهیمجریان عبوری از یک امپدانس را بدست آوریم از رابطه زیر محاسبه می-شود که به آن رابطه تقسیم جریان می‌گویند.

رابطه تقسیم جریان از نوشتن KCL در گره A به دست می‌آید.



$i_k = \frac{G_k}{\sum_{i=1}^{n} G_i} \times I_S$, $G_k = \frac{1}{R_k}$

نکته: این رابطه برای دو امپدانس موازی بسیار کاربرد دارد و برای این حالت خاص پس از ساده سازی فرمول داریم :



$i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2} \times I_S$, $i_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2} \times I_S$

نکته: برای تعیین علامت (+) یا (-) در روابط تقسیم جریان، در گره A جریان اصلی(I_S) رابا جریان مورد نظر مقایسه می‌کنیم. اگر هر دو به گره وارد یا خارج شوند عبارت دارای علامت منفی است در غیر این صورت مثبت است.

فصل دوم:

حل مدارهای مرتبه اول و مرتبه دوم

فصل دوم:

حل مدارهای مرتبه اول و مرتبه دوم

مدارهای ساده:

مدارهای ساده، مدارهایی هستند در حوزه زمان که در آن‌ها سلف و خازن وجود ندارد. روش حل مدارهای ساده مانند روش حل مدار در حوزه فازور است با این تفاوت که مقادیر مدارهای ساده در حوزه زمان عدد صحیح است و مقادیر در حوزه فازور و به طور کلی اعداد مختلط هستند. پس حل مدارهای ساده در حوزه زمان مانند حالت خاصی از حل مدارهای فازوری است که مقادیر عدد صحیح هستند. بنابراین تعاریفی مانند مدار معادل تونن، مدار معادل نورتن، تبدیل منابع و جمع آثار در قسمت فازور ارائه می‌گردد.

مدارهای مرتبه اول:

مدارهای مرتبه اول در حوزه زمان تعریف می‌شوند و مدارهایی هستند که پاسخ آن‌ها معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. این مدارها شامل مقاومت، منابع و یک خازن یا یک سلف هستند.

مدارهای مرتبه اول شامل خازن را مدارهای مرتبه اول RC و مدارهای مرتبه اول شامل سلف را مدارهای مرتبه اول RL می‌نامند.

توجه:

اگر مدار بیش از یک سلف یا یک خازن داشته باشد و آن‌ها با هم ساده شوند به طوری که معادل یک سلف یا یک خازن در مدار وجود داشته باشد آن مدار را نیز مدار مرتبه اول گویند.

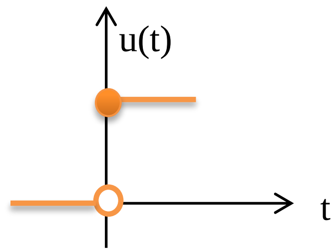
برای حل مدارهای مرتبه اول یادآوری توابع پله $u(t)$ و $u(-t)$ و هم‌چنین روش حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول ضروری است.

پس ابتدا این دو مبحث یادآوری می‌شود.

توابع پله u(t) و u(-t):

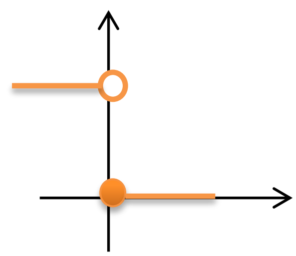
به u(t)تابع پله می‌گویند. اگر آرگومان این تابع صفر یا مثبت باشد مقدار تابع آن برابر با ۱ و اگر آرگومان منفی باشد، مقدار تابع برابر صفر خواهد بود. در شکل پایین تابع پله u(t) را مشاهده می‌کنید:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



تابع پله u(-t): اگر آرگومان یعنی (-t) مثبت باشد مقدار تابع پله u(-t) برابر یک است و اگر آرگومان یعنی (-t) برابر صفر یا منفی باشد مقدار تابع پله u(-t) برابر صفر است.

$$\mathrm{u}(-\mathrm{t}) = \begin{cases} 0 & t \geq 0 \\ 1 & \mathrm{t} < 0 \end{cases}$$



حل معادلات دیفرانسیل:

هر معادله دیفرانسیل از مرتبه nام دو جواب دارد. (دو پاسخ دارد.)

۱- پاسخ خصوصی
۲- پاسخ عمومی

اگر معادله دیفرانسیل مرتبه nام زیر را داشته باشیم:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + A_n \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + A_3 \frac{d^2 x}{dt^2} + A_2 \frac{dx}{dt} + A_1 x = B(t)$$

برای محاسبه پاسخ خصوصی باید مقدار B(t) بررسی شود .

B(t) یکی از مقادیر زیر را می تواند داشته باشد:

۱) $B(t) = k$ و k عددی ثابت غیر صفر است.

۲) $B(t) = 0$

۳) $B(t)$تابعی سینوسی است.

۴) $B(t)$ تابعی غیر سینوسی است.

۵) $B(t)$معادله دیفرانسیل بر حسب ورودی است.

اگر $B(t) = k$ باشد، باید در سمت چپ معادله دیفرانسیل فوق جملات دیفرانسیلی را برابر صفر قرار داد و $x(t)$ را به‌دست آورد که پاسخ خصوصی $x_p(t)$ خواهد یعنی داریم: پاسخ خصوصی $x(t)$ برابر است با:

$$x_p(t) = \frac{k}{A_1}$$

اگر $B(t) = 0$ باشد، پاسخ خصوصی $x(t)$ برابر است با $x_p(t) = 0$

اگر$B(t)$ تابعی سینوسی باشد یعنی داشته باشیم$B(t)=A\cos(\omega t + \theta)$، $x_p(t)$ازحل مدار در حوزه فازور به دست می‌آید.

اگر $B(t)$ تابعی غیر سینوسی باشد به مدار I مربوط نمی‌شود.

برای محاسبه پاسخ عمومی باید سمت راست معادله دیفرانسیل را برابر صفر قرار دادو سپس معادله مفسر را تشکیل داد و آن را حل کرد. بر مبنای ریشه‌های معادله، پاسخ به دست می‌آید که پاسخ رابا$x_h(t)$ نشان می‌دهیم. پاسخ$x(t)$ برابر حاصل جمع $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$ می‌باشد.

معادله مفسر یعنی قرار دادن عبارت S به جای عبارت دیفرانسیلی $\frac{d}{dt}$ و قرار دادن S^2 به جای عبارت دیفرانسیلی مرتبه دوم $\frac{d^2}{dt^2}$.

پس برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر

$$\frac{dx}{dt} + Ax = 0$$

معادله مفسر به صورت زیر است:

$$Sx + Ax = 0 \quad \rightarrow \quad x (S + A) = 0$$

برای محاسبه ریشه‌های S با ید عبارت $S + A$ را برابر صفر قرار داد. پس خواهیم داشت:

$S + A = 0 \quad \rightarrow \quad S = - A$

و برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

معادله مفسر به صورت زیر است:

$aS^2x + bSx + cx = 0 \quad \rightarrow \quad x (as^2 + bs + c) = 0$

برای محاسبه ریشه‌های S باید معادله درجه دوم معمولی دیفرانسیلی داخل پرانتز را حل کرد که از روش معمولی محاسبه Δ به دست می‌آید و خواهیم داشت:

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

یادآوری از درس معادلات دیفرانسیل :

در محاسبه ریشه ها زیر رادیکال (دلتای معادله مشخصه) مثبت، منفی یا صفر است.

اگر زیر رادیکال مثبت باشد پاسخ عمومی را فوق میرائی یا میرای شدید می‌گوییم وشامل دو ریشه حقیقی منفی بوده و پاسخ عمومی به صورت زیر است :

$$x_h(t) = k_1e^{s_1t} + k_2e^{s_2t}$$

اگر زیر رادیکال منفی باشد پاسخ عمومی را زیر میرائی یا میرای ضعیف می‌گوییم و دو ریشه مختلط داریم که پاسخ عمومی به صورت زیر خواهد بود:

$x_h(t) = (k_1\cos(\omega_d t) + k_2\sin(\omega_d t))\ e^{-\alpha t}$

$\omega_d = \sqrt{\omega^2{}_0 - \alpha^2}$

αوω_0از روی ضرایب معادله دیفرانسیل مشخص می‌شود. شکل کلی معادله دیفرانسیل به صورت زیر است که در آن α و ω_0مشخصمی‌باشد :

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2\ x = B(t)$

برای مثال در معادله $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4x = 0$ داریم:

$2\alpha = 2 \rightarrow \alpha = 1$

$\omega_0^2 = 4$

α را ضریب تضعیف یا ضریب میرایی یا ضریب نپر گویند و واحد آن یک بر ثانیه $(\frac{1}{s})$ یا هرتز (Hz) است و ω_0 را فرکانس زاویه‌ای گویند و واحد آن رادیان بر ثانیه است.

مقدارαرا مقاومت‌های مدار و مقدار ω_0 را سلف و خازن مدار تعیین می‌کنند. در مدار RLC سری یا موازی داریم:

$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

اگر زیر رادیکال (دلتای معادله مشخصه) صفر باشد پاسخ عمومی را میرائی بحرانی می‌گوییم و یک ریشه مضاعف داریم یعنی دو ریشه حقیقی مساوی داریم وپاسخ به صورت زیر است:

$$x_h(t) = (k_1 + k_2t)e^{st}$$

در تمام موارد فوق k_1 و k_2 از روی شرایط اولیه به دست می‌آیند.

اگر $\alpha= 0$ باشد پاسخ عمومی را بدون اتلاف نامیده و به صورت زیر است:

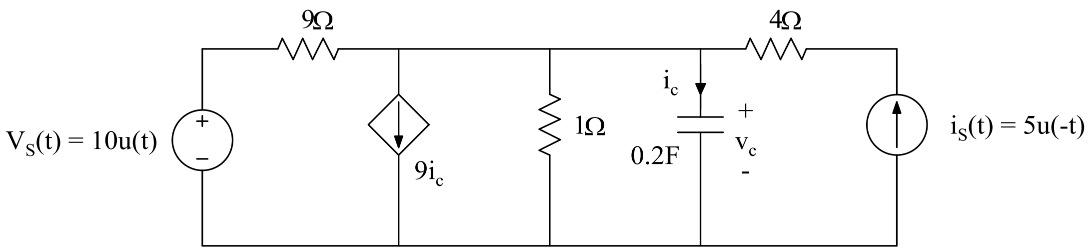
$X_h(t) = k\cos(\omega_0 t + \Theta)$

که k و Θ از شرایط اولیه به دست می‌آید.

مدارهای مرتبه اول :

با ذکر یک مثال روش حل این مدارها توضیح داده می‌شود.

مثال۱) در مدارشکل زیر مطلوب است$v_c(t)$ برای تمام زمان ها.



دراین مثال فقط ولتاژشاخه خازن یعنی $V_c(t)$ خواسته شده است که بامحاسبه آن تمام مجهولات به دست می-آید.

نکته: همه زمان ها یعنی در $t \geq 0$ یا در حالت کلی یعنی در $t \geq t_0$

مراحل حل مدار:

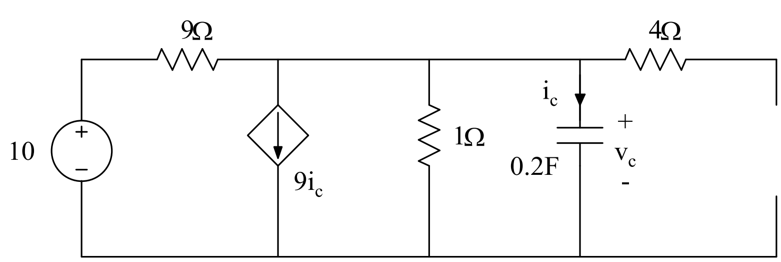
گام اول) رسم مدار در $t \geq 0$: برای رسم مدار در $t \geq 0$ باید تکلیف توابع u(t) و u(-t) را مشخص کرد.

با توجه به توابع پله u(t) و u(-t) و نکات زیر باید مدار را در لحظات $t \geq 0$ رسم کرد.

نکته۱ : منبع جریان با مقدار صفر مانند مدار باز است زیرا جریان گذرنده از مدار باز نیز صفر است.

نکته۲ : منبع ولتاژ با مقدار صفر مانند اتصال کوتاه است زیرا ولتاژ اتصال کوتاه نیز صفر است.

رسم مدار در $t \geq 0$



در این‌جا شاخه منبع جریان مدار باز است زیرا دارای تابع پله u(-t) است که در t≥0 برابر صفر است و شاخه منبع ولتاژ برابر ۱۰ می‌شود زیرا در t≥0 مقدار u(t) برابر ۱ می‌باشد.

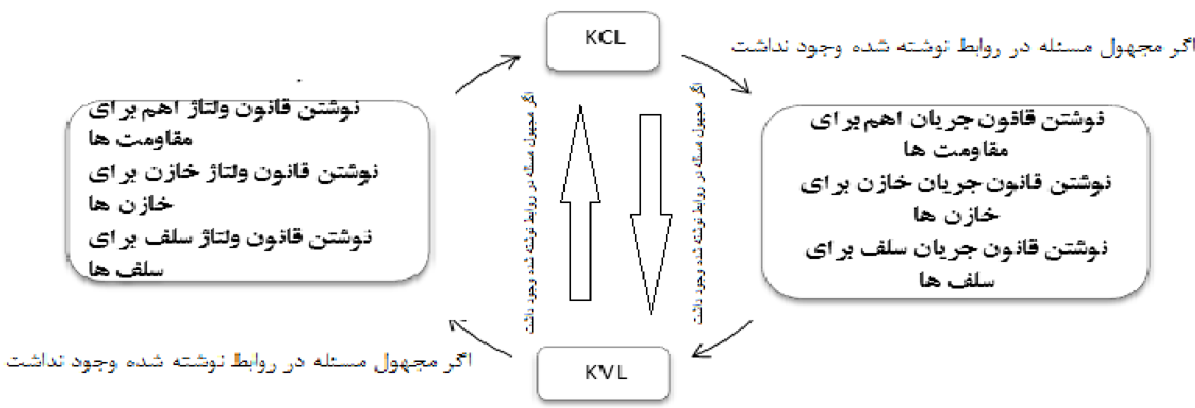
گام دوم) ساده کردن مدار: یعنی در صورت ساده شدن، مقاومت‌های موازی با هم ساده شوند و مقاومت‌های سری نیز با هم ساده شوند.

گام سوم) همیشه حل مدار را با نوشتن KCL آغاز می‌کنیم مگردر موارد خاصبه شرح ذیل :

۱- زمانی که مساله از ما خواسته باشد که ابتدا حل از KVL شروع شود.
۲- زمانی که گره‌ای برای نوشتن KCL وجود نداشته باشد.

در موارد خاص بالا حل مدار را ابتدا با KVL شروع می‌کنیم .

گام چهارم) معادلات kvl یا kcl را بر اساس خواسته مساله و الگوریتم زیر بر حسب مجهول مورد سوال (جریان یا ولتاژ) می‌نویسیم.



پس برای حل مثال۱ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) رسم مدار در $t \geq 0$

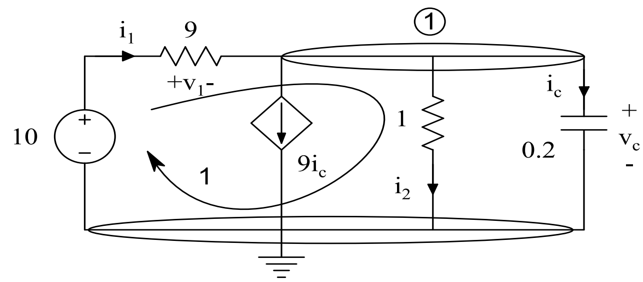
۲) پیدا کردن گره‌ها. (این مدار چهار گره دارد که فقط برای گره ۱رابطه kcl می‌نویسیم زیرا گره ۲ مدار باز و گره ۳ سری و دیگری گره مبناست.)

۳) چون خواسته مساله از جنس ولتاژ است پس برای kcl نوشته شده قانون اهم و خازن را می‌نویسیم.

۴) نوشتن kvl و برابر شدن تعداد مجهولات با تعداد معادلات

۵) حل معادلات و به دست آوردن یک معادله دیفرانسیلی بر حسب مجهول مورد نظر

با توضیحات فوق، شکل مدار به صورت زیر می‌باشد:



توجه کنید که انتخاب جهت جریان و ولتاژ برای هر شاخه دلخواه است و در صورت نامتناظر انتخاب شدن بایستی علامت منفی در فرمول‌ها لحاظ شود.

Kcl 1: $i_1 = 9i_c + i_2 + i_c \rightarrow\ i_1 = 10i_c + i_2 \xrightarrow{\text{قانون اهم و قانون خازن}} \frac{v_1}{9} = 2\,\frac{dv_c}{dt} + v_c \quad (1)$

دقت شود در kcl 1 مجهول $v_c(t)$ وجود ندارد پس باید قانون جریان اهم را برای i_1 وi_2 و قانون جریان خازن را برای i_c نوشت.

$i_1 = \frac{v_1}{9} \quad , \quad i_2 = \frac{v_c}{1} \quad , \quad i_c = c\,\frac{dv_c}{dt} = 2\,\frac{dv_c}{dt}$

Kvl : $v_1 + v_c - 10 = 0 \ \rightarrow\ v_1 = 10 - v_c \quad (2)$

(۱) در (۲) جایگذاری$\rightarrow \frac{10 - v_c}{9} = 2\,\frac{dv_c}{dt} + v_c \rightarrow\ 2\,\frac{dv_c}{dt} + \frac{10}{9}\,v_c = \frac{10}{9}$

مرتب نویسی$\rightarrow \frac{dv_c}{dt} + \frac{5}{9}\,v_c = \frac{5}{9}$

منظور از مرتب نویسی نوشتن معادله دیفرانسیل بر حسب مرتبه مشتق به صورتی که بالاترین مرتبه مشتق دارای ضریب یک باشد و جمله اول رابطه در سمت چپ باشد.

قبل از شروع به حل مدار می‌توان تشخیص داد، آیا معادله دیفرانسیل در مدار وجود دارد یا نه ؟ و اگر معادله دیفرانسیل وجود دارد مرتبه چندم است؟

اگر مدار فاقد سلف یا خازن باشد معادله دیفرانسیل وجود ندارد . اما اگر مدار شامل سلف یا خازن باشد به تعداد سلف‌ها یا خازن‌هایی که قابل ساده شدن نباشد معادله دیفرانسیل از آن مرتبه وجود دارد . یعنی:

اگر یک خازن در مدار باشد معادله دیفرانسیل مرتبه اول داریم.

اگر یک سلف در مدار باشد معادله دیفرانسل مرتبه اول داریم.

اگر دو خازن در مدار باشد که با هم ساده نشوند معادله دیفرانسیل مرتبه دوم داریم.

اگر دو سلف در مدار باشد که با هم ساده نشوند معادله دیفرانسیل مرتبه دوم داریم.

اگر یک خازن و یک سلف در مدار باشد که با هم ساده نشوند معادله دیفرانسیل مرتبه دوم داریم.

اگر n سلف یا خازن در مدار باشد که با هم ساده نشوند معادله دیفرانسیل مرتبه nام داریم.

محاسبه پاسخ خصوصی و عمومی مثال۱ به شرح زیر است:

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{5}{9}v_c = \frac{5}{9} \to v_{c_p}(t) = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{5}{9}} = 1$$

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{5}{9}v_c = 0 \ \to Sv_c + \frac{5}{9}v_c = 0 \to \left(S + \frac{5}{9}\right)v_c = 0$$

و عبارت $V_C=0$ پاسخ نیست. پس در معادله مفسر نیازی به نوشتن مجهول V_C وجود ندارد و معادله مفسر فوق به صورت زیر است:

$$S + \frac{5}{9} = 0 \to S = -\frac{5}{9}$$

پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت زیر است:

$$x_h(t) = \mathrm{K}e^{st}$$

$$v_{c_h}(t) = ke^{\frac{-5}{9}t}$$

$$v_c(t) = v_{c_p}(t) + v_{c_h}(t) = 1 + ke^{\frac{-5}{9}t} \ \to v_c(\cdot) = 1 + k$$

$V_c(0)$ یعنی $v_c(0^+)$ زیرا رابطه به دست آمده از روی مدار رسم شده در $t\geq0$ است و برای این زمان وقتی t را مساوی صفر قرار دهیم $v_c(0^+)$ به دست می‌آید.

اگر مقدار $v_c(0^+)$ به عنوان فرض مساله داده شده باشد، مقدار k به‌دست می‌آید.

فرض مسئله $\rightarrow v_c(0^+) = 0/9$

$v_c(\cdot^+) = 1 + k$

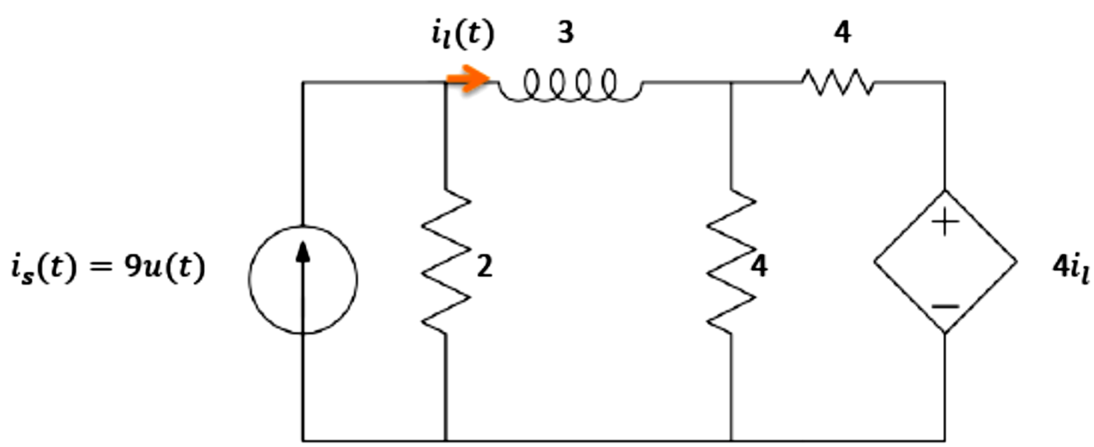
$\rightarrow 1 + k = 0/9 \rightarrow k = -0/1$

$v_c(t) = 1 - 0/1\, e^{\frac{-5}{9}t}$

نکته: به $v_C(0^+)$ شرایط اولیه می‌گویند. نحوه به دست آوردن شرایط اولیه را در قسمت‌های بعدی خواهد آمد.

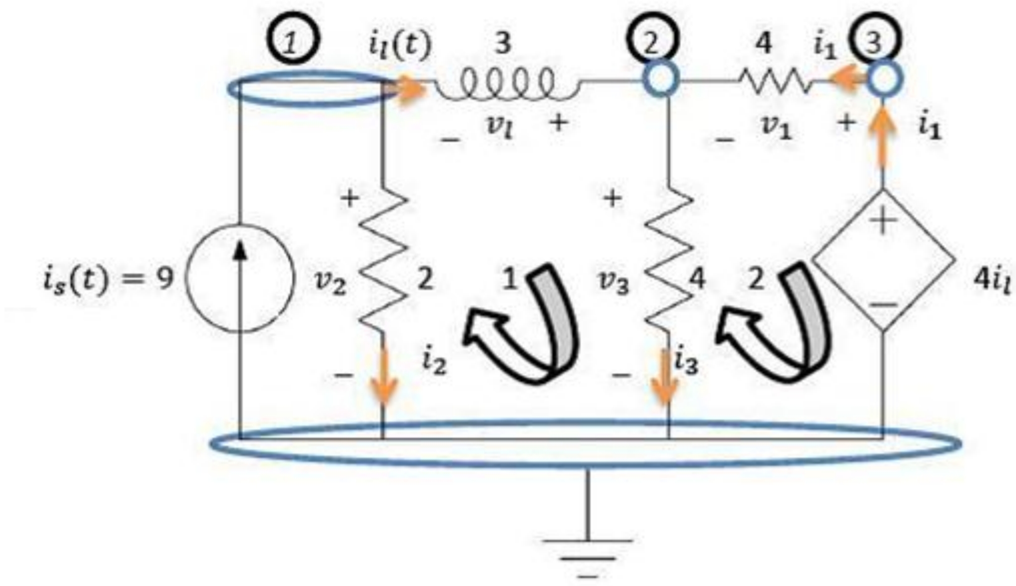
مثال ۲)

در مدار شکل زیر $i_L(t)$ را برای همه ی زمان ها بدست آورید.



حل:گام اول : رسم مدار در $t\geq 0$ که مقدار $u(t) = 1$ خواهد شد و داریم $is(t) = 9$ (A)

رسم مدار در $t\geq0$ به شکل زیر است:



گام دوم : نوشتن KCL در گره‌های 1و۲

Kcl 1: $9 = i_2 + i_L$ (1)

Kcl 2: $i_L + i_1 = i_3$ (2)

در Kclهای نوشته شده جریان i_L به عنوان مجهول مساله وجود دارد پس بعد از نوشتن kcl باید kvl بنویسیم.

KVL 1: $-v_2 - v_l + v_3 = 0$

چون مجهول مساله $i_L(t)$ و از جنس جریان است پس باید برای ولتاژها قانون اهم بنویسیم تا بر حسب جریان بیان شوند.

$v_2 = 2i_2$, $v_L = -3\frac{di_L}{dt}$, $v_3 = 4i_3$

جایگذاری $\rightarrow KVL$ 1: $-2i_2 + 3\frac{di_L}{dt} + 4i_3 = 0$ (3)

KVL 2 : $-v_1 + 4i_l - v_3 = 0 \xrightarrow{\text{نوشتن قانون اهم}} -4i_1 + 4i_L - 4i_3 = 0$ (4)

(۱) در (۳) جایگذاری$\longrightarrow$ $-2(9 - i_L) + 3\frac{di_L}{dt} + 4i_3 = 0 \rightarrow 4i_3 = -3\frac{di_L}{dt} - 2i_L + 18$

$\rightarrow i_3 = \frac{-3}{4}\frac{di_L}{dt} - \frac{1}{2}i_L + \frac{9}{2}$ (5)

جایگذاری (۵) در (۲)$\rightarrow i_L + i_1 = \frac{-3}{4}\frac{di_L}{dt} - \frac{1}{2} i_L + \frac{9}{2} \rightarrow\ i_1 = \frac{-3}{4}\frac{di_L}{dt} - \frac{3}{2} i_L + \frac{9}{2} \quad (6)$

جایگذاری (۵) و (۶) در (۴)$\rightarrow\ -4(\frac{-3}{4}\frac{di_L}{dt} - \frac{3}{2} i_L + \frac{9}{2}) + 4i_L - 4(\frac{-3}{4}\frac{di_L}{dt} - \frac{1}{2} i_L + \frac{9}{2}) = 0$

$\rightarrow\ 6\frac{di_L}{dt} + 12i_L = 36\ \rightarrow\ \frac{di_L}{dt} + 2i_L = 6$

حال باید معادله دیفرانسیل را حل کرد و i_Lرا بدست آورد.

$$\frac{di_L}{dt} + 2i_L = 6 \rightarrow i_{L_p}(t) = 3A$$

$$\frac{di_L}{dt} + 2i_L = 0 \rightarrow S + 2 = 0 \rightarrow S = -2 \quad \rightarrow i_{L_h}(t) = ke^{-2t}$$

$$i_L(t) = 3 + ke^{-2t}$$

مقدار اولیه $i_L(0) = 0$

$i_L(0) = 3 + k$

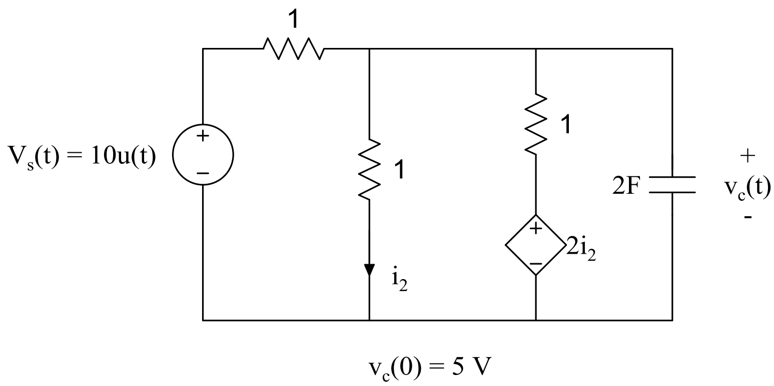
فرض مسئله: $i_L(0) = 0$

$\rightarrow\ k = -3$

$\rightarrow\ i_L(t) = 3 - 3e^{-2t}$

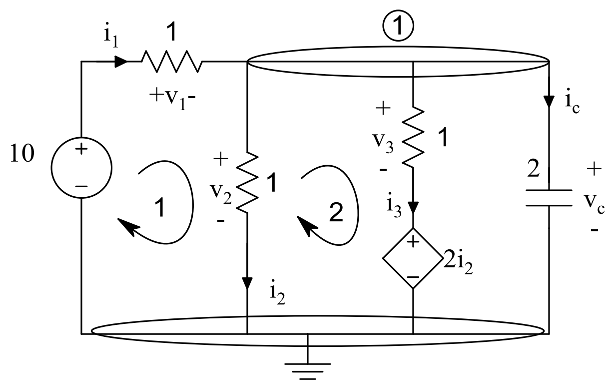
مثال۳)

در مدار شکل زیر$i_2(t)$ را برای $t \geq 0$ بدست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$

خازن و مقاومت ۱ اهم با هم موازی هستند پس ولتاژهایشان را مساوی در نظر می‌گیریم یعنی $V_2=V_C$



Kcl 1: $i_1 = i_2 + i_3 + i_c$ (1)

مجهول i_2 در kcl1 وجود دارد بنابراین مرحله بعد نوشتن kvl است:

Kvl 1: $v_1 + v_2 - 10 = 0 \rightarrow i_1 + i_2 - 10 = 0$ (2)

Kvl 2: $v_3 + 2i_2 - v_2 = 0 \rightarrow i_3 + 2i_2 - i_2 = 0 \rightarrow i_3 + i_2 = 0$ (3)

$v_2 = v_c \rightarrow i_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} i_c(t)dt \rightarrow i_c = 2\frac{di_2}{dt}$ (4)

(1)در(2),(3),(4) جایگذاری $\rightarrow 10 - i_2 = i_2 - i_2 + 2\frac{di_2}{dt} \rightarrow \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{2} i_2 = 5$

برای بدست آوردن پاسخ خصوصی $i_{2_p}(t)$ باید در معادله دیفرانسیل جمله دیفرانسیلی $\frac{di_2}{dt}$مساوی صفر قرار داد و پاسخ خصوصی را بدست آورد یعنی داریم :

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{2} i_2 = 5 \rightarrow i_{2_p}(t) = 10$$

برای محاسبه پاسخ عمومی $i_{2_h}(t)$ باید معادله دیفرانسیل را مساوی صفر قرار داد و معادله مفسر را نوشت .

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{2} i_2 = 0 \rightarrow S + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \mathrm{S} = -\frac{1}{2} \rightarrow i_{2_h}(t) = ke^{-\frac{1}{2}t}$$

حال باید پاسخ خصوصی $i_{2_p}(t)$ و پاسخ عمومی $i_{2_h}(t)$را با هم جمع کرد . خواهیم داشت :

$$i_2(t) = i_{2_p}(t) + i_{2_h}(t) \rightarrow i_2(t) = 10 + ke^{-\frac{1}{2}t}$$

$$\mathrm{i}_2(0^+) = \mathrm{v}_2(0^+) = \mathrm{v}_c(0^+) \xrightarrow{\text{فرض مساله}} \mathrm{v}_c(0^+) = 5$$

$$\mathrm{i}_2(0^+) = \mathrm{k} + 10 = 5 \rightarrow \mathrm{k} = -5$$

$$\mathrm{i}_2(\mathrm{t}) = -5\, e^{\frac{-1}{2}t} + 10$$

فرض کنید در مسئله خواسته بودند پاسخ پله $i_2(t)$ و پاسخ ضربه $i_2(t)$ را بدست آورید . زمانی می‌توانیم پاسخ پله بدست آوریم که حداقل یکی از منابع مستقل مدار دارای تابع پله $\mathrm{u(t)}$باشد و پاسخ ضربه زمانی به دست می‌آید که حداقل یکی از منابع مستقل مدار دارای تابع ضربه $\delta(t)$ باشد که تابع ضربه $\delta(t)$ مشتق تابع پله $\mathrm{u(t)}$است یعنی داریم:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

<u>**پاسخ پله**</u> را با $\mathrm{S(t)}$نشان می‌دهیم و برابر است با $i_2(t)$ در تابع $\mathrm{u(t)}$. یعنی داریم :

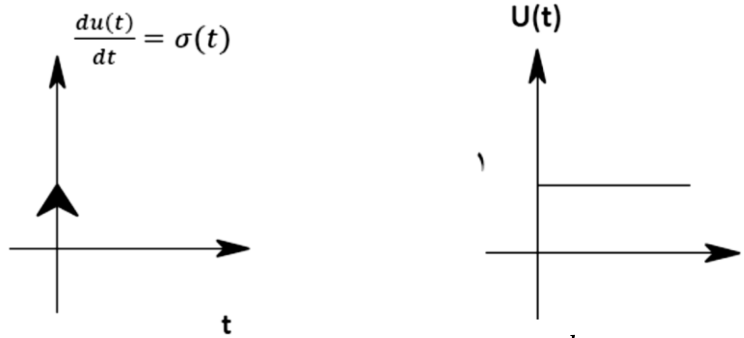
$$S(t) = i_2(t).u(t) \rightarrow S(t) = \left(10 - 5e^{-\frac{1}{2}t}\right).u(t)$$

<u>**پاسخ ضربه**</u>$i_2(t)$ که آنرا با$\mathrm{h(t)}$ نشان می‌دهیم از مشتق پاسخ پله$\mathrm{S(t)}$ به دست می‌آید. داریم:

$$h(t) = \frac{d}{dt} S(t) = \frac{5}{2} e^{-\frac{1}{2}t}\, u(t) + (10 - 5e^{-\frac{1}{2}t}) \frac{d}{dt} u(t)$$

مشتق تابع پله در تمام زمانها برابر صفر است به جز در$\mathrm{t=0}$ که دومقدار دارد. در$\mathrm{t=0^-}$ مقدار آن صفر است و در $\mathrm{t=0^+}$مقدار آن یک می‌باشد . بنابراین مشتق تابع پله در $\mathrm{t=0}$ مقداری دارد که به آن تابع ضربه می‌گویند.

برای یادآوری مجددا تابع پله u(t) را رسم کرده و در کنار آن مشتق تابع پله u(t) یعنی $\delta(t)$ را نیز رسم می‌کنیم.



با این توضیحات در رابطه‌ی h(t) به جای $\frac{d}{dt}u(t)$ مقدار آن یعنی $\delta(t)$ تابع ضربه را قرار می‌دهیم . خواهیم داشت:

$$h(t)=\frac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\,u(t)+\left(10-5e^{-\frac{1}{2}t}\right)\delta(t)$$

از آنجا که تابع $\delta(t)$ به ازای همه‌ی tها صفر است به جز در t=0 پس می‌توان گفت وقتی در رابطه‌ای عبارت $\delta(t)$ وجود داشت حتما باید عبارتی که در $\delta(t)$ ضرب شده است بجای tهای آن صفر قرار داد. پس در این مثال داریم :

$$h(t)=\frac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\,u(t)+(10-5)\delta(t)=\frac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\,u(t)+5\delta(t)$$

از خواص تابع ضربه اینا‌ست که مساحت آن برابر یک است یعنی :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

ثابت زمانی: به لحظه‌ای می‌گویند که در آن لحظه توان تابع نمایی e برابر ۱- شود. در مدار I، مدارهای مرتبه اول دارای ثابت زمانی است. در این مثال ثابت زمانی را بدست آورید.

$$-\frac{1}{2}t=-1\ \rightarrow t=2$$

یادآوری : $e^{-1}\simeq 0/37$

ثابت زمانی را با T یا τ نشان می‌دهند . دریک ثابت زمانی ، خازن و سلف به اندازهٔ ۰/۶۳ شارژ یا دشارژ می‌شوند و به ۰/۳۷ مقدار اولیه خود می‌رسند .

شروع لحظه بی‌نهایت (∞)برابر با لحظهٔ ۴ ثابت زمانی است و تمام لحظات بعد از آن همه بی‌نهایت محسوب می‌شوند. بنابراین برای مثال بالا داریم:

$i_2(\infty) = i_2(4\tau) = - 5\, e^{-4} + 10$

$$e^{-4} = 0/018 \simeq 0$$

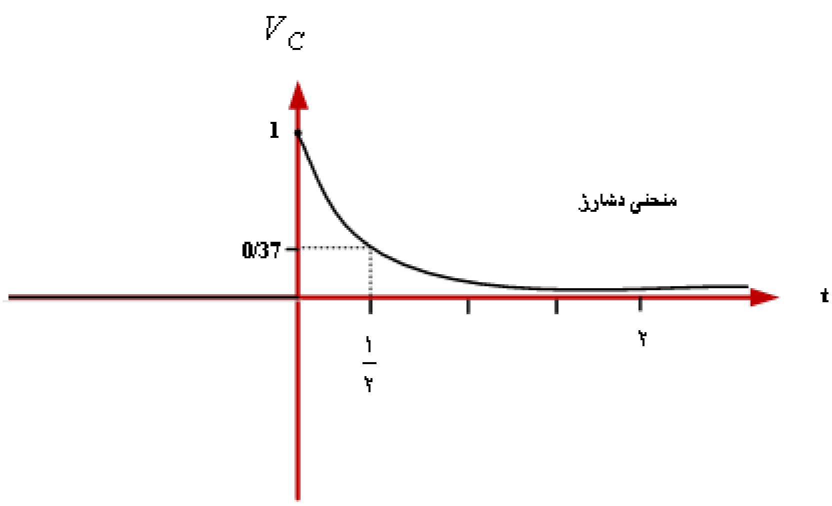
$\rightarrow i_2(\infty) = 10$

مثال۴)پاسخ یک مدار به صورت زیر است:

$v_c(t) = e^{-2t}\, u(t)$

مطلوبست رسم پاسخ$V_C(t)$ و محاسبه ثابت زمانی.

$-2t = -1 \;\rightarrow t = \frac{1}{2}$



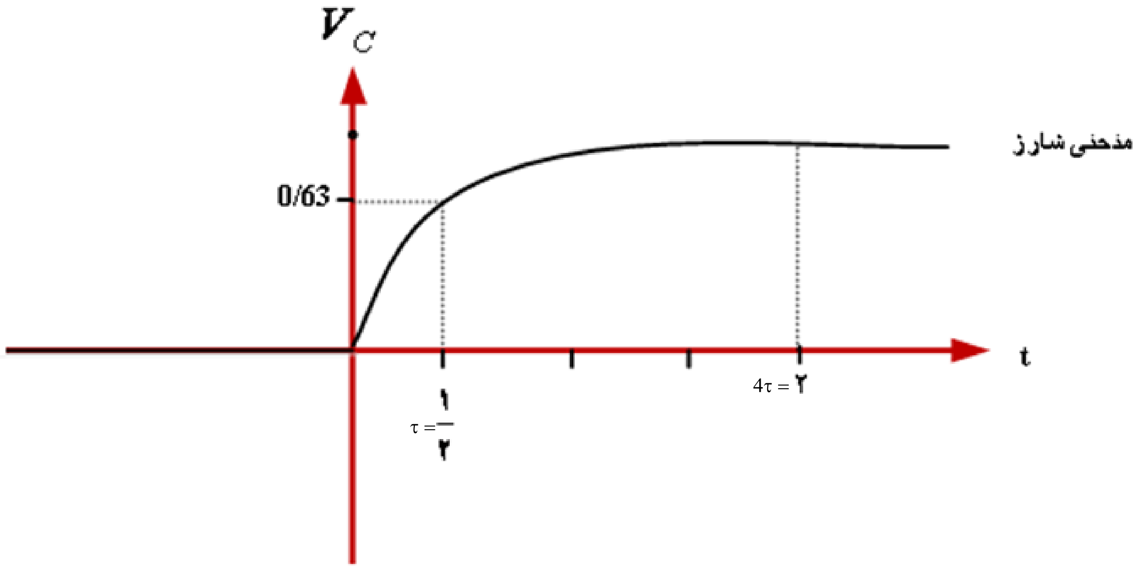
مثال۵)

پاسخ یک مدار به صورت زیر است:

$v_c(t) = (\, 1- e^{-2t}\,)\, u(t)$

مطلوبست رسم پاسخ و محاسبه ثابت زمانی.

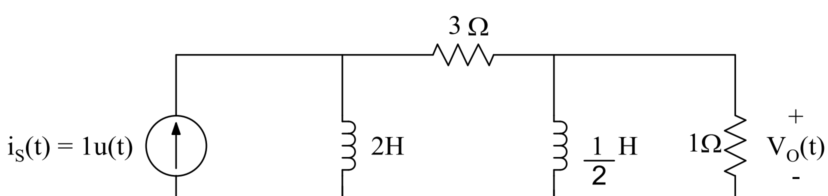
$-2t = -1 \;\rightarrow t = \frac{1}{2}$



برای حل معادلات دیفرانسیل علاوه بر شرایط اولیه به مقادیر اولیه نیز نیاز داریم. در این بخش محاسبه شرایط و مقادیر اولیه را بررسی می کنیم و در ادامه به بررسی مدارهای مرتبه دوم می‌پردازیم. الگوریتم حل این مدارها مانند مدارهای مرتبه اول است و همان گام‌ها را باید طی کرد، با این تفاوت که در نهایت به یک معادله دیفرانسیلی از نوع مرتبه دوم خواهیم رسید. با ذکر مثالی به بررسی این مدارها می‌پردازیم:

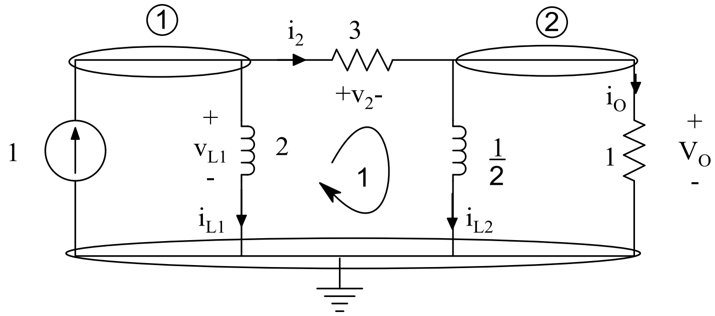
مثال 6)

برای مدار شکل زیر $v_O(t)$ را بدست آورید .«برای تمام زمان ها»



$i_{L1}(0) = i_{L2}(0) = 0$ A

رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $1 = i_{L1} + i_2 \rightarrow \ 1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} v_{L1}(t)dt + \frac{v_2}{3}$ (1)

Kcl 2: $i_2 + i_{L2} + i_O \rightarrow \frac{v_2}{3} = 2\int_{-\infty}^{t} V_O(t)dt + V_O$ (2)

چون مجهول $v_o(t)$ در رابطه kcl 1 وجود ندارد باید از روی جدول (۱) قانون جریان اهم را برای i_2 و قانون جریان سلف را برای i_{L1} نوشت و در رابطه kcl 2 قانون جریان اهم را برای i_2 و i_o و قانون جریان سلف را برای i_{L2} نوشت.

Kvl 1: $v_2 + V_O - v_{L1} = 0$ (3)

از رابطه (۲)$\rightarrow$ $v_2 = 6\int_{-\infty}^{t} V_O(t)dt + 3V_O$ (4)

از رابطه (۳)$\rightarrow$ $v_{L1} = v_2 + V_O = 6\int_{-\infty}^{t} V_O(t)dt + 4V_O$ (5)

جایگذاری (۴)،(۵) در (۱)$\rightarrow$ $1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}\left(6\int_{-\infty}^{t} V_O(t)dt + 4V_O\right)dt + 2\int_{-\infty}^{t} V_O(t)dt + V_O$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} 0 = 3\int_{-\infty}^{t} V_O(t)dt + 2V_O + 2V_O + \frac{dv_O}{dt} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{d^2v_O}{dt^2} + 4\frac{dv_O}{dt} + 3V_O = 0$

$$\frac{d^2v_O}{dt^2} + 4\frac{dv_O}{dt} + 3v_O = 0 \rightarrow v_{O_p}(t) = 0$$

$$S^2 + 4S + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad S_1 = -1 \quad \text{و} \quad S_2 = -3$$

دو ریشه حقیقی منفی وجود دارد بنابراین پاسخ عمومی به صورت زیر است:

$$v_{O_h}(t) = k_1e^{s_1t} + k_2e^{s_2t}$$

روش به دست آوردن پاسخ عمومی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم در مثال بعد آمده است.

$$v_O(t) = v_{O_p}(t) + v_{O_h}(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t}$$

برای به دست آوردن ضرایب k_1 و k_2 باید مقدار $v_O(0^+)$ و $\frac{dV_O}{dt}|_{t=0^+}$ را بدانیم. در این جا فرض می‌کنیم $v_O(0^+) = 1$ و $\frac{dV_O}{dt}|_{t=0^+} = -4$. (محاسبه شرایط اولیه و و مقادیر اولیه را در مثال بعد توضیح خواهیم داد.)

$v_O(0^+) = k_1 + k_2$

فرض $v_o(0^+) = 1$

$\rightarrow\ k_1 + k_2 = 1\ (*)$

$\frac{dV_O}{dt} = -k_1 e^{-t} - 3k_2 e^{-3t}$

$\frac{dV_O}{dt}|_{t=0^+} = -k_1 - 3k_2$

فرض $\frac{dV_O}{dt}|_{t=0^+} = -4$

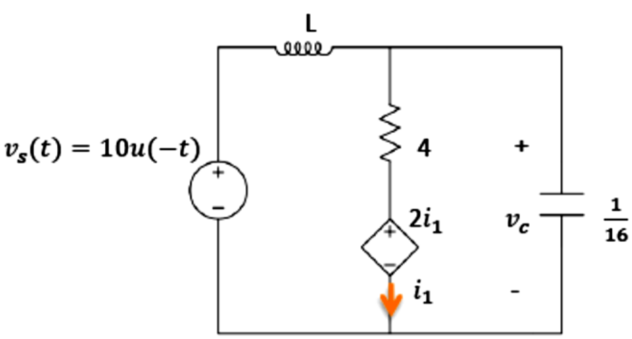
$\rightarrow\ -k_1 - 3k_2 = -4\ (**)$

$(*), (**)\ \rightarrow\ k_1 = \frac{-1}{2}\ ,\quad k_2 = \frac{3}{2}$

$$v_O(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t}$$

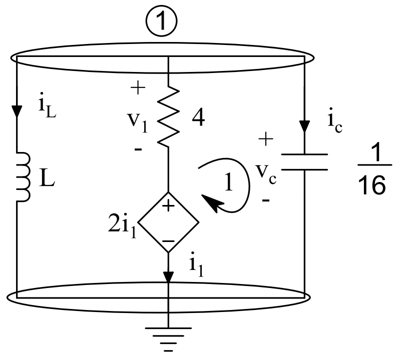
مثال۷)

در مدار شکل زیر L را طوری بیابید که پاسخ عمومی $v_c(t)$ میرائی بحرانی باشد و سپس $v_c(t)$ را بدست آورید.



گام اول : رسم مدار در $t \geq 0$

در $t \geq 0$ مقدار $u(-t) = 0$ است پس شکل به صورت زیر در می‌آید:



Kcl 1: $i_L + i_1 + i_c = 0 \xrightarrow{\text{قانون اهم}} \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_c(t)dt + \frac{v_1}{4} + \frac{1}{16}\frac{dv_c}{dt}$ (1)

Kvl 1: $v_c - 2i_1 - v_1 = 0 \rightarrow v_c - \frac{v_1}{2} - v_1 = 0 \rightarrow v_1 = \frac{2}{3} v_c$ (2)

(1),(2) $\rightarrow \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_c(t)dt + \frac{v_c}{6} + \frac{1}{16}\frac{dv_c}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{8}{3}\frac{dv_c}{dt} + \frac{16}{L} v_c = 0$

پاسخ خصوصی $V_{o_p}(t) = 0$ است زیرا سمت راست معادله دیفرانسیل برابر صفر است.

برای محاسبه پاسه عمومی $V_{o_h}(t)$ مروری بر درس معادلات دیفرانسیل انجام می‌دهیم و سپس ادامه مثال را حل می‌کنیم.

ادامه حل مثال:

برای داشتن پاسخ عمومی میرائی بحرانی باید مقدار زیر رادیکال را مساوی صفر قرار داد، یعنی در این مثال داریم :

$\frac{64}{9} - 4\left(\frac{16}{L}\right) = 0 \rightarrow L = 9$ H

با این مقدار بدست آمده برای L ریشه‌های معادله به صورت زیر است:

$S_1 = S_2 = \frac{-4}{3}$

$v_{ch}(t) = (k_1 + k_2t)\, e^{\frac{-4}{3}t}$, $v_{op}(t) = 0$

$v_o(t) = v_{ch}(t) + v_{op}(t) = (k_1 + k_2t)\, e^{\frac{-4}{3}t}$

برای محاسبه ضرایب k_1 و K_2 باید شرایط اولیه مشخص باشد.

به طور کلی برای محاسبه ضرایب در یک معادله دیفرانسیل مرتبه nام باید شرایط اولیه تا مشتقمرتبه(n-1)ام مشخص باشد.

اگر معادله دیفرانسیل مرتبه nام زیر را داشته باشیم:

$$\frac{d^nx}{dt^n} + \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + \frac{dx}{dt} + x = B(t)$$

شرایط اولیه یعنی :

$$x(0^+) \ , \ \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0^+} \ , \ \frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0^+} \ , \ \ldots \ , \ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\Big|_{t=0^+}$$

در این مثال معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است. پس شرایط اولیه به صورت زیر است :

$$v_c(0^+) \ , \ \frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+}$$

$$\frac{dv_c}{dt} = k_2 e^{\frac{-4}{3}t} - \frac{4}{3} e^{\frac{-4}{3}t} (k_1 + k_2t)$$

$$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = k_2 - \frac{4}{3} k_1$$

$$v_c(0^+) = k_1$$

شرایط اولیه برای $t=0^+$است زیرا روابط را برای مدار در $t \geq 0$نوشته‌ایم و در این روابط وقتی t=0 شود مقادیر برای $t=0^+$ محاسبه خواهد شد.

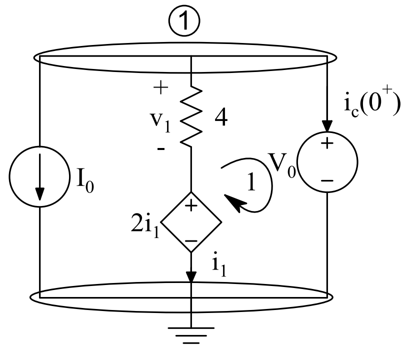
در این مثال $v_c(0^+)$ و $\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+}$ داده نشده است و باید آن‌ها را از روی مدار به دست آورد. برای محاسبه آن‌ها باید مدار را در $t=0^+$ رسم کرد. یعنی فقط برای یک لحظه مدار را لازم داریم آن هم لحظه‌ی $t=0^+$است.

برای رسم مدار فقط در یک لحظه‌ی $t=0^+$ باید همان مدار با همان جهت‌های داده شده در بازه$t \geq 0$را در نظر گرفت و به جای خازن منبع ولتاژ مستقل با مقدار V_0 و به جای سلف منبع جریان مستقل با مقدارI_0 قرار داد.

برای محاسبه $\frac{dv_c}{dt}|_{t=0^+}$ ابتدا باید رابطه$\frac{dv_c}{dt}$را نوشت و سپس در tهای آن صفر قرارداد. این رابطه در مسیر به دست آوردن معادله دیفرانسیل مدار نوشته شده است با ملاحظه به روابط داریم :

$i_c = \frac{1}{16}\frac{dv_c}{dt} \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = 16i_c \rightarrow \frac{dv_c}{dt}|_{t=0^+} = 16i_c(0^+)$

رسم مدار در $t = 0^+$



Kcl 1: $I_0 + i_1 + i_c(0^+) = 0$ (1)

Kvl 1: $V_0 - 2i_1 - v_1 = 0 \rightarrow V_0 - 2i_1 - 4i_1 = 0 \rightarrow i_1 = \frac{V_0}{6}$ (2)

(1),(2) $\rightarrow I_0 + \frac{V_0}{6} + i_c(0^+) = 0 \rightarrow i_c(0^+) = - I_0 - \frac{V_0}{6}$

V_0 و I_0 را مقادیر اولیه گویند اما$v_c(0^+)$ و $\frac{dv_c}{dt}|_{t=0^+}$را شرایط اولیه می‌نامند.

چرا در لحظه‌ی $t=0^+$ به جای خازن منبع ولتاژ مستقل قرار می‌دهیم و چرا مقدار آن را V_0 می‌گوییم؟و همینطور چرا در لحظه‌ی$t=0^+$ به جای سلف منبع جریان مستقل قرار می‌دهیم و چرا مقدار آنرا I_0 می‌نامیم؟

پاسخ: از رابطه‌ی ولتاژ بر حسب جریان خازن با جهت‌های متناظر که در جدول داده شده است می‌توان انتگرال را به دو قسمت تقسیم کرد . خواهیم داشت:

$$v_c(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i_c(t)dt = \frac{1}{c}\left(\int_{-\infty}^{0} i_c(t)dt + \int_{0}^{t} i_c(t)dt \right)$$

$= \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{0} i_c(t)dt + \frac{1}{c}\int_{0}^{t} i_c(t)dt$

اگر جمله اول را ملاحظه کنیم می‌بینیم حاصل $\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{0} i_c(t)dt$ برابر یک عدد است که به آن V_0 می‌گوییم یعنی داریم:

$$\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{0} i_c(t)dt = V_0$$

با قرار دادن این مقدار در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$v_c(t) = V_0 + \frac{1}{c}\int_{0}^{t} i_c(t)dt$$

در این‌جا اگر مقدار انتگرال را به جای t صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$v_c(0^+) = V_0 = v_c(0^-)$$

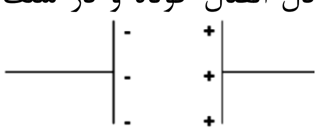
بنابراین می‌توان گفت خازن تغییر آنی ولتاژ ندارد (مگر در موارد خاص مانند ورودی ضربه). از این رو در لحظه ی $t=0^+$ به جای خازن منبع ولتاژ مستقل قرار می‌دهیم و ازآنجا که $v_c(0^+) = v_c(0^-)$ می‌باشد مقدار این منبع ولتاژ مستقل را V_0 یعنی $v_c(0^-)$ قرار می‌دهیمو به همین ترتیب درمورد سلف می‌توان گفت سلف تغییر آنی جریان ندارد (مگر در موارد خاص مانند ورودی ضربه) ، بنابراین $i_L(0^+) = \mathrm{i}_L(0^-) = I_0$ می‌باشد.

برای محاسبه مقادیر اولیه V_0 و I_0 باید مداررا در یک لحظه‌ی $t=0^-$ رسم کرد.رسم مدار در لحظه‌ی $t=0^-$ از روی مدار اصلی به دست می‌آید. در لحظه‌ی $t=0^-$ باید به جای سلف و خازن یا اتصال کوتاه قرار داد یا مدار باز.

در لحظه‌ی $t=0^-$ اگر مدار منبع مستقل داشت چه منبع مستقل ولتاژ و چه منبع مستقل جریان، در اینصورت سلف و خازن شارژ شده‌اند و اگر در لحظه‌ی $t=0^-$ مدار فاقد منبع مستقل بود، سلف و خازن دِشارژ هستند.با فرض این که مدار در بی نهایت (یعنی حداقل به مدت چهار ثابت زمانی (4τ))در وضعیت $t< 0$ بوده است.

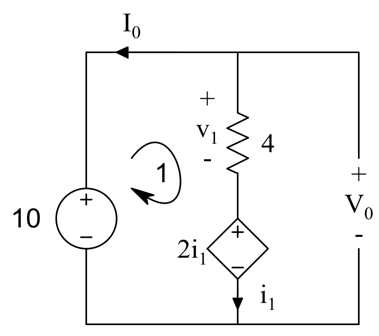
حالت خاصی نیز وجود دارد که مدار در کمتر از 4τ در یک وضعیت خاص بوده است که در آن‌جا موضوع V_0 و I_0 متفاوت است.

اگر خازن شارژ باشد یعنی بارهای مثبت و منفی روی صفحات از همدیگر جدا شده‌اند و جریانی عبور نمی‌کند. مثل شکل زیر. بنابراین خازن شارژ شده معادل مدار باز است و خازن دشارژ معادل اتصال کوتاه و در سلف برعکس است.



رسم مدار در $t = 0^-$

در این مدار منبع مستقل $v_s(t) = 10$ وجود دارد زیرا در مدار اصلی $v_s(t) = 10\,u(-t)$ بوده است که طبق تعریف تابع $u(-t)$ در $t = 0^-$ برابر یک است، بنابراین در $t= 0^-$ داریم $v_s(t) = 10$



$V_0 = 10$(موازی با منبع)

برای محاسبه I_0، رابطه kvl 1 را می‌نویسیم:

Kvl 1: $v_1 + 2i_1 - 10 = 0 \;\rightarrow\; 4i_1 + 2i_1 = 10$

$\rightarrow\; i_1 = \frac{5}{3}$

$I_0 = -\,i_1 \rightarrow\; I_0 = \frac{-5}{3}$

$v_c(t) = (\,k_1 + k_2 t\,)\, e^{\frac{-4}{3}t}$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0 = 10$

$v_c(0^+) = k_1$

$\rightarrow\quad k_1 = 10$

$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = 16 i_c(0^+) = 16\,(-\,I_0 - \frac{V_0}{6}\,) = 0$

$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = k_2 - \frac{4}{3}k_1 = k_2 - \frac{40}{3}$

$\rightarrow\; k_2 = \frac{40}{3}$

$v_c(t) = (\,10 + \frac{40}{3}t\,)\, e^{\frac{-4}{3}t}$

برای $v_c(t)$ پاسخ پله و پاسخ ضربه را نیز به دست آورید.

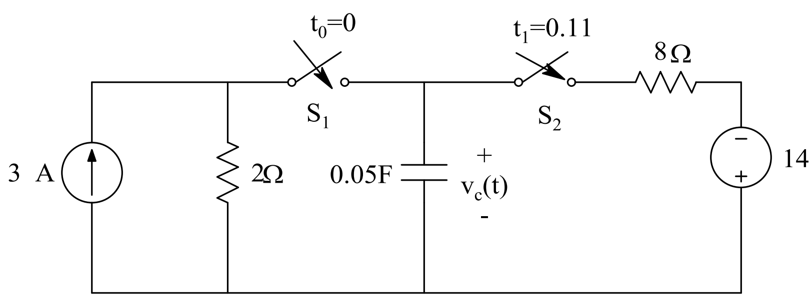
$$S(t) = \{ (10 + \frac{40}{3}t) e^{\frac{-4}{3}t} \} u(t)$$

$$h(t) = \{ \frac{40}{3} e^{\frac{-4}{3}t} - \frac{4}{3} e^{\frac{-4}{3}t} (10 + \frac{40}{3}t) \} u(t) + \delta(t) \{ (10 + \frac{40}{3}t) e^{\frac{-4}{3}t} \}$$

$$h(t) = \{ \frac{40}{3} e^{\frac{-4}{3}t} - \frac{4}{3} e^{\frac{-4}{3}t} (10 + \frac{40}{3}t) \} u(t) + 10\, \delta(t)$$

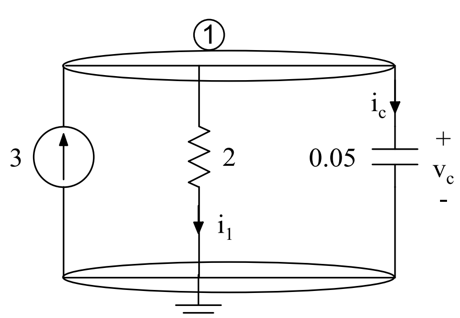
مثال۸) مدار با دو ثابت زمانی

در مدار شکل زیر ابتدا کلید S_1 در لحظه $t_0 = 0$ و سپس کلید S_2 در لحظه $t_1= 0.11$ ثانیه بسته می‌شود. با فرض اینکه $v_c(0) = 0$ باشد، $v_c(t)$ را برای $t \geq 0$ بدست آورید.



وقتی در مدار کلید داریم بسته به اینکه چه زمانی کلیدها عمل می‌کنند مدارهای مختلفی وجود دارد. در این مدار، یک مدار در بازه $0 \leq t < 0/11$ وجود دارد که فقط کلید s_1 بسته می‌شود و کلید s_2 باز است و در بازه $t \geq 0/11$ مدار دیگری وجود دارد بنابراین باید دو مدار را حل کرد.

رسم مدار در $0 \leq t < 0/11$



Kcl 1: $3 = i_1 + i_c \rightarrow\ 3 = \frac{v_c}{2} + 0/05\,\frac{dv_c}{dt}$

$\frac{dv_c}{dt} + 10v_c = 60$

$v_c(t) = k\,e^{-10\,t} + 6$

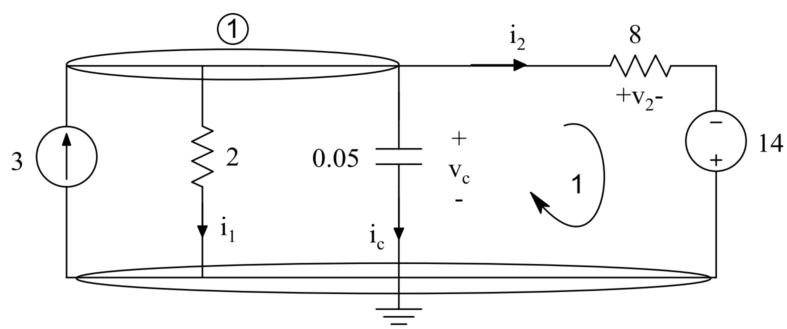
$v_c(0^+) = 0$

$v_c(0^+) = k + 6$

$\rightarrow\ k = -6$

$v_c(t) = -6\,e^{-10\,t} + 6 \qquad (0 \leq t\ < 0/11\,)$

رسم مدار در $t \geq 0/11$



Kcl 1: $3 = i_1 + i_c + i_2 \rightarrow\ 3 = \frac{v_c}{2} + 0/05\,\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_2}{8}\quad (1)$

Kvl 1: $v_2 - 14 - v_c = 0\ \rightarrow\ v_2 = 14 + v_c\quad (2)$

$(1),(2)\ \rightarrow\ 3 = \frac{v_c}{2} + 0/05\,\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{8} + \frac{7}{4} \rightarrow \frac{dv_c}{dt} + \frac{25}{2}\,v_c = 25$

با توجه به اینکه کلید s2 در لحظه t = 0/11 بسته می‌شود بنابراین در پاسخ عمومی به جای لحظه t باید t-0/11 قرار داد که وقتی t=0/11 می‌شود توان e برابر صفر باشد.

به طور کلی می‌توان گفت وقتی مدار در لحظات $t \geq t_0$ رسم می‌شود باید در پاسخ عمومی زمان t_0 لحاظ شود بنابراین پاسخ عمومی به صورت زیر است :

$$x_h(t) = ke^{s(t-t_0)}$$

زیرا باید به ازای $t = t_0$ توان e برابر صفر شود . در این مثال پاسخ عمومی $v_{c_h}(t)$ بصورت زیر است :

$$v_{c_h}(t) = ke^{\frac{-25}{2}(t-0/11)}$$

$$v_c(t) = k\, e^{\frac{-25}{2}(t-0/11)} + 2$$

شرایط اولیه در این حالت یعنی $v_c(t = 0/11^+)$ زیرا تشکیل این مدار از لحظه $t = 0/11$ است که کلید s_2 بسته می‌شود.

$$v_c(0/11^-) = v_c(0/11^+)$$

برای محاسبه $v_c(0/11^-)$ باید رابطه‌ی بدست آمده برای $v_c(t)$ در $0 \leq t < 0/11$ به ازای $t = 0/11$ محاسبه کرد.

$$v_c(t) = 6 - 6e^{-10t} \qquad 0 \leq t < 0/11$$

خواهیم داشت :

$$v_c(0/11^-) = 6 - 6e^{-1/1}$$

$$e^{-1/1} \cong 0/3 \;\rightarrow\; v_c(0/11^-) = 6 - 6 \times 0/3 = 6 - 1/8 = 4/2$$

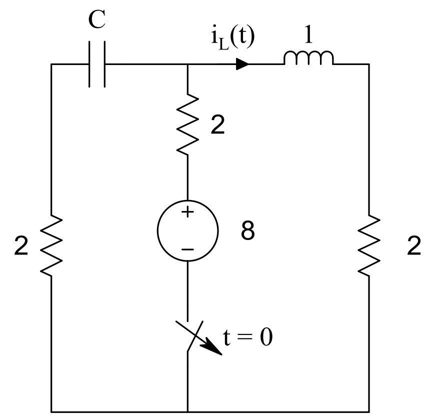
$$v_c(0/11^+) = k + 2$$

$$\rightarrow\; k = 2/2$$

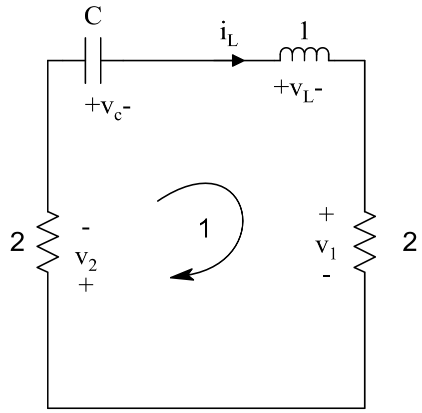
$$v_c(t) = 2/2e^{\frac{-25}{2}(t-0/11)} + 2 \quad (t \geq 0/11)$$

مثال۹)

در مدار شکل زیر کلید k مدت‌ها بسته بوده و در لحظه‌ی $t = 0$ باز می‌شود. خازن C را به گونه‌ای به دست آورید که پاسخ عمومی جریان $i_L(t)$ میرائی بحرانی باشد. سپس $i_L(t)$ را به دست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



مدار سری بوده و نباید kcl بنویسیم پس شروع حل از kvl می‌باشد.

Kvl 1: $v_L + v_1 + v_2 + v_c = 0$

مجهول مساله یعنی $i_L(t)$ در معادله وجود ندارد بنابراین باید برای v_1 و v_2 قانون ولتاژ اهم و برای v_2 قانون ولتاژ سلف و برای v_c قانون ولتاژ خازن را نوشت. (همه جهت‌ها متناظر است.)

$$\longrightarrow \frac{di_L}{dt} + 2i_L + 2i_L + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_L(t)dt = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 4\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C}(i_L) = 0$$

$$i_{L_p}(t) = 0$$

برای محاسبه پاسخ عمومی معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم :

$$S^2 + 4S + \frac{1}{C} = 0$$

$$S = -2 \pm \sqrt{4 - \frac{1}{C}}$$

برای داشتن پاسخ عمومی میرائی بحرانی باید مقدار زیر رادیکال صفر شود بنابراین داریم :

$4 - \frac{1}{C} = 0 \rightarrow C = \frac{۱}{۴}F$

$i_{L_h(t)=}(K_1 + K_2 t)e^{-2t}$

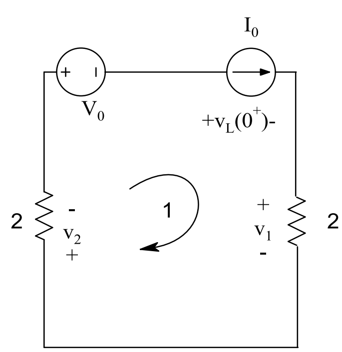
$i_L(t) = i_{L_h(t)+} i_{L_P(t)} \rightarrow i_L(t) = \left(K_1 + K_2 t\right) e^{-2t}$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$

$\frac{di_L}{dt}|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = v_L(0^+)$

برای محاسبه $v_L(0^+)$ = $\frac{di_L}{dt}|_{t=0^+}$رسم مدار در $t = 0^+$

برای رسم مدار در $t = 0^+$به جای سلف منبع جریان مستقل با مقدارI_0 و به جای خازن منبع ولتاژ مستقل با مقدار V_0 قرار می‌دهیم .



Kvl 1: $V_0 + v_L(0^+) + v_1 + v_2 = 0$

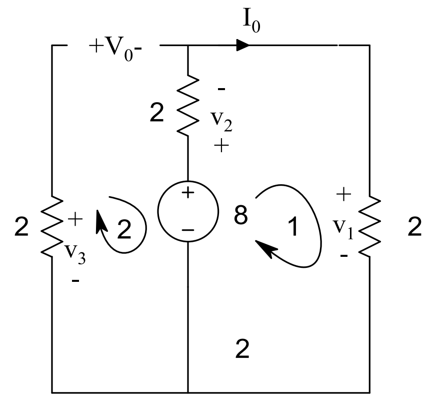
$\rightarrow V_0 + v_L(0^+) + 2I_0 + 2I_0 = 0$

$\rightarrow v_L(0^+) = - V_0 - 4I_0$

برای محاسبه I_0 و V_0 رسم مدار در لحظه‌ی $t=0^-$ لازم است (I_0 و V_0 را مقادیر اولیه می‌نامند.)

رسم مدار در $t = 0^-$

در لحظه $t = 0^-$ چون منبع ولتاژ مستقل $v_s(t) = 8$ وجود دارد بنابراین سلف و خازن شارژ می‌باشند و خازن شارژ شده معادل مدار باز و سلف شارژ شده معادل اتصال کوتاه است.



Kvl 1: $v_1 - 8 + v_2 = 0$

$\rightarrow\ 2I_0 - 8 + 2I_0 = 0\ \rightarrow\ I_0 = 2\ \text{A}$

Kvl 2: $V_0 - v_2 - v_3 = 0$

$V_0 - 4 - 0 = 0\ \rightarrow\ V_0 = 4$ volt

$i_L(t) = \left(K_1 + K_2 t\right) e^{-2t}$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0 = 2$

$i_L(0^+) = K_1$

$\rightarrow k_1 = 2$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \ v_L(0^+) = -V_0 - 4I_0 = -4 - 8 = -12$

$\frac{di_L}{dt} = k_2 e^{-2t} - 2e^{-2t}(k_1 + k_2 t)$

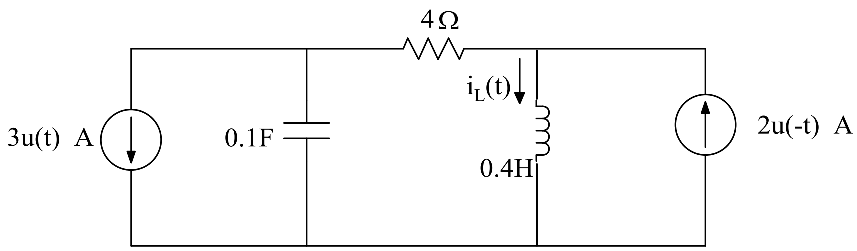
$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = k_2 - 2k_1 = k_2 - 4$

$\rightarrow\ k_2 = -8$

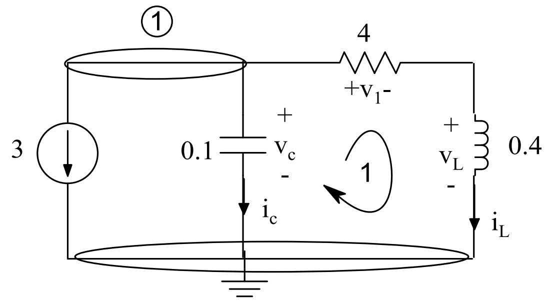
$i_L(t) = (2 - 8t)e^{-2t}$

مثال۱۰)

جریان $i_L(t)$ را برای تمام زمان‌ها به دست آورده و پاسخ پله و پاسخ ضربه $i_L(t)$ را نیز محاسبه کنید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $3 + i_c + i_L = 0$ (1)

مجهول مساله $i_L(t)$ در رابطه kcl 1 وجود دارد بنابراین مرحله بعد نوشتن kvl است.

Kvl 1: $v_1 + v_L - v_c = 0 \rightarrow 4i_L + 0/4\,\frac{di_L}{dt} - 10\int_{-\infty}^{t} i_c(t)dt = 0$ (2)

(1),(2) $\rightarrow 4i_L + 0/4\,\frac{di_L}{dt} - 10\int_{-\infty}^{t}(-i_L - 3)dt = 0 \rightarrow 0/4\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 4\,\frac{di_L}{dt} + 10i_L = -30$

$\rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 10\,\frac{di_L}{dt} + 25i_L = -75$

$i_{L_p}(t) = -\frac{75}{25} = -3A$

برای محاسبه پاسخ عمومی $i_{L_h}(t)$ باید معادله مفسر را تشکیل داد:

$$s^2 + 10s + 25 = 0 \quad \rightarrow s = -5 \pm \sqrt{25 - 25} = -5$$

یک ریشه‌ی مضاعف حقیقی منفی داریم پس پاسخ عمومی میرائی بحرانی است.

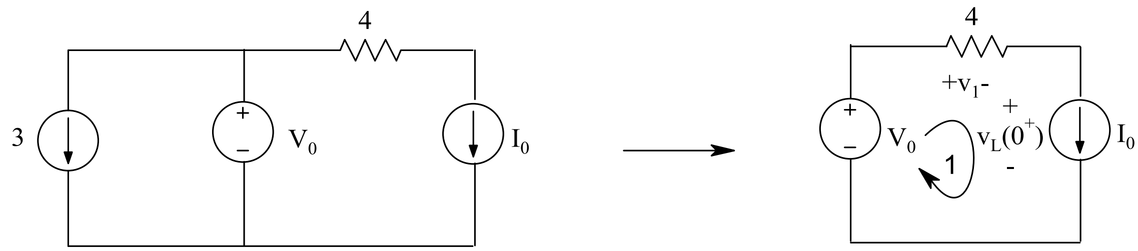
$i_L(t) = (k_1 + k_2 t)\, e^{-5t} - 3$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{v_L(0^+)}{0/4} = \frac{10}{4} v_L(0^+)$

برای محاسبه شرایط اولیه $i_L(0^+)$ و $\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{10}{4} v_L(0^+)$ باید مدار را در لحظه‌ی $t=0^+$رسم کنیم.

رسم مدار در $t = 0^+$

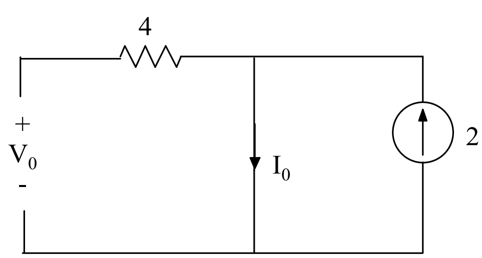


نکته: منبع جریان موازی با منبع ولتاژ از مدار حذف می‌شود.

Kvl 1: $v_1 + v_L(0^+) - V_0 = 0 \;\rightarrow\; v_L(0^+) = V_0 - v_1 = V_0 - 4I_0$

برای محاسبه I_0 و V_0رسم مدار در لحظه ی $t=0^-$ لازم است :

رسم مدار در $t = 0^-$



$I_0 = 2$, $V_0 = 0$

$i_L(t) = (k_1 + k_2 t)\, e^{-5t} - 3$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0 = 2$

$i_L(0^+) = k_1 - 3$

$\rightarrow\; k_1 = 5$

$\frac{di_L}{dt} = (k_2)\, e^{-5t} - 5e^{-5t}(k_1 + k_2 t)$

$\frac{di_L}{dt}|_{t=0^+} = k_2 - 5k_1 = k_2 - 25$

$\frac{di_L}{dt}|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{0/4} = \frac{10}{4} v_L(0^+) = \frac{10}{4} (0 - 8) = -20$

$\rightarrow k_2 = 5$

$i_L(t) = (5 + 5 t) e^{-5 t} - 3$

پاسخ پله: $s(t) = i_L(t).u(t)$

$s(t) = [-3 + (5 + 5t)e^{-5t}]u(t)$

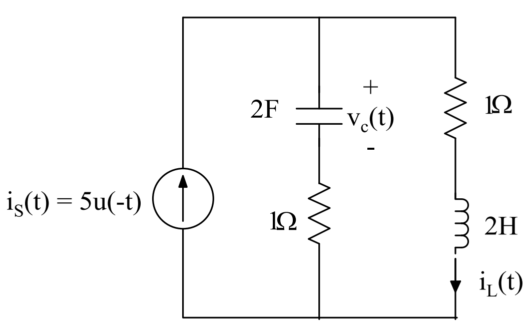
پاسخ ضربه : $h(t) = \frac{d}{dt} s(t)$

$h(t) = [5e^{-5t} - 5e^{-5t}(5 + 5t)]u(t) + [-3 + (5 + 5t)e^{-5t}]\delta(t)$

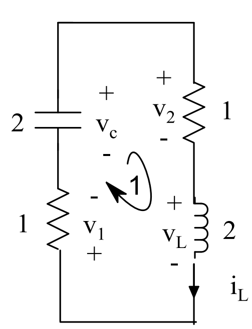
$$h(t) = (-20e^{-5t} - 25te^{-5t})u(t) + 2\delta(t)$$

مثال۱۱)

مطلوبست محاسبه $i_L(t)$ برای تمام زمان‌ها.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kvl1: $v_2 + v_L + v_1 - v_c = 0$

$\rightarrow$ $i_L + 2\frac{di_L}{dt} + i_L - (-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} i_L(t)dt) = 0$

$\rightarrow$ $2\frac{di_L}{dt} + 2\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{2}i_L = 0 \rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{4}i_L = 0$

برای به دست آوردن پاسخ عمومی $i_{L_h}(t)$ باید معادله مفسر را بنویسیم.

$$i_{L_p}(t) = 0$$

$$s^2 + s + \frac{1}{4} = 0$$

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-1}}{2} = -\frac{1}{2}$$

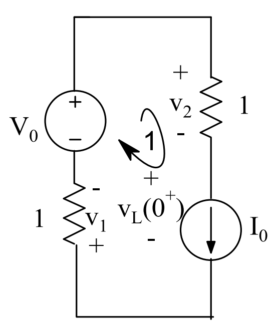
$i_{Lh}(t) = (k_1 + k_2 t) e^{\frac{-1}{2}t}$

$i_L(t) = i_{Lh}(t) + i_{L_p}(t) = (k_1 + k_2 t) e^{\frac{-1}{2}t}$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{1}{2}v_L(0^+)$

برای محاسبه $\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{1}{2}v_L(0^+)$ رسم مدار در $t=0^+$

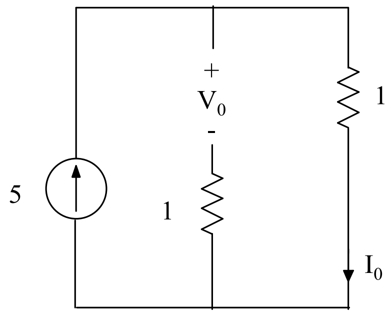


Kvl 1: $v_2 + v_L(0^+) + v_1 - V_0 = 0$

$\rightarrow$ $I_0 + v_L(0^+) + I_0 - V_0 = 0$

$\rightarrow$ $v_L(0^+) = -2I_0 + V_0$

برای محاسبه I_0 و V_0 رسم مدار در $t = 0^-$



$\rightarrow$ $I_0 = 5$, $V_0 = 5$

$i_L(t) = (k_1 + k_2 t)\, e^{\frac{-1}{2}t}$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0 = 5$

$i_L(0^+) = k_1$

$\rightarrow k_1 = 5$

$\frac{di_L}{dt} = k_2 e^{\frac{-1}{2}t} - \frac{1}{2} e^{\frac{-1}{2}t} (k_1 + k_2 t)$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = k_2 - \frac{1}{2} k_1 = k_2 - \frac{5}{2}$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{1}{2} v_L(0^+) = -I_0 + \frac{1}{2} V_0 = -5 + \frac{5}{2} = \frac{-5}{2}$

$\rightarrow k_2 = 0$

$i_L(t) = 5\, e^{\frac{-1}{2}t}$

پاسخ پله و پاسخ ضربه را به دست آورید.

$S(t) = i_L(t)u(t)$

$S(t) = 5e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$

$h(t) = \frac{d}{dt}S(t) = -\frac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}t}u(t) + 5e^{-\frac{1}{2}t}\delta(t)$

$h(t) = -\frac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}t}u(t) + 5e^{-\frac{1}{2}t}\delta(t)$

اکنون که با حل مدارهای مرتبه اول و دوم آشنا شدیم توجه به نکته زیر می‌تواند سرعت حل ما را در این گونه مدارها افزایش دهد.

نکته:

مدار در حالت ورودی صفر: اگر مدار در بازه زمانی $t < 0$ منبع مستقل داشته باشد و در بازه زمانی $t \geq 0$ فاقدمنبع مستقل باشد، مدار را در حالت ورودی صفر گویند. در این مدارها پاسخ خصوصی برابر صفر خواهد بود و فقط پاسخ عمومی خواهیم داشت.

مدار در حالت صفر: اگر مدار در بازه زمانی $t < 0$ فاقد منبع مستقل باشد و در بازه زمانی $t \geq 0$ منبع مستقل داشته باشد، مدار را در حالت صفر گویند. در مداری که در حالت صفر است و داریم:

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0 = 0$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0 = 0$$

بنابراین در مدارهایی که در حالت صفر هستند نیازی به رسم مدار در $t = 0^-$ نداریم زیرا می‌دانیم که V_0 و I_0 صفر هستند.

مدار در حالت کامل: اگر مدار در $t < 0$ منبع مستقل داشته باشد و در $t \geq 0$ نیزمنبع مستقل داشته باشد، مدار را در حالت کامل گویند که در اینجا V_0 و I_0 لزوما صفر نیستند.

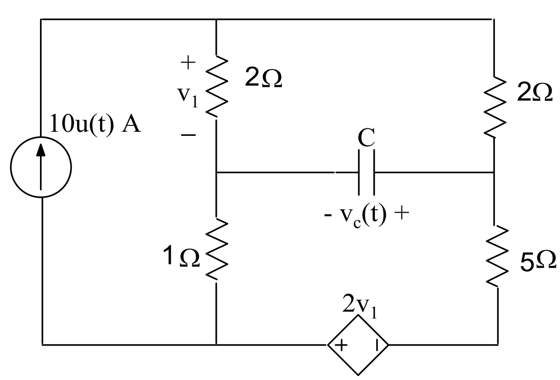
توجه:

تعاریف مربوط به پاسخ ورودی صفر، پاسخ حالت صفر و پاسخ کامل مربوط به ولتاژ خازن و جریان سلف است و برای بقیه عناصر لزوماً صدق نمی‌کند.

تمرین‌های حل شده

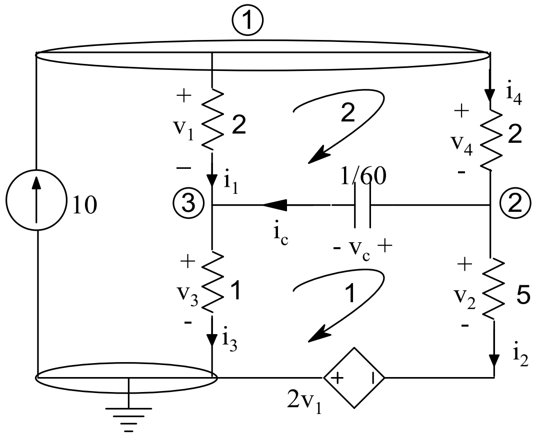
فصل دوم

۱) ولتاژ دو سر خازن $v_c(t)$ را برای تمام زمان‌ها محاسبه کنید.



$C = \frac{1}{60}$ F

رسم مدار در $t \geq 0$



Kvl 1: $-v_c + v_2 - v_3 - 2v_1=0$ (1)

Kvl 2: $v_4 + v_c - v_1=0$ (2)

Kcl 1: $i_1+ i_4 = 10 \rightarrow \frac{v_1}{2} + \frac{v_4}{2} =10$

$\rightarrow v_1 + v_4 = 20$ (3)

Kcl 2: $i_4 = i_2 + i_c \rightarrow \frac{v_4}{2} = \frac{v_2}{5} + \frac{1}{60}\frac{dv_c}{dt}$ (4)

Kcl 3: $i_1 + i_c = i_3 \rightarrow \frac{v_1}{2} + \frac{1}{60}\frac{dv_c}{dt} = v_3$ (5)

$(1),(2),(3),(4),(5) \rightarrow \frac{dv_c}{dt} + 35v_c = 0$

$V_c(t) = ke^{-35t}$
$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0$

نکته: هنگامی که در $t\geq 0$ مدار دارای منبع مستقل باشد ولی در $t< 0$ فاقد منبع مستقل باشد، مدار را مدار در حالت صفر گویند. در این شرایط $v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0=0$ و $i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0=0$ است.

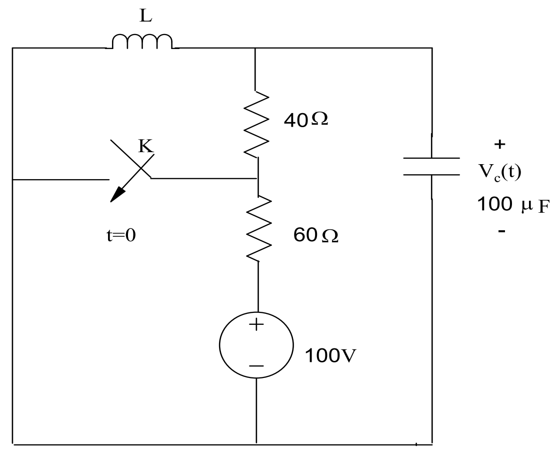
در این سوال مدار در حالت صفر است ← $V_0 = 0$

$V_c(0^+) = k = 0 \rightarrow k = 0$
$v_c(t) = 0$

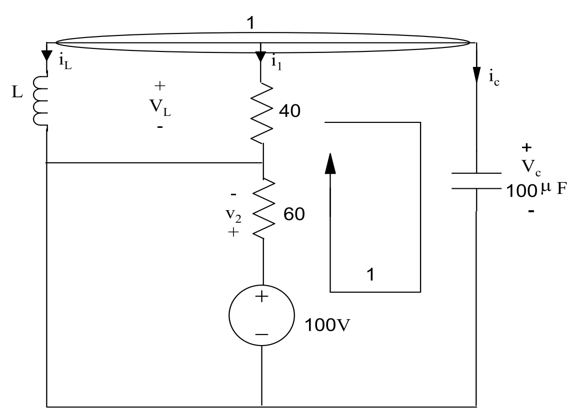
۲) در مدار مقابل اگر کلید در زمان t=0 بسته شود، مطلوب است

الف) L را چنان بیابید که پاسخ مدار، میرائی بحرانی باشد. (برای $t\geq 0$)

ب) ولتاژ دو سر خازن را برای $t\geq 0$ محاسبه نمائید.



t≥ 0 رسم مدار در



Kcl 1: $i_L + i_c + i_1 = 0$

$\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt + \frac{vL}{40} + 10^{-4}\,\frac{dvc}{dt} = 0$

$V_2 = 100$

Kvl 1: $v_c - 100 + 100 - v_L = 0$

$\rightarrow v_c = v_L$

$\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_c(t)dt + \frac{vc}{40} + 10^{-4}\,\frac{dvc}{dt} = 0$

$\frac{1}{L}v_c + \frac{dvc}{dt}(\frac{1}{40}) + 10^{-4}\frac{d^2vc}{dt^2} = 0$

$$\frac{d^2vc}{dt^2} + 250\frac{dvc}{dt} + \frac{10^4}{L}vc = 0$$

$$\rightarrow \; \Delta = (250)^2 - (4)(\frac{10^4}{L}) = 0 \quad \rightarrow L = 0/64$$

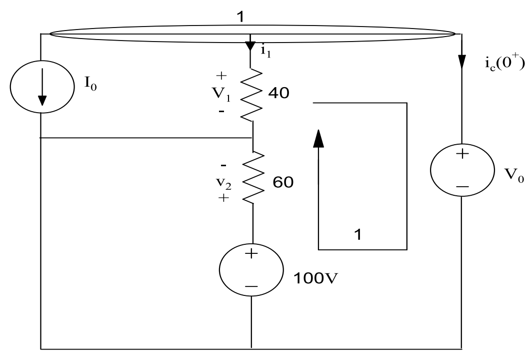
$$\frac{d^2vc}{dt^2} + 250\frac{dvc}{dt} + \frac{10^4}{0/64}vc = 0$$

$$v_c(t) = (k_1+k_2t)e^{-125t}$$

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = v_0$$

$$\frac{dvc}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{ic(0^+)}{c} = 10^4 i_c(0^+)$$

رسم مدار در $t=0^+$



Kcl1: $I_0 + i_1 + i_c(0^+) = 0$

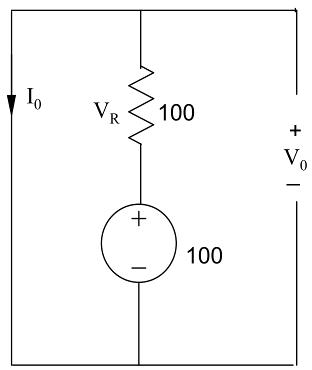
$i_c(0^+) = - I_0 - i_1$ (1)

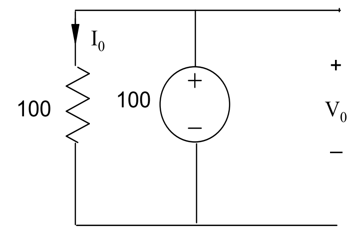
Kvl1: $v_0 - 100 + 100 - v_1 = 0$

$v_0 = v_1$ (2)

(1),(2)$\rightarrow i_c(0^+) = - I_0 - \frac{v0}{4}$

رسم مدار در $t=0^-$





$I_0 = \frac{100}{100} = 1$

$V_0 = 100$

$v_c(t) = (k_1+k_2t)e^{-125t}$

$v_c(0^+) = 100$

$\frac{dvc}{dt} = k_2e^{-125t} - 125e^{-125t}(k_1 + k_2t)$

$v_c(0^+) = k_1=100$

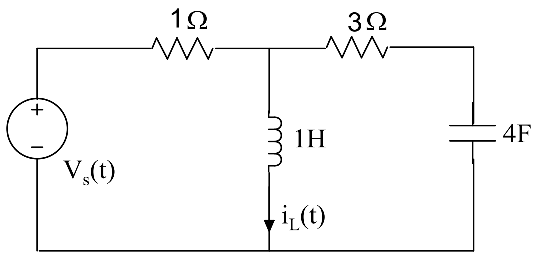
$\frac{dvc}{dt}\Big|_{t=0^+} = k_2 - 125(100) = -3/5 \times 10^4 \rightarrow k_2 = -22500$

$v_c(t) = (100 - 22500t)e^{-125t}$

۳)

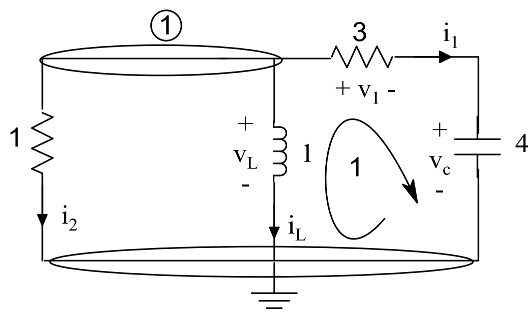
الف) معادله دیفرانسیل بر حسب $i_L(t)$ بنویسید.

ب) پاسخ $i_L(t)$ را برای کلیه زمان‌ها محاسبه کنید.



$V_s(t) = 5u(-t)$ v

رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_1 + i_2 + i_L = 0$ (1)

Kvl 1: $v_1 + v_c - v_L = 0$

$\rightarrow 3i_1 + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{t} i_1(t)dt - \frac{di_L}{dt} = 0$ (2)

$v_L = i_2 = \frac{di_L}{dt}$ (3)

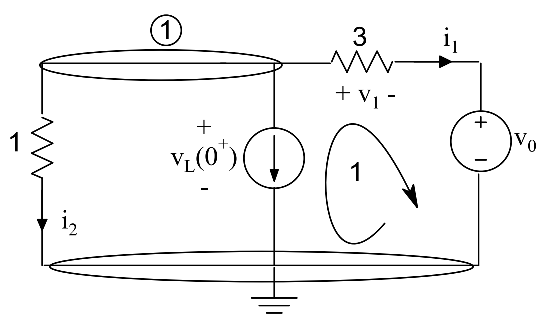
(1),(2),(3) $\rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{13}{16}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{16} i_L = 0$

$i_L(t) = k_1 e^{\frac{\sqrt{105}-13}{32}t} + k_2 e^{\frac{-\sqrt{105}-13}{32}t}$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = v_L(0^+)$

رسم مدار در $t=0^+$



Kcl 1: $i_2 + I_0 + i_1 = 0$

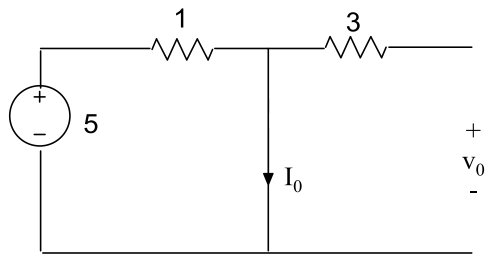
$\rightarrow v_L(0^+) + I_0 + \frac{v_1}{3} = 0$ (1)

Kvl 1: $v_1 + v_0 - v_L(0^+) = 0$

$\rightarrow v_1 = v_L(0^+) - v_0 \quad (2)$

$(1),(2) \rightarrow v_L(0^+) + I_0 + \frac{v_L(0^+)}{3} - \frac{v_0}{3} = 0 \rightarrow v_L(0^+) = \frac{v_0}{4} - \frac{3}{4} I_0$

رسم مدار در $t=0^-$



$\rightarrow V_0 = 0 \quad , \quad I_0 = 5$

$i_L(t) = k_1 e^{\frac{\sqrt{105}-13}{32}t} + k_2 e^{\frac{-\sqrt{105}-13}{32}t}$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0 = 5$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = v_L(0^+) = \frac{v_0}{4} - \frac{3}{4} I_0 = -\frac{3}{4}(5) = -\frac{15}{4}$

$i_L(0^+) = k_1 + k_2 = 5 \quad (1)$

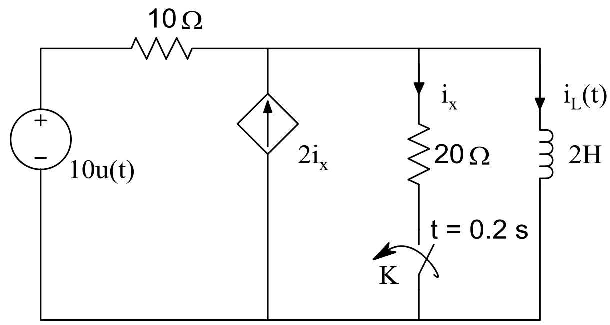
$\frac{di_L}{dt} = \frac{\sqrt{105}-13}{32}\, k_1 e^{\frac{\sqrt{105}-13}{32}t} + \frac{-\sqrt{105}-13}{32} k_2 e^{\frac{-\sqrt{105}-13}{32}t}$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{\sqrt{105}-13}{32} k_1 + \frac{-\sqrt{105}-13}{32} k_2 = -\frac{15}{4} \quad (2)$

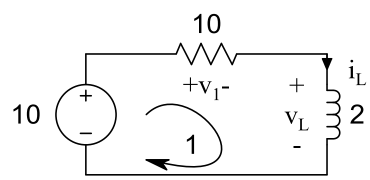
$(1),(2) \rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{5(\sqrt{105}-11)}{2\sqrt{105}} \\ k_2 = \frac{5(\sqrt{105}+11)}{2\sqrt{105}} \end{cases}$

$i_L(t) = \frac{5(\sqrt{105}-11)}{2\sqrt{105}}\, e^{\frac{\sqrt{105}-13}{32}t} + \frac{5(\sqrt{105}+11)}{2\sqrt{105}}\, e^{\frac{-\sqrt{105}-13}{32}t}$

۴) کلید K در لحظه $t = 0/2$ (s) بسته می‌شود. جریان $i_L(t)$ را برای کلیه زمان‌ها محاسبه نمایید.



رسم مدار در $0 \le t < 0/2$



Kvl *1*: $v_1 + v_L - 10 = 0 \rightarrow 10i_L + 2\frac{di_L}{dt} - 10 = 0$

$\rightarrow \frac{di_L}{dt} + 5i_L = 5$

$i_L(t) = ke^{-5t} + 1$

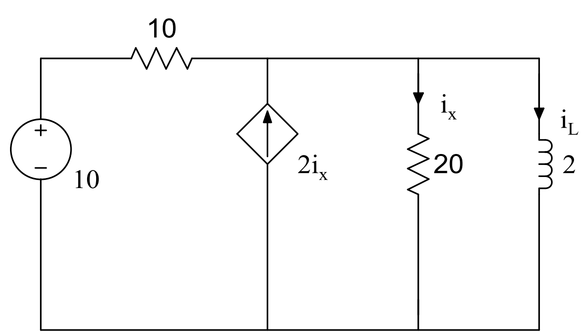
$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$

مدار در حالت صفر است $\leftarrow I_0 = 0$

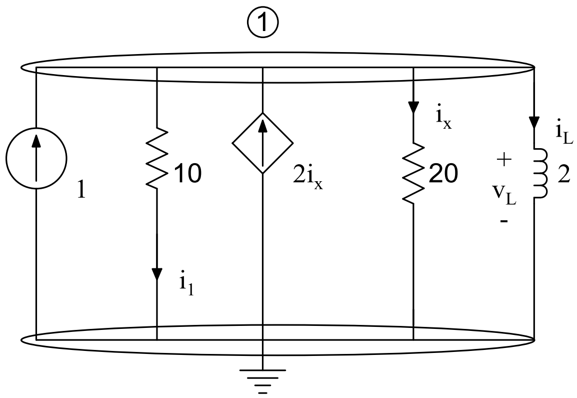
$i_L(0^+) = k + 1 = 0 \rightarrow k = -1$

$i_L(t) = -e^{-5t} + 1 \quad (0 \le t < 0/2)$

رسم مدار در $t \ge 0/2$



نکته: برای محاسبه آسان‌تر از روش تبدیل منابع استفاده می‌کنیم:



Kcl *1*: $2i_x + 1 = i_x + i_L + i_1 \rightarrow i_x + 1 = i_L + i_1 \quad (1)$

$v_L = 2\,\frac{di_L}{dt} = 20i_x = 10\,i_1 \ (2)$

$(1),(2) \rightarrow 0/1\,\frac{di_L}{dt} + 1 = i_L + 0/2\,\frac{di_L}{dt} \ \rightarrow \ \frac{di_L}{dt} + 10i_L = 10$

$i_L(t) = ke^{-10(t-0/2)} + 1$

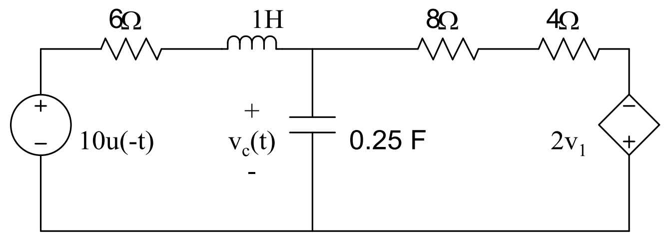
$i_L(0/2^+) = i_L(0/2^-)$

$i_L(0/2^-) = -e^{-5(0/2)} + 1 = 0/63$

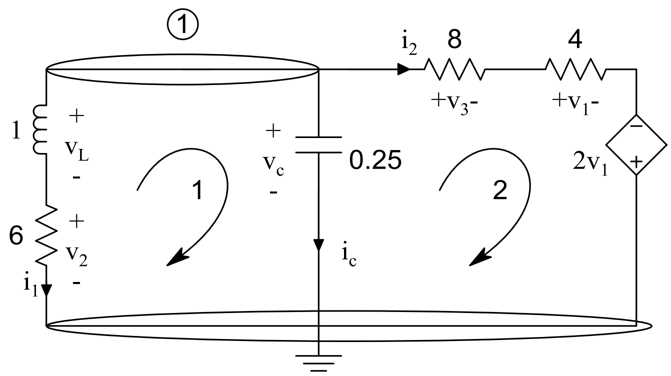
$i_L(0/2^+) = k + 1 = 0/63 \ \rightarrow k = 0/37$

$i_L(t) = 0/37e^{-10(t-0/2)} + 1 \quad (t \geq 0/2)$

۵) ولتاژ دو سر خازن $v_c(t)$ را برای کلیه زمان‌ها محاسبه نمایید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_1 + i_c + i_2 = 0 \rightarrow \frac{v_2}{6} + \frac{1}{4}\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_1}{4} = 0$ (1)

Kvl 1: $v_c - v_2 - v_L = 0$ (2)

Kvl 2: $v_3 + v_1 - 2v_1 - v_c = 0 \rightarrow v_3 - v_1 - v_c = 0$ (3)

$i_2 = \frac{v_3}{8} = \frac{v_1}{4} \rightarrow v_3 = 2v_1$ (4)

$i_1 = \frac{v_2}{6} = \int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt \rightarrow v_2 = 6\int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt$ (5)

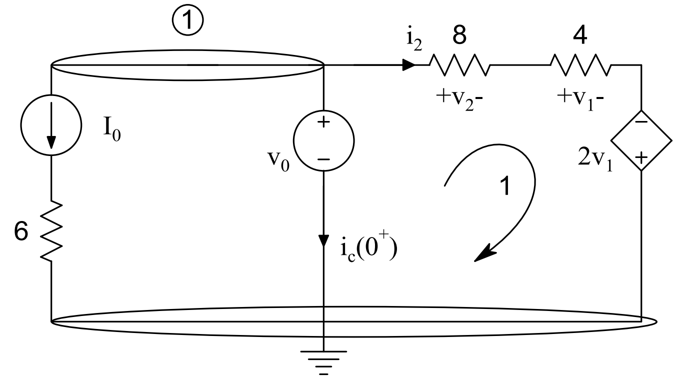
(1),(2),(3),(4),(5) $\rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2} + 7\frac{dv_c}{dt} + 10v_c = 0$

$v_c(t) = k_1e^{-2t} + k_2e^{-5t}$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = v_0$

$\frac{dvc}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{i_c(0^+)}{0/25} = 4i_c(0^+)$

رسم مدار در $t = 0^+$



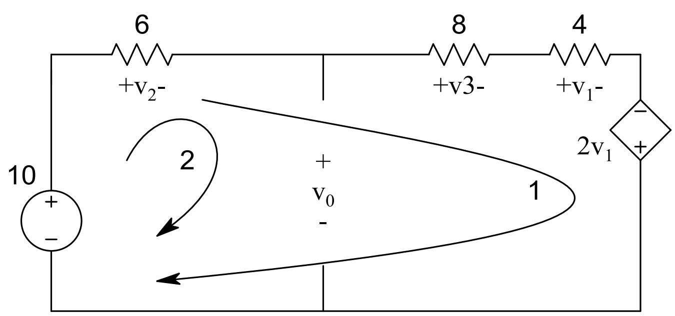
Kcl 1: $I_0 + i_c(0^+) + i_2 = 0$ (1)

Kvl 1: $v_2 + v_1 - 2v_1 - v_0 = 0 \rightarrow v_2 - v_1 - v_0 = 0 \rightarrow 8i_2 - 4i_2 - v_0 = 0$

$\rightarrow i_2 = \frac{v_0}{4}$ (2)

(1),(2) $\rightarrow i_c(0^+) = - I_0 - \frac{v_0}{4}$

رسم مدار در $t = 0^-$



Kvl 1: $-v_2 + v_3 + v_1 - 2v_1 - 10 = 0 \rightarrow -v_2 + v_3 - v_1 - 10 = 0$

$\rightarrow -6I_0 - 8I_0 + 4I_0 - 10 = 0 \rightarrow I_0 = -1$

Kvl 2: $-v_2 + v_0 - 10 = 0 \rightarrow v_0 = 10 + v_2 = 10 + 6I_0 = 4$

$v_c(t) = k_1e^{-2t} + k_2e^{-5t}$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = v_0 = 4$

$\frac{dvc}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{i_c(0^+)}{0/25} = 4i_c(0^+) = 4\ (-I_0 - \frac{v_0}{4}) = 4\ (1 - 1) = 0$

$v_c(0^+) = k_1 + k_2 = 4$ (1)

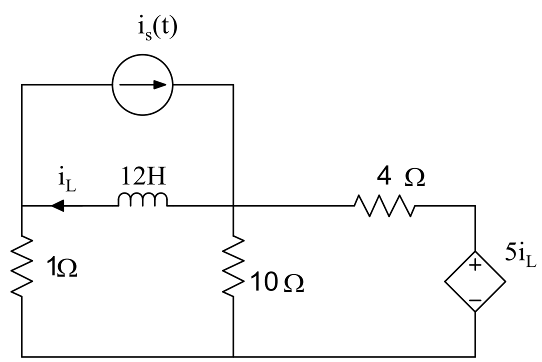
$\frac{dvc}{dt} = -2k_1e^{-2t} – 5k_2e^{-5t}$

$\frac{dvc}{dt}|_{t=0^+} = - 2k_1 – 5k_2 = 0 \quad (2)$

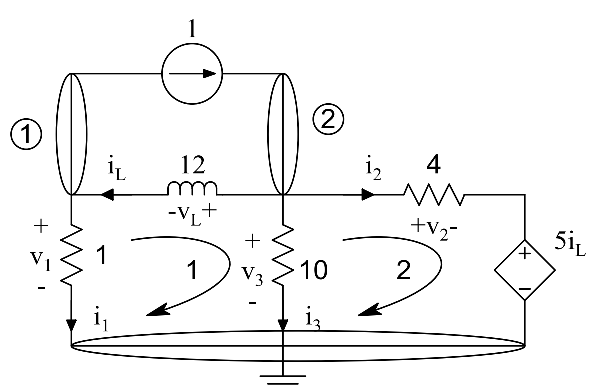
$$(1),(2) \rightarrow \begin{cases} k_2 = \frac{-8}{3} \\ k_1 = \frac{20}{3} \end{cases}$$

$V_c(t) = \frac{20}{3} e^{-2t} + (\frac{-8}{3}) e^{-5t}$

۶) پاسخ پله واحد را برای جریان سلف $i_L(t)$ محاسبه نمایید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_L = i_1 + 1 \quad (1)$

Kcl 2: $1 = i_L + i_2 + i_3 \quad (2)$

Kvl 1: $-v_L + v_3 - v_1 = 0$

$\rightarrow \; -12\frac{di_L}{dt} + 10i_3 - i_1 = 0 \quad (3)$

Kvl 2: $v_2 + 5i_L - v_3 = 0 \;\rightarrow\; 4i_2 + 5i_L - 10i_3 = 0 \quad (4)$

$(1),(2),(3),(4) \rightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{42} i_L = \frac{9}{28}$

$i_L(t) = ke^{\frac{-1}{42}t} + \frac{27}{2}$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0 \xrightarrow{\text{مدار در حالت صفر است}} I_0 = 0$

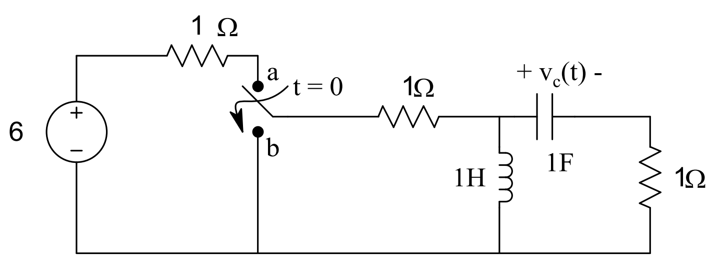
$i_L(t) = -\frac{27}{2} e^{\frac{-1}{42}t} + \frac{27}{2}$

$s(t) = (-\frac{27}{2} e^{\frac{-1}{42}t} + \frac{27}{2})\, u(t)$

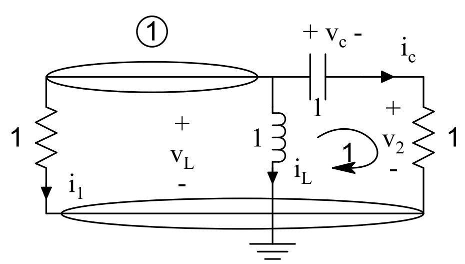
۷) در مدار مقابل کلید به مدت طولانی در وضعیت a بوده است و در لحظه t=0 به وضعیت b منتقل می‌شود.

الف) معادله دیفرانسیل مدار را بر حسب $v_c(t)$ بنویسید. (در $t>0$)

ب) ولتاژ $v_c(t)$ را برای کلیه زمان‌ها محاسبه کنید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_c + i_L + i_1 = 0$

$\rightarrow \frac{dv_c}{dt} + \int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt + v_L = 0 \quad (1)$

Kvl 1: $v_c + v_2 - v_L = 0 \quad (2)$

$i_c = \frac{dv_c}{dt} = v_2$ (3)

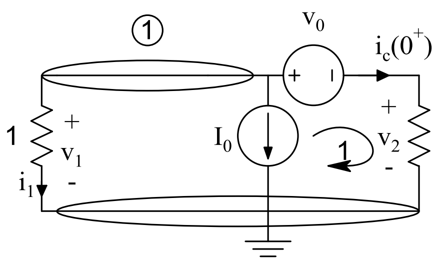
$(1),(2),(3) \rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2} + \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{2} v_c = 0$

$v_c(t) = (k_1 \cos \frac{1}{2} t + k_2 \sin \frac{1}{2} t) \, e^{\frac{-1}{2}t}$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = v_0$

$\frac{dvc}{dt}\Big|_{t=0^+} = i_c(0^+)$

رسم مدار در $t=0^+$



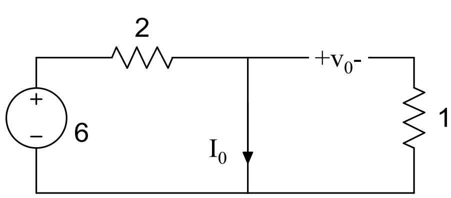
Kcl 1: $i_1 + I_0 + i_c(0^+) = 0 \rightarrow i_c(0^+) = - i_1 - I_0$ (1)

Kvl 1: $v_0 + v_2 - v_1 = 0 \rightarrow v_0 + i_c(0^+) - i_1 = 0$

$\rightarrow i_1 = v_0 + i_c(0^+)$ (2)

$(1),(2) \rightarrow i_c(0^+) = - v_0 - i_c(0^+) - I_0 \rightarrow i_c(0^+) = - \frac{1}{2} v_0 - \frac{1}{2} I_0$

رسم مدار در $t=0^-$



$I_0 = 3$, $v_0 = 0$

$v_c(t) = (k_1 \cos \frac{1}{2} t + k_2 \sin \frac{1}{2} t) \, e^{\frac{-1}{2}t}$

$v_c(0^+) = 0$

$\frac{dvc}{dt}\Big|_{t=0^+} = i_c(0^+) = \frac{-1}{2} (v_0 + I_0) = \frac{-3}{2}$

$v_c(0^+) = k_1 = 0$

$\frac{dvc}{dt} = (\frac{1}{2} k_2 \cos \frac{1}{2} t) \, e^{\frac{-1}{2}t} - \frac{1}{2} e^{\frac{-1}{2}t} (k_2 \sin \frac{1}{2} t)$

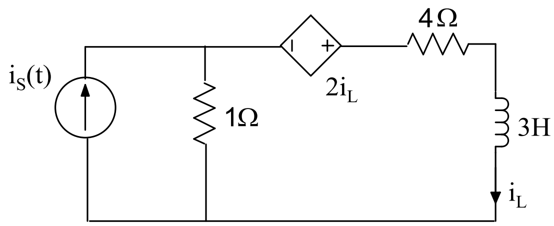
$\frac{dvc}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{1}{2} k_2 = \frac{-3}{2} \quad \rightarrow k_2 = -3$

$v_c(t) = (-3\sin\frac{1}{2}\ t\ )\ e^{\frac{-1}{2}t}$

۸) در مدار شکل زیر

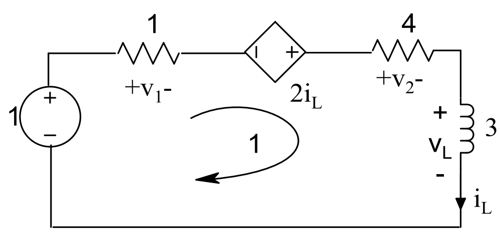
الف) معادله دیفرانسیل را برای جریان i_L بنویسید.

ب) پاسخ ضربه مدار را تعیین نمایید. (پاسخ جریان گذرنده از سلف)



رسم مدار در $t \geq 0$

برای راحتی محاسبات از تبدیل منابع استفاده می‌کنیم:



Kvl 1: $v_1 - 2i_L + v_2 + v_L - 1 = 0$

$\rightarrow i_L - 2i_L + 4i_L + 3\,\frac{di_L}{dt} - 1 = 0 \ \rightarrow\ \frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{1}{3}$

$i_L(t) = ke^{-t} + \frac{1}{3}$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$

مدار در حالت صفر است ← $I_0 = 0$

$i_L(0^+) = k + \frac{1}{3} = 0 \ \rightarrow\ k = \frac{-1}{3}$

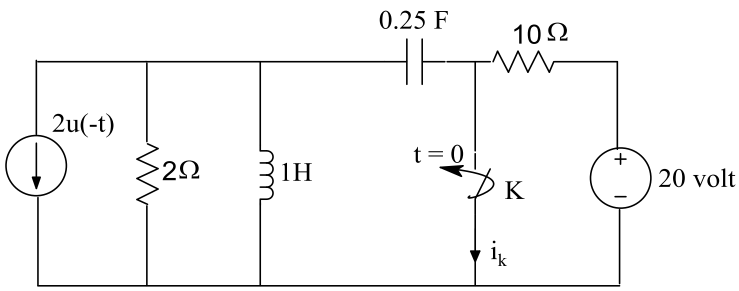
$i_L(t) = \frac{-1}{3}\, e^{-t} + \frac{1}{3}$

$S(t) = (\frac{-1}{3} e^{-t} + \frac{1}{3})\, u(t)$

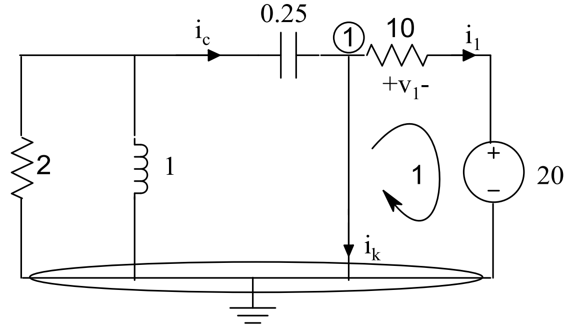
$h(t) = \frac{1}{3} e^{-t} u(t) + (\frac{-1}{3} e^{-t} + \frac{1}{3})\, \delta(t)$

$h(t) = \frac{1}{3} e^{-t} u(t)$

۹) در مدار شکل زیر جریان گذرنده از کلید K را برای $t \geq 0$ محاسبه کنید. (کلید K در $t = 0$ وصل می‌شود.)



رسم مدار در $t \geq 0$



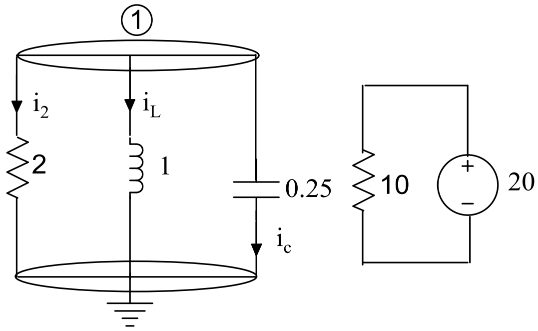
Kcl 1: $i_c = i_k + i_1 \quad (1)$

Kvl 1: $v_1 + 20 = 0 \rightarrow 10i_1 + 20 = 0$
$\rightarrow i_1 = -2 \quad (2)$

$(1),(2) \rightarrow i_k = i_c + 2$

پس برای محاسبه i_k کافی است که که i_c را محاسبه کنیم.

نکته: مدار را می‌توان از محل اتصال کوتاه به دو بخش مجزا تقسیم کرد:



Kcl 1: $i_c + i_L + i_2 = 0$ (1)

$4\int_{-\infty}^{t} i_c(t)dt = \frac{di_L}{dt} = 2i_2$ (2)

(1),(2) $\rightarrow$ $i_c + 4\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} i_c(t)dt + 2\int_{-\infty}^{t} i_c(t)dt = 0$

$\frac{d^2 i_c}{dt^2} + 2\frac{di_c}{dt} + 4i_c = 0$

$i_c(t) = (k_1 \cos\sqrt{3}t + k_2 \sin\sqrt{3}\, t)\, e^{-t}$

$i_c(0^+) = ?$

$\frac{di_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = ?$

$\frac{di_c}{dt} = c\,\frac{d^2 v_c}{dt^2} = \frac{1}{4}\frac{d^2 v_c}{dt^2}$

برای kcl 1 قانون اهم می‌نویسیم:

$\frac{1}{4}\frac{dv_c}{dt} + \int_{-\infty}^{t} v_c(t)dt + \frac{v_c}{2} = 0$

$\frac{1}{4}\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0 \rightarrow \frac{1}{4}\frac{d^2 v_c}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt} - v_c$

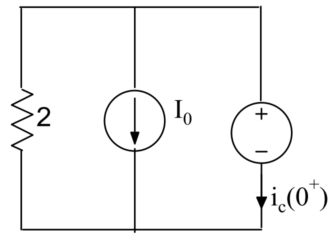
$\frac{di_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{1}{4}\frac{d^2 v_c}{dt^2}\Big|_{t=0^+} = -\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} - v_c(0^+) = -\frac{1}{2}\frac{i_c(0^+)}{0.25} - V_0 = -2\, i_c(0^+) - V_0$

$i_c(t) = (k_1 \cos\sqrt{3}t + k_2 \sin\sqrt{3}\, t)\, e^{-t}$

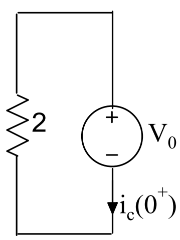
$i_c(0^+) = ?$

$\frac{di_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = -2\, i_c(0^+) - V_0$

رسم مدار در $t = 0^+$

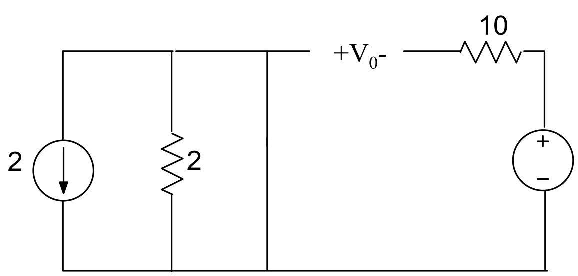


نکته : منبع جریان موازی با منبع ولتاژ از مدار حذف می‌شود.

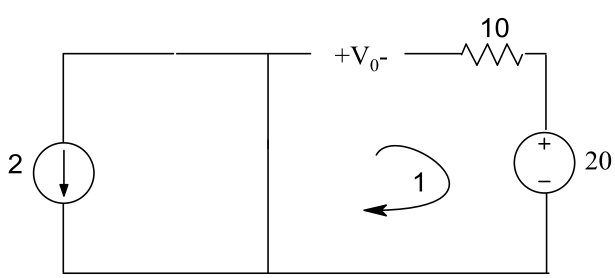


$i_c(0^+) = \frac{-V_0}{2}$

رسم مدار در $t = 0^-$



نکته : مقاومت موازی با اتصال کوتاه از مدار حذف می‌شود.



Kvl 1: $V_0 + 20 = 0 \rightarrow V_0 = -20$

$i_c(t) = (k_1 \cos \sqrt{3}t + k_2 \sin \sqrt{3}\, t) e^{-t}$

$i_c (0^+) = \frac{-V_0}{2} = -10$

$\frac{di_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = -2\, i_c (0^+) - V_0 = -20 + 20 = 0$

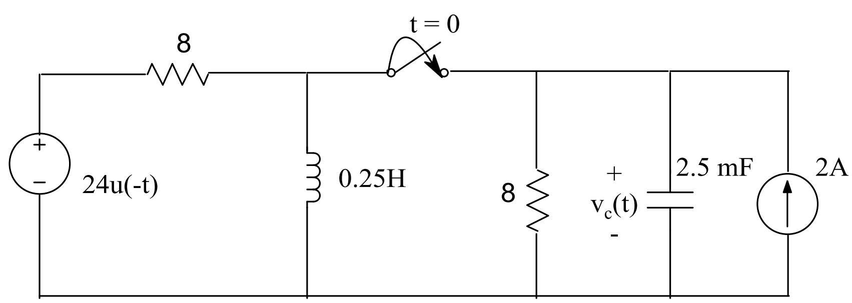
$i_c (0^+) = k_1 = 10$

$\frac{di_c}{dt} = (-\sqrt{3}\, k_1 \sin \sqrt{3}t + \sqrt{3}\, k_2 \cos \sqrt{3}\, t) e^{-t} - e^{-t} (k_1 \cos \sqrt{3}t + k_2 \sin \sqrt{3}\, t)$

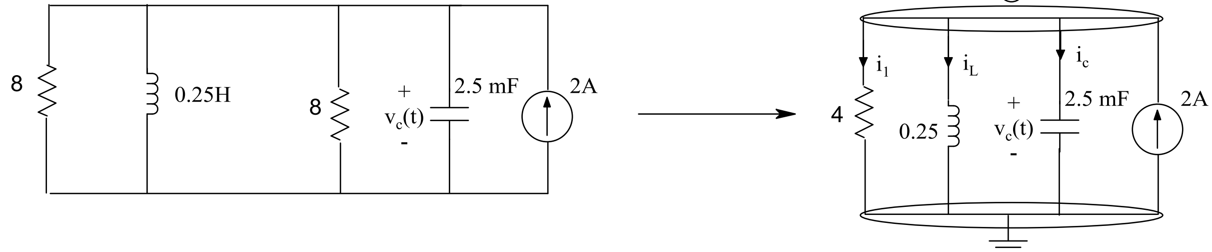
$\frac{di_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = \sqrt{3}\, k_2 - k_1 = \sqrt{3}\, k_2 - 10 = 0 \rightarrow k_2 = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$i_c(t) = (10 \cos \sqrt{3}t + \frac{10\sqrt{3}}{3} \sin \sqrt{3}\, t) e^{-t}$

۱۰) در مدار شکل زیر، کلید در لحظه $t = 0$ بسته می‌شود. ولتاژ خازن را برای $t \geq 0$ به دست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $2 = i_c + i_L + i_1$

$\rightarrow 2 = 2/5 \times 10^{-3} \frac{dv_c}{dt} + 4\int_{-\infty}^{t} v_c(t)dt + \frac{v_c}{4}$

$\rightarrow 0 = 2/5 \times 10^{-3} \frac{d^2v_c}{dt^2} + 4v_c + \frac{1}{4}\frac{dv_c}{dt}$

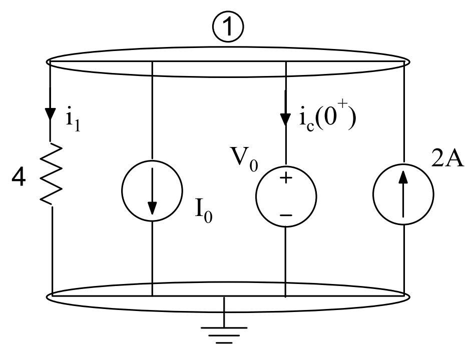
$\rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2} + 100\frac{dv_c}{dt} + 1600v_c = 0$

$v_c(t) = k_1e^{-20t} + k_2e^{-80t}$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = v_0$

$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{i_c(0^+)}{c} = 400\, i_c(0^+)$

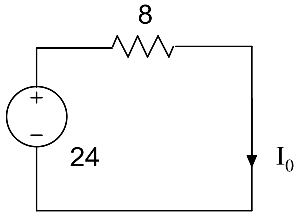
رسم مدار در $t=0^+$

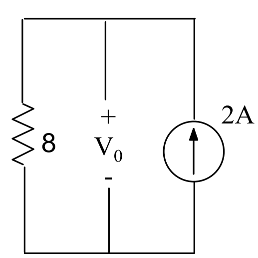


Kcl 1: $2 = i_1 + I_0 + i_c(0^+)$

$\rightarrow i_c(0^+) = 2 - I_0 - \frac{v_0}{4}$

رسم مدار در $t = 0^-$





$V_0 = 8\times2 = 16$

$I_0 = \frac{24}{8} = 3$

$v_c(t) = k_1e^{-20t} + k_2e^{-80t}$

$v_c(0^+) = 16$

$\frac{dv_c}{dt}|_{t=0^+} = 400\ (2 – 3 – 4) = - 2000$

$v_c(0^+) = k_1 + k_2 = 16 \quad (1)$

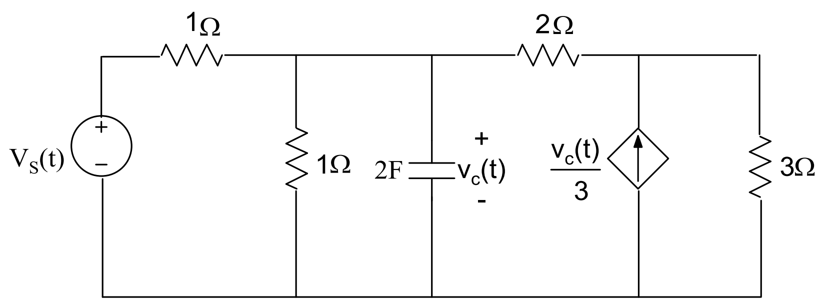
$\frac{dv_c}{dt} = - 20k_1e^{-20t} - 80k_2e^{-80t}$

$\frac{dv_c}{dt}|_{t=0^+} = -20k_1 - 80k_2 = -2000 \quad (2)$

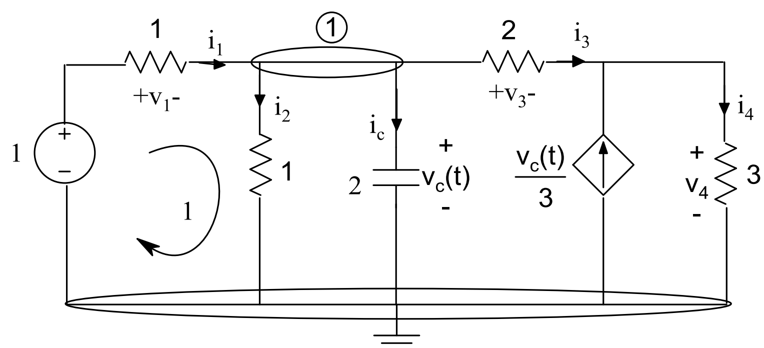
$(1),(2) \rightarrow k_1 = - 12 \ , \quad k_2 = 28$

$v_c(t) = - 12e^{-20t} + 28e^{-80t}$

۱۱) در مدار شکل زیر پاسخ ضربه $v_c(t)$ را به‌دست آورید. (ورودی ضربه واحد و خروجی ولتاژ دو سر خازن است.)



رسم مدار در t≥۰



Kcl 1: $i_1 = i_2 + i_c \rightarrow v_1 = v_c + 2\frac{dv_c}{dt}$ (1)

Kvl 1: $v_1 + v_c - 1 = 0 \rightarrow v_1 = -v_c + 1$ (2)

$(1),(2) \rightarrow -v_c + 1 = v_c + 2\frac{dv_c}{dt} \rightarrow 2\frac{dv_c}{dt} + 2v_c = 1$

$\rightarrow \frac{dv_c}{dt} + v_c = \frac{1}{2}$

$v_c(t) = ke^{-t} + \frac{1}{2}$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = v_0 \xrightarrow{\text{مدار در حالت صفر است}} v_0=0$

$v_c(0^+) = k + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow k = \frac{-1}{2}$

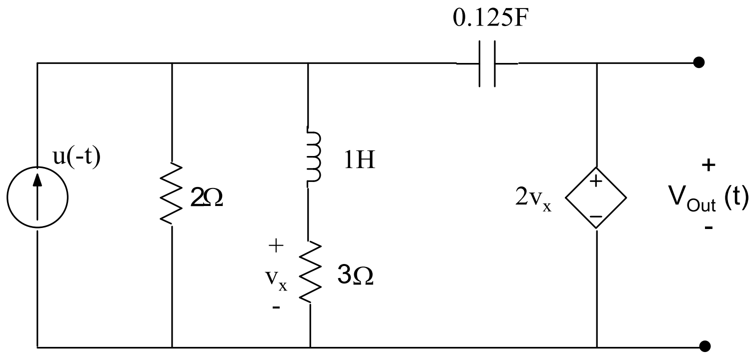
$v_c(t) = \frac{-1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}$

$s(t) = (\frac{-1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2})\,u(t)$

$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + (\frac{-1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2})\,\delta(t)$

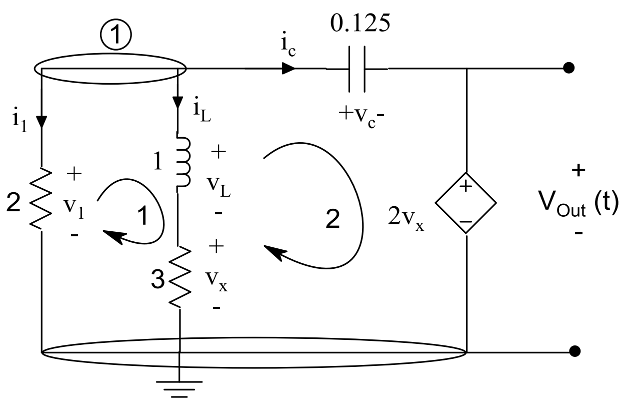
$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t)$

۱۲) در مدار شکل زیر مطلوب است ولتاژ خروجی $V_{Out}(t)$ در همه زمان‌ها.



با دقت در شکل درمی‌یابیم که برای یافتن $V_{Out}(t)$ کافی است v_x را محاسبه کرده و دو برابر نماییم.

رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_1 + i_L + i_c = 0 \rightarrow \frac{v_1}{2} + \frac{v_x}{3} + 0/125\,\frac{dv_c}{dt} = 0$ (1)

$i_L = \frac{v_x}{3} = \int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt \rightarrow v_L = \frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{dv_x}{dt}$ (2)

kvl 1: $v_L + v_x - v_1 = 0 \rightarrow \frac{1}{3}\frac{dv_x}{dt} + v_x - v_1 = 0 \rightarrow v_1 = \frac{1}{3}\frac{dv_x}{dt} + v_x$ (3)

kvl 2: $v_c + 2v_x - v_x - v_L = 0 \rightarrow v_c + v_x - \frac{1}{3}\frac{dv_c}{dt} = 0 \rightarrow v_c = -v_x + \frac{1}{3}\frac{dv_x}{dt}$ (4)

(1),(2),(3),(4) $\rightarrow \frac{1}{6}\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{2}v_x + \frac{1}{3}v_x + 0/125\left(\frac{-dv_x}{dt} + \frac{1}{3}\frac{d^2v_x}{dt^2}\right) = 0$

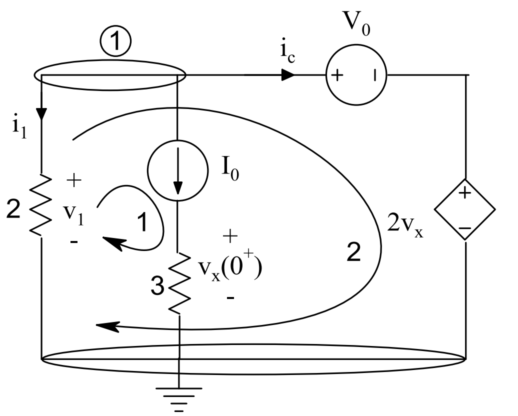
$\rightarrow \frac{d^2v_x}{dt^2} + \frac{dv_x}{dt} + 20v_x = 0$

$v_x(t) = \left(k_1\cos\frac{\sqrt{79}}{2}t + k_2\sin\frac{\sqrt{79}}{2}t\right)e^{\frac{-1}{2}t}$

$v_x(0^+) = ?$

$\frac{dv_x}{dt}\Big|_{t=0^+} = 3v_L(0^+)$

رسم مدار در $t = 0^+$



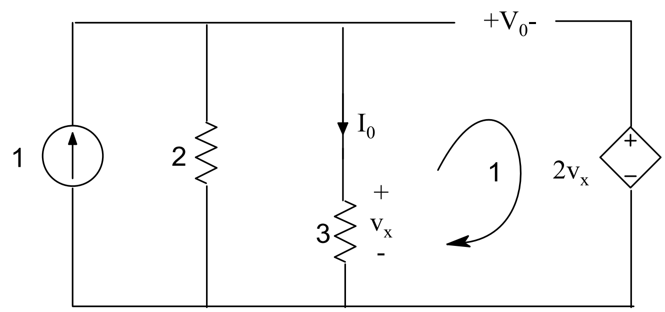
$v_x(0^+) = 3I_0$

Kvl 1: $v_L(0^+) + v_x(0^+) - v_1 = 0 \rightarrow v_L(0^+) = v_1 - 3I_0$ (1)

Kvl 2: $V_0 + 2v_x - v_1 = 0 \rightarrow v_1 = V_0 + 2v_x = V_0 + 6I_0$ (2)

(1),(2) $\rightarrow v_L(0^+) = V_0 + 6I_0 - 3I_0 = V_0 + 3I_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



$I_0 = \frac{2}{2+3} \times 1 = \frac{2}{5}$

Kvl 1: $V_0 + 2v_x - v_x = 0 \rightarrow V_0 + v_x = 0 \rightarrow V_0 = \frac{-6}{5}$

$v_x(t) = \left(k_1\cos\frac{\sqrt{79}}{2}t + k_2\sin\frac{\sqrt{79}}{2}t \right) e^{\frac{-1}{2}t}$

$v_x(0^+) = \frac{6}{5}$

$\frac{dv_x}{dt}\Big|_{t=0^+} = 3v_L(0^+) = 3v_0 + 9I_0 = \frac{-18}{5} + \frac{18}{5} = 0$

$v_x(0^+) = k_1 = \frac{6}{5}$

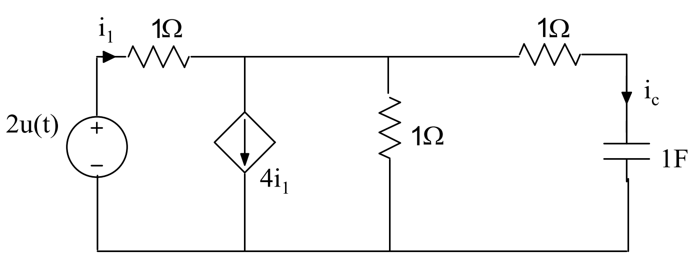
$\frac{dv_x}{dt} = \left(\frac{-3\sqrt{79}}{5}\sin\frac{\sqrt{79}}{2}t + \frac{\sqrt{79}}{2}k_2\cos\frac{\sqrt{79}}{2}t \right) e^{\frac{-1}{2}t} - \frac{1}{2}\, e^{\frac{-1}{2}t} \left(\frac{6}{5}\cos\frac{\sqrt{79}}{2}t + k_2\sin\frac{\sqrt{79}}{2}t \right)$

$\frac{dv_x}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{\sqrt{79}}{2}k_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\right) = 0 \rightarrow k_2 = \frac{6}{5\sqrt{79}}$

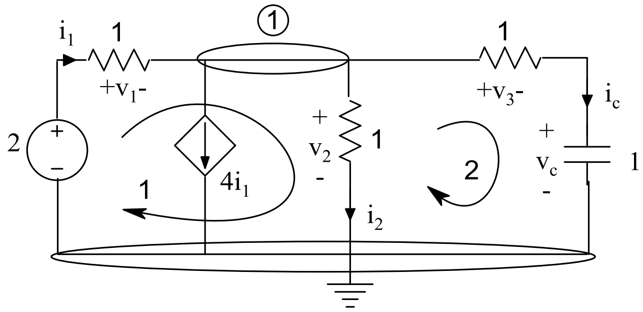
$v_x(t) = \left(\frac{6}{5}\cos\frac{\sqrt{79}}{2}t + \frac{6}{5\sqrt{79}}\sin\frac{\sqrt{79}}{2}t \right) e^{\frac{-1}{2}t}$

$V_{out} = 2\, v_x(t) = \left(\frac{12}{5}\cos\frac{\sqrt{79}}{2}t + \frac{12}{5\sqrt{79}}\sin\frac{\sqrt{79}}{2}t \right) e^{\frac{-1}{2}t}$

۱۳) در مدار شکل زیر جریان $i_C(t)$ را برای همه زمان‌ها به دست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_1 = 4i_1 + i_2 + i_c \;\rightarrow\; 3i_1 + i_2 + i_c = 0$ (1)

Kvl 1: $v_1 + v_2 - 2 = 0 \;\rightarrow\; i_1 + i_2 - 2 = 0$ (2)

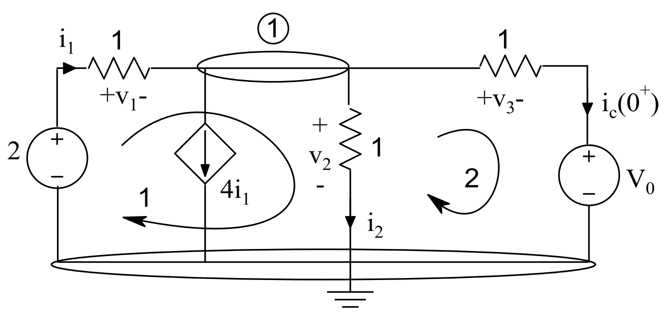
Kvl 2: $v_3 + v_c - v_2 = 0 \;\rightarrow\; i_c + \int_{-\infty}^{t} i_c(t)dt - i_2 = 0$ (3)

(1),(2),(3) $\rightarrow \frac{di_c}{dt} + 2i_c = 0$

$i_c(t) = k\,e^{-2t}$

$i_c(0^+) = ?$

رسم مدار در $t = 0^+$



Kcl 1: $i_1 = 4i_1 + i_2 + i_c(0^+) \;\rightarrow\; 3i_1 + i_2 + ic(0^+) = 0$ (1)

Kvl 1: $v_1 + v_2 - 2 = 0 \;\rightarrow\; i_1 + i_2 - 2 = 0$ (2)

Kvl 2: $v_3 + V_0 - v_2 = 0 \;\rightarrow\; i_c(0^+) + V_0 - i_2 = 0$ (3)

(1),(2),(3) $\rightarrow\; i_c(0^+) = -2V_0 + 6 \xrightarrow{\text{مدار در حالت صفر است}} V_0 = 0$

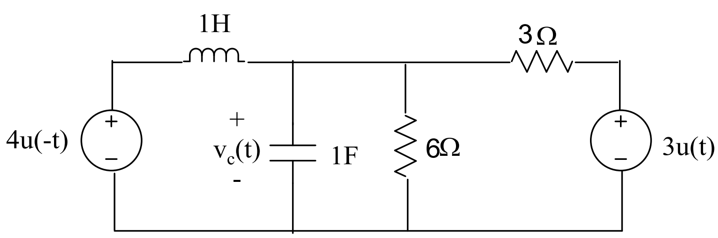
$i_c(t) = k\, e^{-2t}$

$i_c(0^+) = -2V0 + 6 = 6$

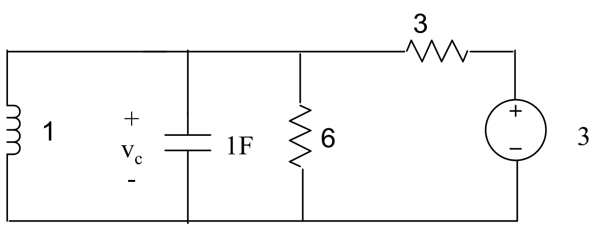
$i_c(0^+) = k = 6$

$i_c(t) = 6\, e^{-2t}$

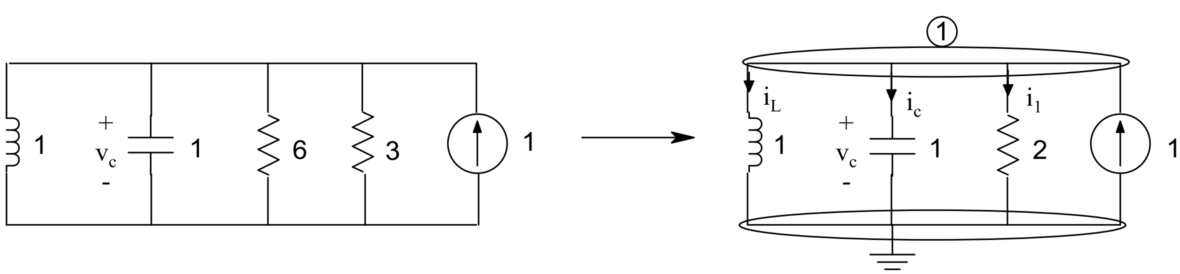
۱۴) در مدار شکل زیر ولتاژ $v_c(t)$ را برای همه زمان‌ها به دست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



نکته : برای محاسبات آسان‌تر از تبدیل منابع استفاده می‌کنیم.



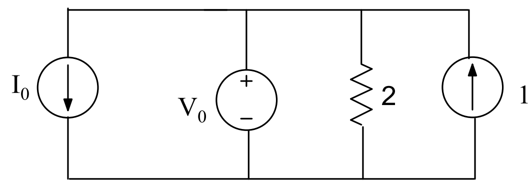
Kcl 1: $i_1 + i_c + i_L = 1 \rightarrow \frac{v_c}{2} + \frac{dv_c}{dt} + \int_{-\infty}^{t} v_c(t)dt = 1 \rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0$

$v_c(t) = \left(k_1 \cos\frac{\sqrt{15}}{4} t + k_2 \sin\frac{\sqrt{15}}{4} t \right) e^{\frac{-1}{2}t}$

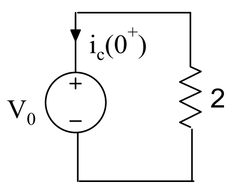
$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0$

$\frac{dv_c}{dt}|_{t=0^+} = i_c(0^+)$

رسم مدار در $t = 0^+$

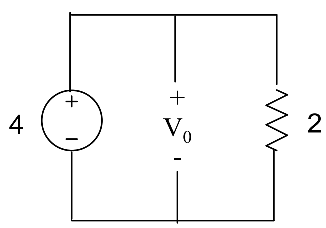


نکته: منابع جریان موازی با منبع ولتاژ از مدار حذف می‌شوند.



$i_c(0^+) = \frac{-V_0}{2}$

رسم مدار در $t = 0^-$



$V_0 = 4$

$v_c(t) = (k_1 \cos \frac{\sqrt{15}}{4} t + k_2 \sin \frac{\sqrt{15}}{4} t) e^{\frac{-1}{2}t}$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0 = 4$

$\frac{dv_c}{dt}|_{t=0^+} = i_c(0^+) = \frac{-V_0}{2} = -2$

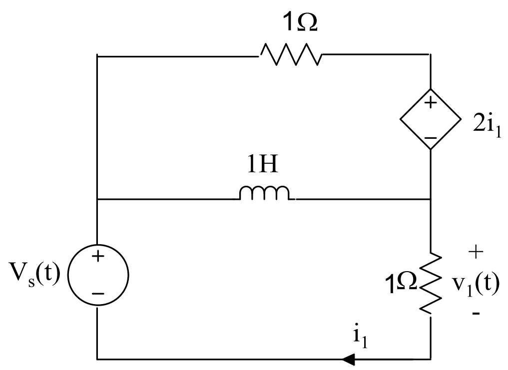
$v_c(0^+) = k_1 = 4$

$\frac{dv_c}{dt} = (\frac{-\sqrt{15}}{4} k_1 \sin \frac{\sqrt{15}}{4} t + \frac{\sqrt{15}}{4} k_2 \cos \frac{\sqrt{15}}{4} t) e^{\frac{-1}{2}t} - \frac{1}{2} e^{\frac{-1}{2}t} (k_1 \cos \frac{\sqrt{15}}{4} t + k_2 \sin \frac{\sqrt{15}}{4} t)$

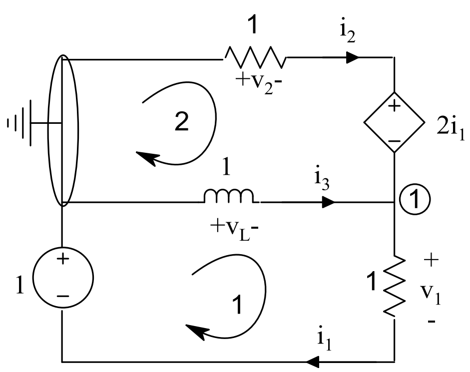
$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{\sqrt{15}}{4} k_2 - \frac{1}{2} k_1 = \frac{\sqrt{15}}{4} k_2 - 2 = -2 \rightarrow k_2 = 0$

$v_c(t) = (4 \cos \frac{\sqrt{15}}{4} t) \, e^{\frac{-1}{2}t}$

۱۵) در مدار شکل زیر پاسخ پله و پاسخ ضربه $v_1(t)$ را به دست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_2 + i_3 = i_1$

$\rightarrow \; v_2 + \int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt = v_1 \quad (1)$

Kvl 1: $v_L + v_1 - 1 = 0 \quad (2)$

Kvl 2: $v_2 + 2i_1 - v_L = 0$

$\rightarrow \; v_2 + 2v_1 - v_L = 0 \quad (3)$

(1),(2),(3) $\rightarrow \; -3v_1 + 1 + \int_{-\infty}^{t}(1 - v_1)dt = v_1$

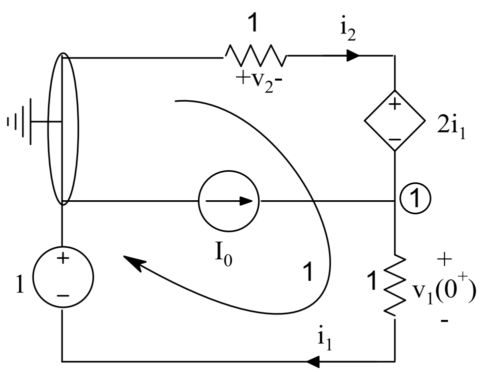
$\rightarrow \; -3\frac{dv_1}{dt} + 1 - v_1 = \frac{dv_1}{dt} \;\rightarrow\; 4\frac{dv_1}{dt} + v_1 = 1$

$\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{4} v_1 = \frac{1}{4}$

$v_1(t) = k\, e^{-\frac{1}{4}t} + 1$

$v_1(0^+) = ?$

رسم مدار در $t = 0^+$



Kcl 1: $i_2 + I_0 = i_1 \rightarrow v_2 + I_0 = v_1(0^+)$ (1)

Kvl 1: $v_2 + 2i_1 + v_1(0^+) - 1 = 0$

$\rightarrow v_2 + 3v_1(0^+) - 1 = 0$ (2)

(1),(2) $\rightarrow v_1(0^+) - I_0 + 3v_1(0^+) - 1 = 0$

$\rightarrow 4v_1(0^+) = 1 + I_0 \rightarrow v_1(0^+) = \frac{1}{4} + \frac{I_0}{4}$

مدار در حالت صفر است $\leftarrow I_0 = 0$

$V_1(0^+) = \frac{1}{4}$

$v_1(t) = k\, e^{-\frac{1}{4}t} + 1$

$v_1(0^+) = \frac{1}{4}$

$v_1(0^+) = k + 1 = \frac{1}{4} \rightarrow k = \frac{-3}{4}$

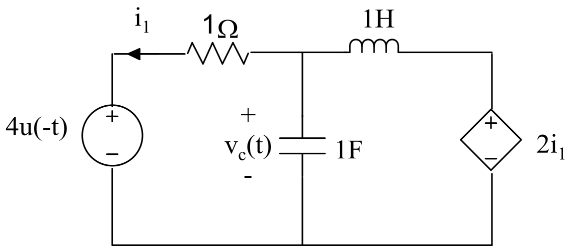
$v_1(t) = \frac{-3}{4} e^{-\frac{1}{4}t} + 1$

$s(t) = (\frac{-3}{4} e^{-\frac{1}{4}t} + 1)\, u(t)$

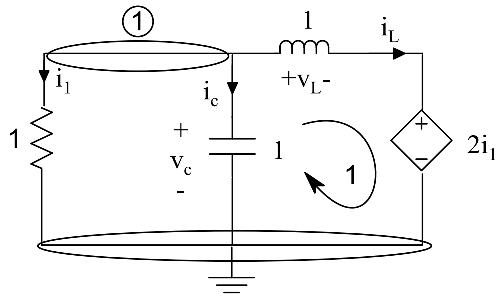
$h(t) = \frac{3}{16} e^{-\frac{1}{4}t} u(t) + (\frac{-3}{4} e^{-\frac{1}{4}t} + 1)\, \delta(t)$

$h(t) = \frac{3}{16} e^{-\frac{1}{4}t} u(t) + \frac{1}{4} \delta(t)$

۱۶) در مدار شکل زیر مطلوب است محاسبه ولتاژ $v_c(t)$ در همه زمان‌ها.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_1 + i_c + i_L = 0 \;\rightarrow\; v_c + \frac{dv_c}{dt} + \int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt = 0$ (1)

Kvl 1: $v_L + 2i_1 - v_c = 0 \;\rightarrow\; v_L + 2v_c - v_c = 0 \;\rightarrow\; v_L + v_c = 0$ (2)

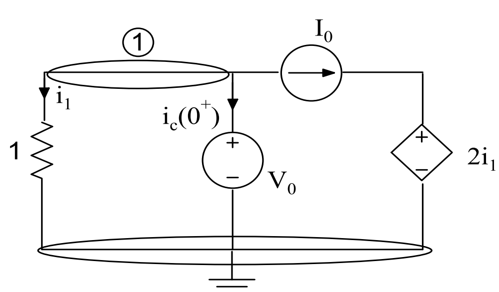
(1),(2) $\rightarrow\; v_c + \frac{dv_c}{dt} + \int_{-\infty}^{t} -v_c(t)dt = 0 \;\rightarrow\; \frac{d^2v_c}{dt^2} + \frac{dv_c}{dt} - v_c = 0$

$v_c(t) = k_1\, e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t} + k_2\, e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t}$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0$

$$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = i_c(0^+)$$

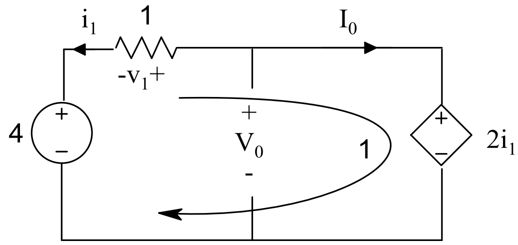
رسم مدار در $t = 0^+$



Kcl 1: $i_1 + i_c(0^+) + I_0 = 0$

$\rightarrow V_0 + i_c(0^+) + I_0 = 0 \;\rightarrow\; i_c(0^+) = - I_0 - V_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



Kvl 1: $-v_1 + 2i_1 - 4 = 0$

$\rightarrow -i_1 + 2i_1 - 4 = 0 \rightarrow i_1 = 4$

$I_0 = -i_1 = -4$, $V_0 = 2i_1 = 8$

$v_c(t) = k_1\, e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t} + k_2\, e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t}$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0 = 8$

$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = i_c(0^+) = -I_0 - V_0 = 4 - 8 = -4$

$v_c(0^+) = k_1 + k_2 = 8 \quad (1)$

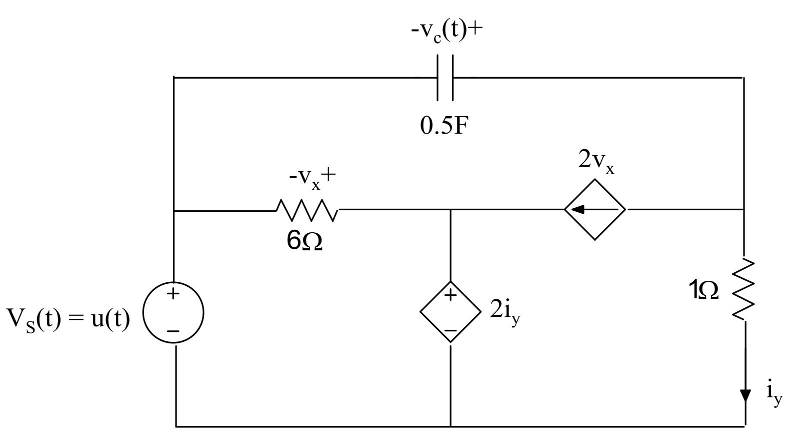
$\frac{dv_c}{dt} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} k_1\, e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} k_2\, e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t}$

$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} k_1 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} k_2 = -4 \quad (2)$

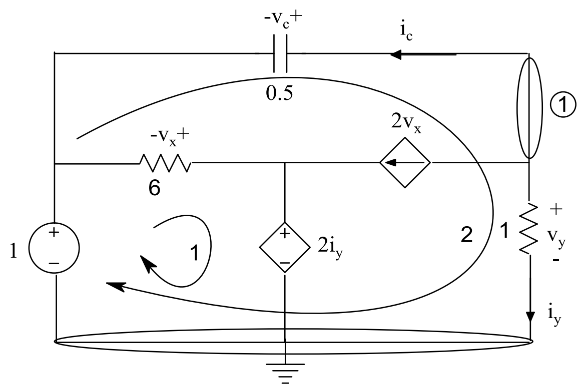
$(1),(2) \rightarrow \begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = 4 \end{cases}$

$v_c(t) = 4\, e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t} + 4\, e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t}$

۱۷) در مدار شکل زیر پاسخ پله $v_c(t)$ را بدست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



$$\text{Kcl 1:}\quad i_c + 2v_x + i_y = 0 \;\rightarrow\; 0/5\,\frac{dv_c}{dt} + 2v_x + v_y = 0 \quad (1)$$

$$\text{Kvl 1:}\quad -v_x + 2i_y - 1 = 0 \;\rightarrow\; -v_x + 2v_y - 1 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Kvl 2:}\quad -v_c + v_y - 1 = 0 \;\rightarrow v_y = v_c + 1 \quad (3)$$

$$(1),(2),(3) \;\rightarrow 0/5\,\frac{dv_c}{dt} + 4v_c + 4 - 2 + v_c + 1 = 0 \;\rightarrow\; 0/5\,\frac{dv_c}{dt} + 5v_c = -3$$

$$\rightarrow\; \frac{dv_c}{dt} + 10v_c = -6$$

$$v_c(t) = k\,e^{-10\,t} - \frac{3}{5}$$

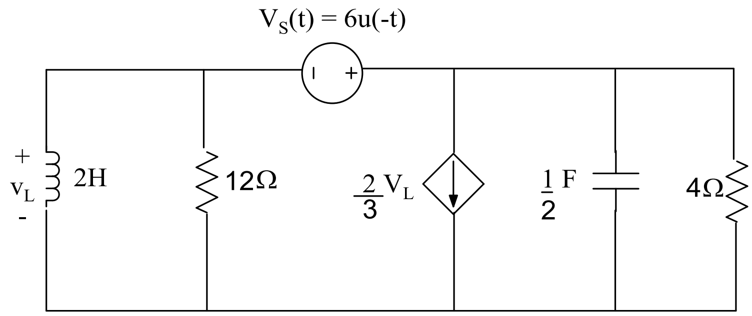
$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = v_0 \xrightarrow{\text{مدار در حالت صفر است}} v_0 = 0$$

$$v_c(0^+) = k - \frac{3}{5} = 0 \;\rightarrow\; k = \frac{3}{5}$$

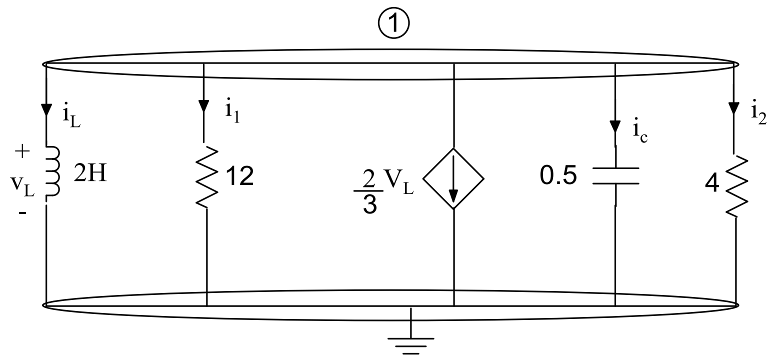
$$v_c(t) = \frac{3}{5}\,e^{-10\,t} - \frac{3}{5}$$

$$S(t) = \left(\frac{3}{5}\,e^{-10\,t} - \frac{3}{5}\right)u(t)$$

۱۸) در مدار شکل زیر در تمام زمان‌ها $v_L(t)$ را بدست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_L + i_1 + \frac{2}{3} v_L + i_c + i_2 = 0$

$\rightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt + \frac{1}{12} v_L + \frac{2}{3} v_L + 0/5 \frac{dv_L}{dt} + \frac{1}{4} v_L = 0$

$\rightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt + 0/5 \frac{dv_L}{dt} + v_L = 0$

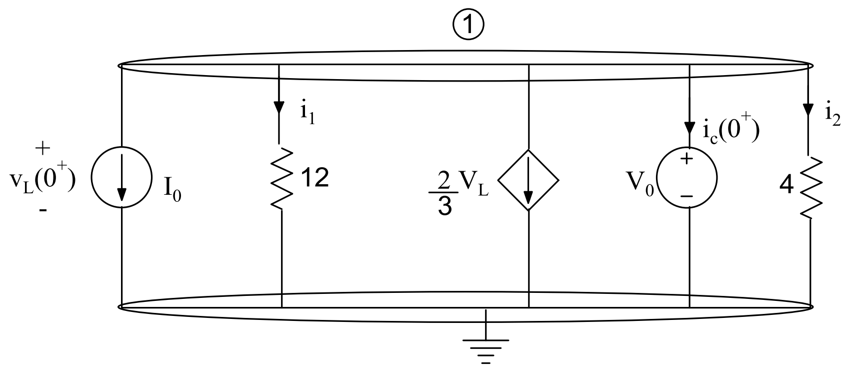
$\rightarrow 0/5 \frac{d^2v_L}{dt^2} + \frac{dv_L}{dt} + \frac{1}{2} v_L = 0 \rightarrow \frac{d^2v_L}{dt^2} + 2\frac{dv_L}{dt} + v_L = 0$

$v_L(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-t}$

$v_L(0^+) = ?$

$\frac{dv_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = 2i_c(0^+)$

رسم مدار در $t = 0^+$

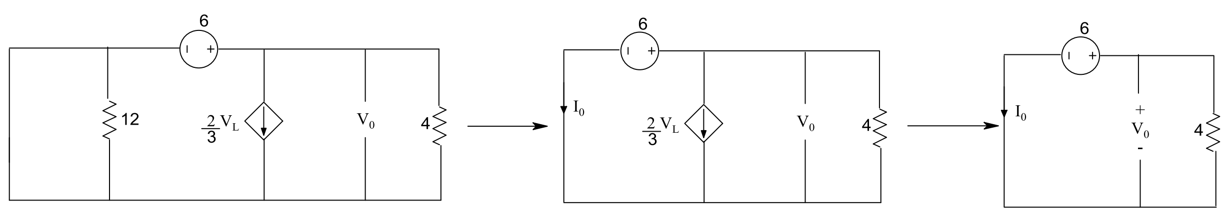


$v_L(0^+) = v_0$

Kcl 1: $I_0 + i_1 + \frac{2}{3} v_L + i_c(0^+) + i_2 = 0 \;\rightarrow\; I_0 + \frac{V_0}{12} + \frac{2}{3} V_0 + i_c(0^+) + \frac{V_0}{4} = 0$

$i_c(0^+) = - I_0 - V_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



$I_0 = -\frac{3}{2}$

$V_0 = 6$

$v_L(t) = (k_1 + k_2 t)\, e^{-t}$

$v_L(0^+) = k_1 = 6$

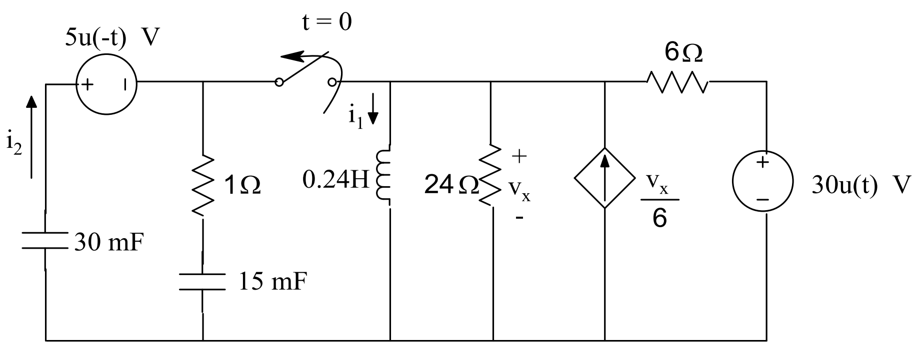
$\frac{dv_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = 2i_c(0^+) = 2(- I_0 - v_0) = 2(\frac{3}{2} - 6) = -9$

$\frac{dv_L}{dt} = k_2 e^{-t} - e^{-t} (6 + k_2 t)$

$\frac{dv_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = k_2 - 6 = -9 \;\rightarrow\; k_2 = -3$

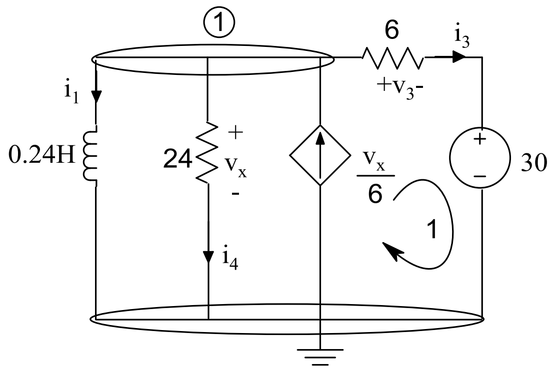
$v_L(t) = (6 - 3t)\, e^{-t}$

۱۹) کلید در مدار برای مدت طولانی بسته بوده و در لحظه $t = 0$ باز می‌شود. جریان‌های i_1 و i_2 را برای $t > 0$ بدست آورید.



برای محاسبه i_1 داریم :

رسم مدار در $t \geq 0$



$i_4 = \frac{v_x}{24}$, $v_x = 0/24\,\frac{di_1}{dt}$

Kcl 1: $i_1 + i_4 + i_3 = \frac{v_x}{6}$

$\rightarrow\ i_1 + 0/01\,\frac{di_1}{dt} + i_3 = 0/04\,\frac{di_1}{dt}$

$\rightarrow\ 0/03\,\frac{di_1}{dt} - i_3 - i_1 = 0 \quad (1)$

Kvl 1: $v_3 + 30 - v_x = 0 \rightarrow\ 6i_3 + 30 - 0/24\,\frac{di_1}{dt} = 0 \quad (2)$

$(1),(2) \rightarrow 0/03\,\frac{di_1}{dt} - \frac{1}{6}\left(0/24\,\frac{di_1}{dt}\right) + 5 - i_1 = 0$

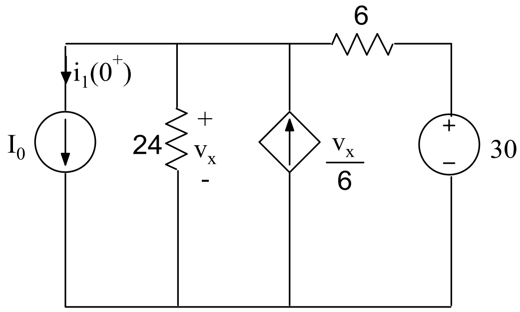
$- 0/01\,\frac{di_1}{dt} - i_1 = - 5$

$\frac{di_1}{dt} + 100 i_1 = 500$

$i_1(t) = k\, e^{-100\,t} + 5$

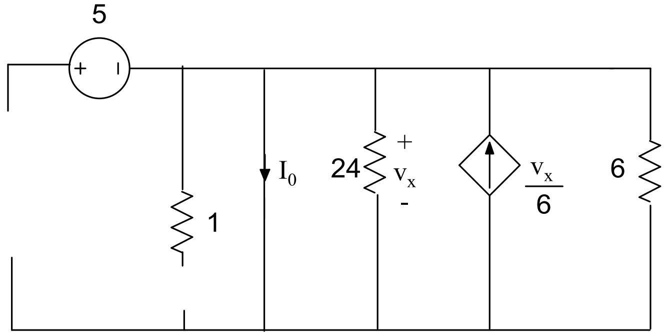
$i_1(0^+) = ?$

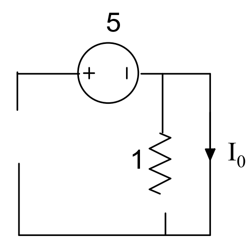
رسم مدار در $t = 0^+$



$\rightarrow\ i_1(0^+) = I_0$

رسم مدار در $t = 0^-$





$\rightarrow\ I_0 = 0$

$i_1(t) = k\, e^{-100\,t} + 5$

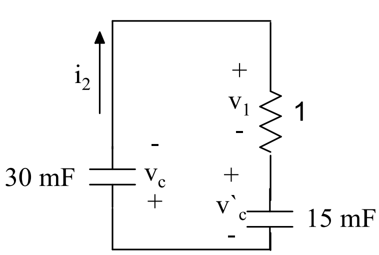
$i_1(0^+) = I_0 = 0$

$i_1(0^+) = k + 5 = 0\ \rightarrow\ k = -5$

$i_1(t) = -5\, e^{-100\,t} + 5$

برای محاسبه i_2 داریم :

رسم مدار در $t \geq 0$



Kvl 1: $v_1 + v'_c + v_c = 0$

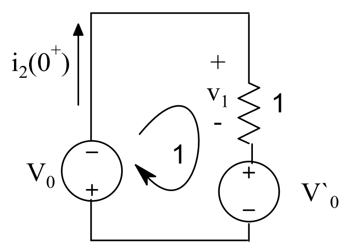
$\rightarrow\ i_2 + \frac{200}{3}\int_{-\infty}^{t} i_2(t)dt + \frac{100}{3}\int_{-\infty}^{t} i_2(t)dt = 0$

$\rightarrow\ \frac{di_2}{dt} + 100i_2 = 0$

$i_2(t) = k\, e^{-100\, t}$

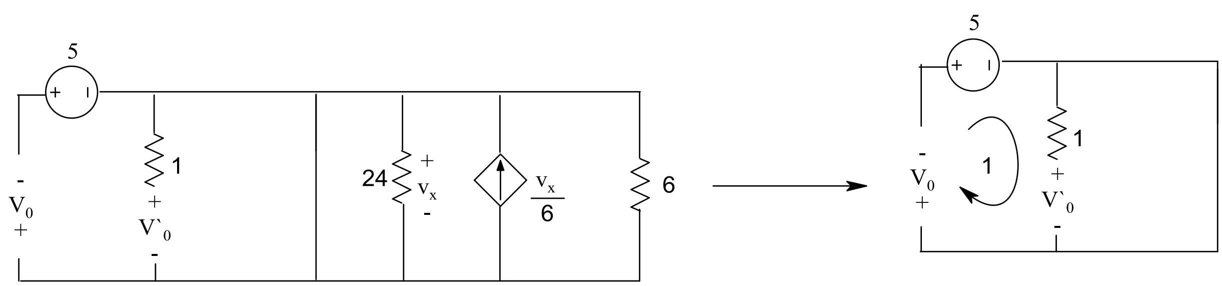
$i_2(0^+) = ?$

رسم مدار در $t = 0^+$



Kvl 1: $v_1 + V'_0 + V_0 = 0 \ \rightarrow\ i_2(0^+) = -V'_0 - V_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



Kvl 1: $5 + V'_0 + V_0 = 0 \quad \rightarrow\ - V'_0 - V_0 = 5$

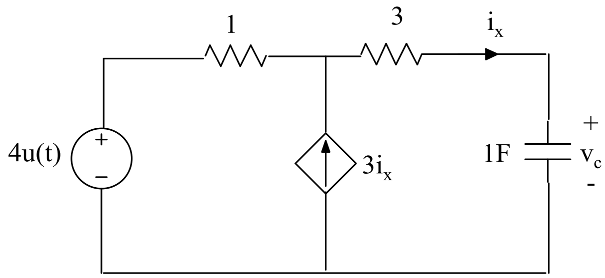
$i_2(t) = k\, e^{-100\, t}$

$i_2(0^+) = - V'_0 - V_0 = 5$

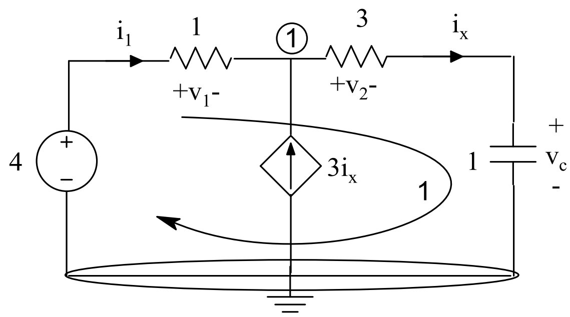
$i_2(0^+) = k = 5$

$i_2(t) = 5\, e^{-100\, t}$

۲۰) در مدار شکل زیر، ولتاژ خازن را برای همه زمان‌ها به دست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



KCL 1: $i_1 + 3i_x = i_x \rightarrow i_1 + 2i_x = 0 \rightarrow v_1 + 2\frac{dvc}{dt} = 0 \quad (1)$

KVL 1: $v_1 + v_2 + v_c - 4 = 0 \quad (2)$

$i_x = \frac{v_2}{3} = \frac{dvc}{dt} \rightarrow v_2 = 3\frac{dvc}{dt} \quad (3)$

$(1),(2),(3) \rightarrow -2\frac{dvc}{dt} + 3\frac{dvc}{dt} + v_c - 4 = 0 \rightarrow \frac{dvc}{dt} + v_c = 4$

$v_c(t) = k\, e^{-t} + 4$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = v_0$

مدار در حالت صفر است پس:

$v_0 = 0$

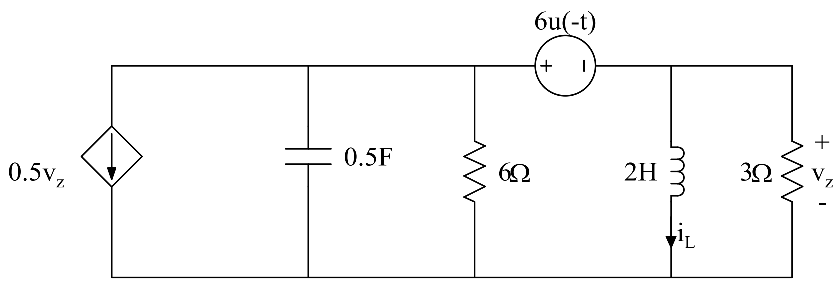
$v_c(t) = k\, e^{-t} + 4$

$v_c(0^+) = 0$

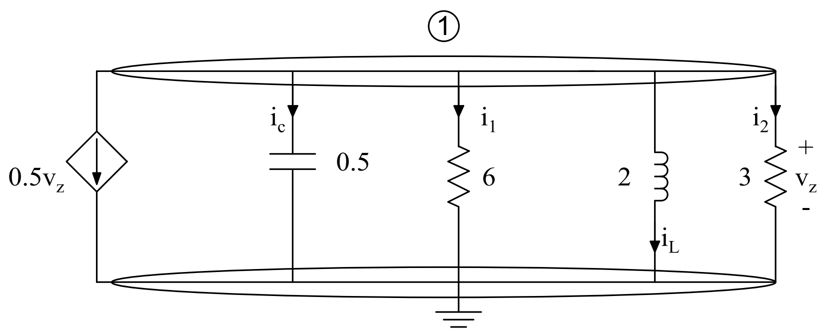
$\rightarrow k = -4$

$V_c(t) = -4e^{-t} + 4$

۲۱) جریان سلف، $i_L(t)$ را برای همه زمان‌ها محاسبه نمایید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $0/5v_z + i_c + i_1 + i_L + i_2 = 0 \quad (1)$

$V_z = 3i_2 = 6i_1 = 2\frac{di_L}{dt} = 2\int_{-\infty}^{t} i_c(t)dt \qquad (2)$

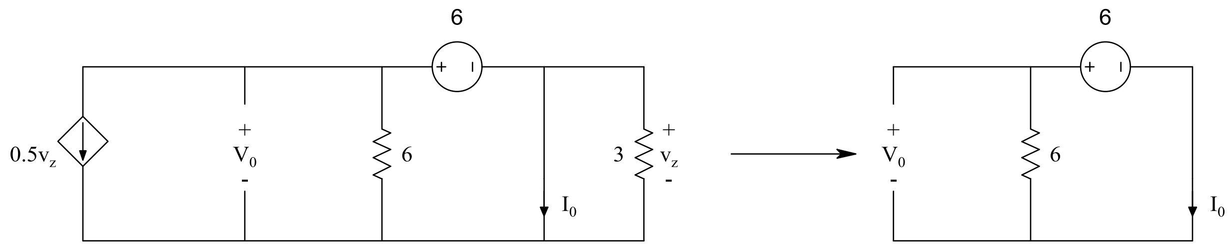
$(1),(2) \rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$

$i_L(t) = (k_1 + k_2 t)\, e^{-t}$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{1}{2} v_L(0^+) = \frac{1}{2}\ v_c(0^+) = \frac{1}{2} V0$

رسم مدار در $t = 0^-$



$V_0 = 6 \quad , \quad I_0 = \frac{-V_0}{6} = -1$

$i_L(t) = (k_1 + k_2 t)\, e^{-t}$

$i_L(0^+) = -1$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0+} = 3$

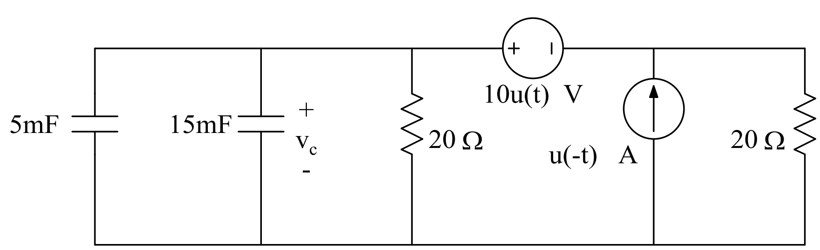
$i_L(0^+) = k_1 = -1 \;\rightarrow\; k_1 = -1$

$\frac{di_L}{dt} = k_2 e^{-t} - e^{-t}(-1 + k_2 t)$

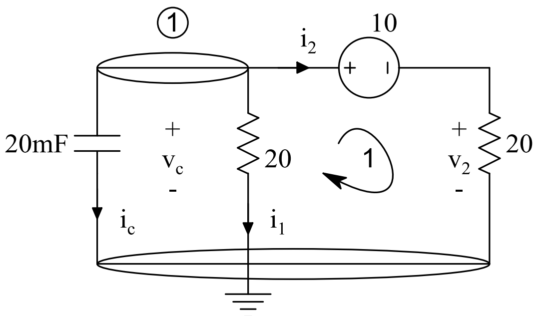
$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0+} = k_2 + 1 = 3 \;\rightarrow\; k_2 = 2$

$i_L(t) = (-1 + 2t)\, e^{-t}$

۲۲) ولتاژ $v_c(t)$ را برای $t \geq 0$ بدست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_c + i_1 + i_2 = 0 \quad \rightarrow \quad 0/02\,\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{20} + \frac{v_2}{20} = 0 \quad (1)$

Kvl 1: $10 + v_2 - v_c = 0 \;\rightarrow\; v_2 = v_c - 10 \quad (2)$

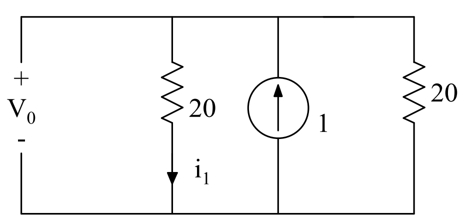
$0/02\,\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{20} + \frac{v_c}{20} = \frac{1}{2}$

$\frac{dv_c}{dt} + 5v_c = 25$

$v_c(t) = k\,e^{-5t} + 5$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = v_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



$i_1 = \frac{20}{20+20} \times 1 = \frac{1}{2}$

$V_0 = 20 \times \frac{1}{2} = 10$

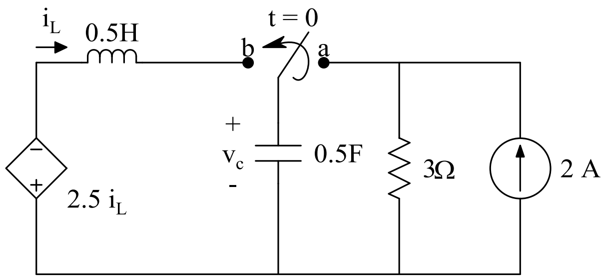
$v_c(t) = k\,e^{-5t} + 5$

$v_c(0^+) = 10$

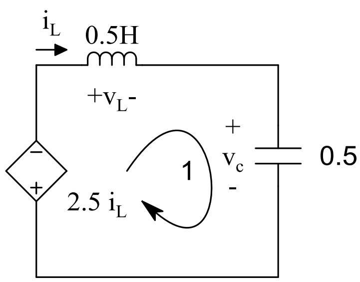
$v_c(0^+) = k + 5 = 10 \rightarrow k = 5$

$v_c(t) = 5\,e^{-5t} + 5$

۲۳) کلید در مدار برای مدت طولانی در وضعیت a بوده و در $t = 0$ به وضعیت b می‌رود. جریان $i_L(t)$ را برای $t > 0$ تعیین کنید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kvl 1: $v_L + v_c + 2/5 i_L = 0$

$\rightarrow\ 0/5\,\frac{di_L}{dt} + 2\int_{-\infty}^{t} i_L(t)dt + 2/5 i_L = 0$

$\rightarrow\ 0/5\,\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2/5\,\frac{di_L}{dt} + 2i_L = 0$

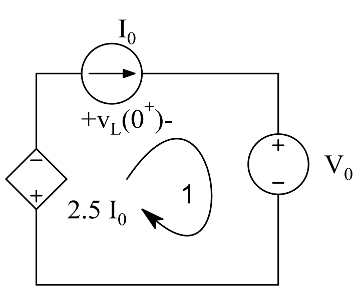
$\rightarrow\ \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 5\,\frac{di_L}{dt} + 4i_L = 0$

$i_L(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-4t}$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = 2v_L(0^+)$

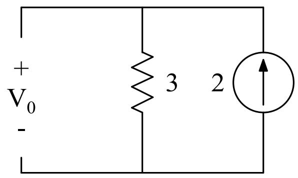
رسم مدار در $t = 0^+$



Kvl 1: $v_L(0^+) + V_0 + 2/5 I_0 = 0$

$\rightarrow\ v_L(0^+) = -V_0 - 2/5 I_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



$\rightarrow\ I_0 = 0 \quad , \quad v_0 = 3 \times 2 = 6$

$i_L(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-4t}$

$i_L(0^+) = 0$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = 2v_L(0^+) = 2(-V_0 - 2/5I_0) = -2V_0 = -12$

$i_L(0^+) = k_1 + k_2 = 0 \quad (1)$

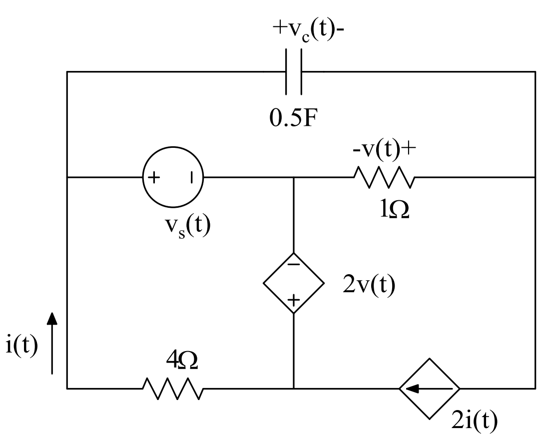
$\frac{di_L}{dt} = -k_1 e^{-t} - 4k_2 e^{-4t}$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = -k_1 - 4k_2 = -12 \quad (2)$

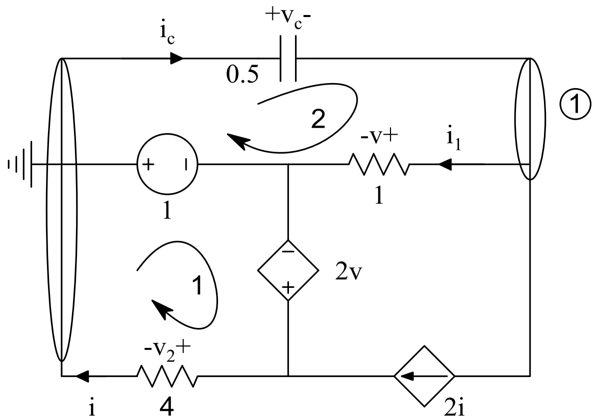
$(1),(2) \rightarrow k_1 = -4\ ,\ k_2 = 4$

$i_L(t) = -4 e^{-t} + 4 e^{-4t}$

۲۴) پاسخ پله ولتاژ $v_c(t)$ را برای $t \geq 0$ بدست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_c = i_1 + 2i$

$\rightarrow 0/5\,\frac{dv_c}{dt} = v + \frac{v_2}{2}$ (1)

Kvl 1: $1 - 2v + v_2 = 0$ (2)

Kvl 2: $v_c + v - 1 = 0$ (3)

(1),(2),(3) $\rightarrow\ 0/5\,\frac{dv_c}{dt} = 1 - v_c + \frac{1}{2} - v_c\ \rightarrow\ \frac{dv_c}{dt} + 4v_c = 3$

$v_c(t) = k\,e^{-4t} + \frac{3}{4}$

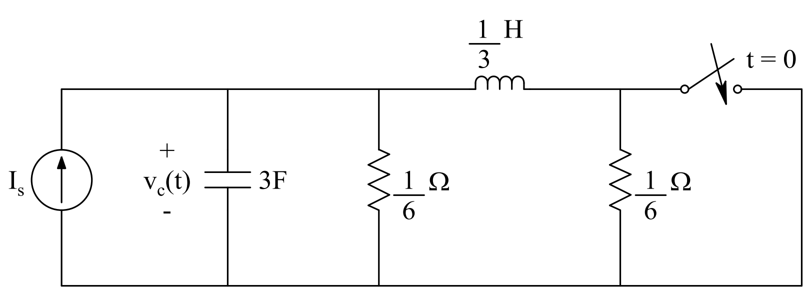
$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0 \xrightarrow{\text{مدار در حالت صفر است}} V_0 = 0$

$v_c(0^+) = k + \frac{3}{4} = 0\ \rightarrow\ k = \frac{-3}{4}$

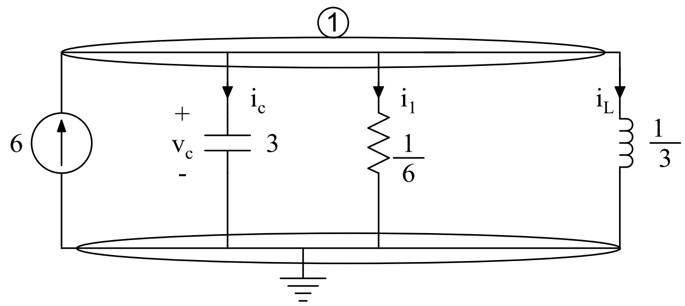
$v_c(t) = \frac{-3}{4}\,e^{-4t} + \frac{3}{4}$

$S(t) = \left(\frac{-3}{4}\,e^{-4t} + \frac{3}{4}\right) u(t)$

۲۵) کلید در $t = 0$ بسته می‌شود. ولتاژ $v_c(t)$ را برای $t \geq 0$ تعیین کنید. ($I_s = 6$ A)



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_c + i_1 + i_L = 6 \rightarrow 3\frac{dv_c}{dt} + 6v_c + 3\int_{-\infty}^{t} v_c(t)dt = 6$

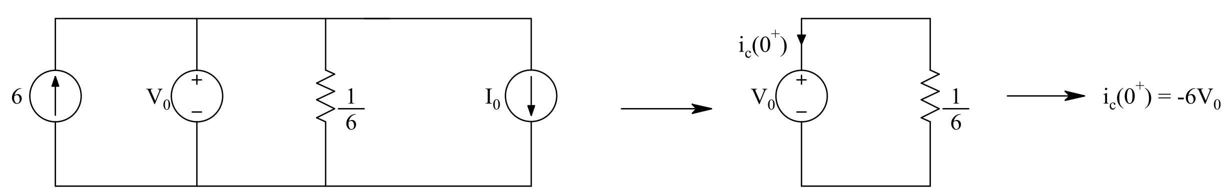
$\rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2} + 2\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0$

$v_c(t) = (k_1 + k_2 t)\, e^{-t}$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0$

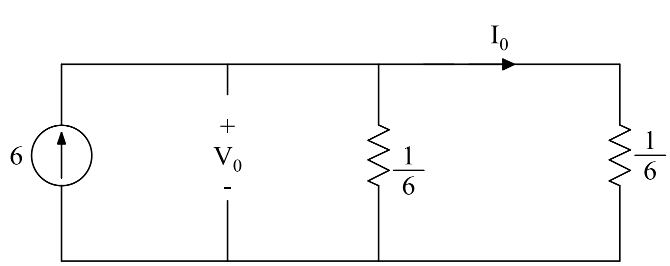
$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{i_c(0^+)}{3}$

رسم مدار در $t = 0^+$



نکته: منبع جریان موازی با منبع ولتاژ از مدار حذف می‌شود.

رسم مدار در $t = 0^-$



$I_0 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}} \times 6 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$, $V_0 = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$v_c(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-t}$

$v_c(0^+) = V_0 = \frac{1}{2}$

$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{i_c(0^+)}{3} = \frac{-6V_0}{3} = -2V_0 = -1$

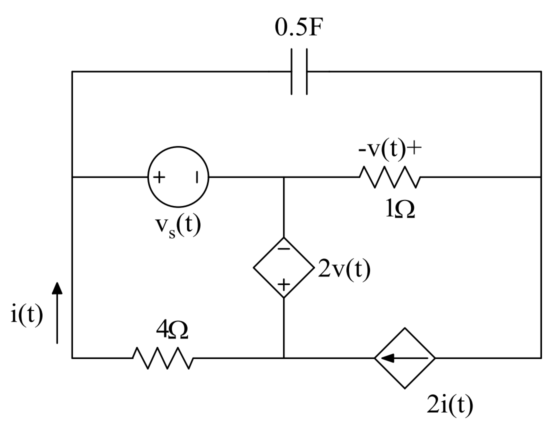
$v_c(0^+) = k_1 = \frac{1}{2}$

$\frac{dv_c}{dt} = k_2 e^{-t} - e^{-t} (k_1 + k_2 t)$

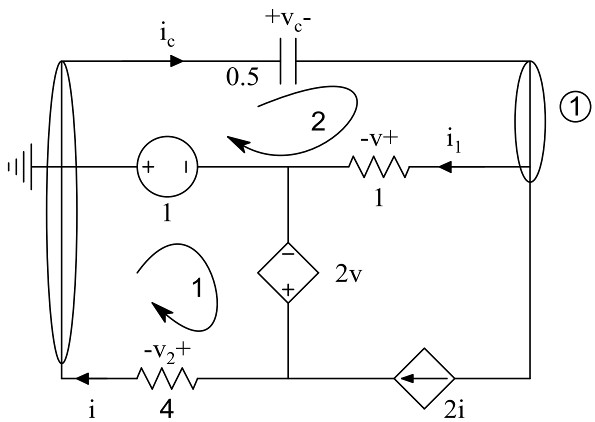
$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = k_2 - k_1 = k_2 - \frac{1}{2} = -1 \rightarrow k_2 = \frac{-1}{2}$

$v_c(t) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} t) e^{-t}$

۲۶) پاسخ ضربه ولتاژ $v(t)$ را برای $t \geq 0$ بدست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_c = i_1 + 2i$

$\rightarrow 0/5\,\frac{dv_c}{dt} = v + \frac{v_2}{2}$ (1)

Kvl 1: $1 - 2v + v_2 = 0$ (2)

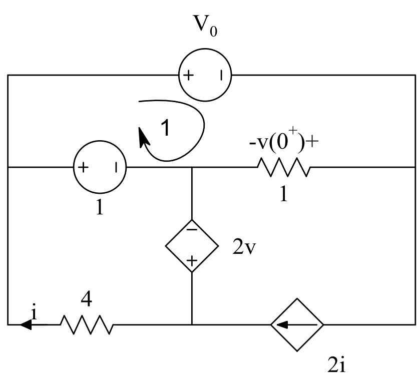
Kvl 2: $v_c + v - 1 = 0$ (3)

(1),(2),(3) $\rightarrow \frac{dv}{dt} + 4v = 1$

$v(t) = k\,e^{-4t} + \frac{1}{4}$

$v(0^+) = ?$

رسم مدار در $t = 0^+$



Kvl 1: $V_0 + v(0^+) - 1 = 0$

$\rightarrow v(0^+) = 1 - V0$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0 \xrightarrow{\text{مدار در حالت صفر است}} V_0 = 0$

$\rightarrow v(0^+) = 1 - V0 = 1$

$v(0^+) = k + \frac{3}{4} = 1 \rightarrow k = \frac{1}{4}$

$v(t) = \frac{1}{4}\,e^{-4t} + \frac{1}{4}$

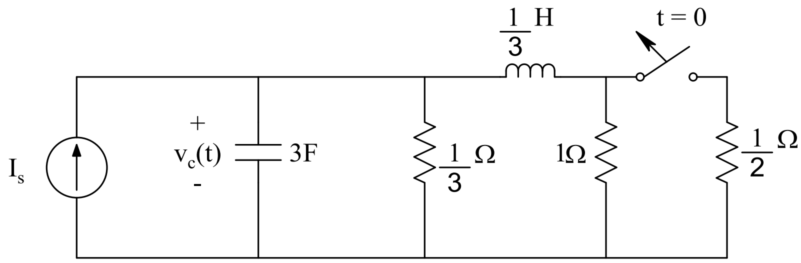
$S(t) = (\frac{1}{4}\,e^{-4t} + \frac{1}{4})\,u(t)$

$h(t) = (-\,e^{-4t})\,u(t) + (\frac{1}{4}\,e^{-4t} + \frac{1}{4})\,\delta(t)$

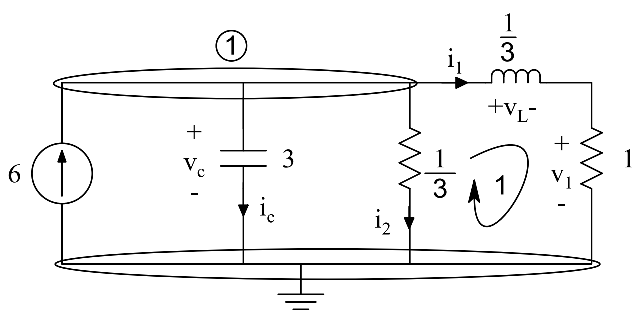
$\rightarrow h(t) = (- e^{-4t})\, u(t) + \frac{1}{2}\,\delta(t)$

۲۷) کلید برای مدت طولانی بسته بوده و در $t = 0$ باز می‌شود. ولتاژ $v_c(t)$ را برای $t \geq 0$ تعیین کنید.

$(I_s = 6\ A)$



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_1 + i_2 + i_c = 6 \quad (1)$

Kvl 1: $v_L + v_1 - v_c = 0 \quad (2)$

$i_1 = v_1 = 3\int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt \quad (3)$

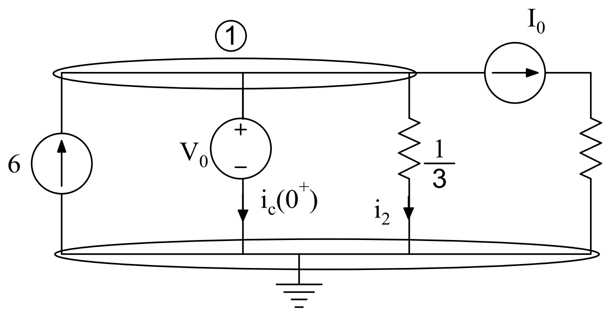
$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + 4\,\frac{dv_c}{dt} + 4v_c = 6$

$v_c(t) = (k_1 + k_2\, t)\, e^{-2t} + \frac{3}{2}$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0$

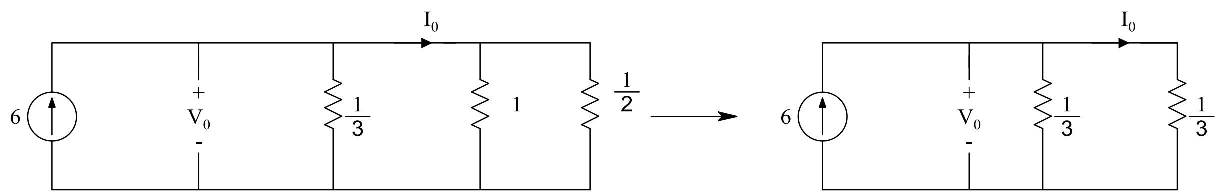
$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{i_c(0^+)}{3}$

رسم مدار در $t = 0^+$



Kcl 1: $I_0 + i_2 + i_c(0^+) = 6 \;\rightarrow\; i_c(0^+) = 6 - I_0 - 3V_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



$I_0 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \times 6 = 3 \quad , \quad V_0 = 3 \times \frac{1}{3} = 1$

$v_c(t) = (k_1 + k_2\, t)\, e^{-2\,t} + \frac{3}{2}$

$v_c(0^+) = 1$

$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{i_c(0^+)}{3} = 2 - \frac{I_0}{3} - V_0 = 2 - 1 - 1 = 0$

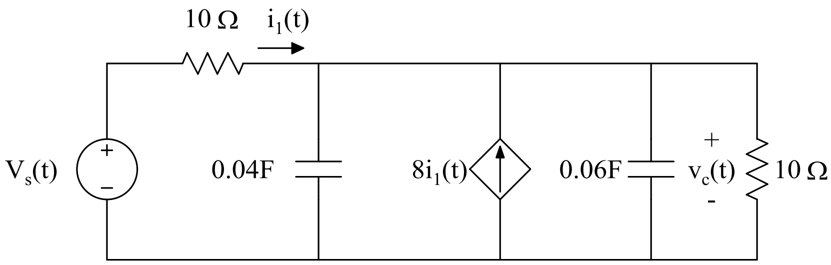
$v_c(0^+) = k_1 + \frac{3}{2} = 1 \;\rightarrow k_1 = \frac{-1}{2}$

$\frac{dv_c}{dt} = k_2\, e^{-2\,t} - 2e^{-2\,t}\, (k_1 + k_2\, t)$

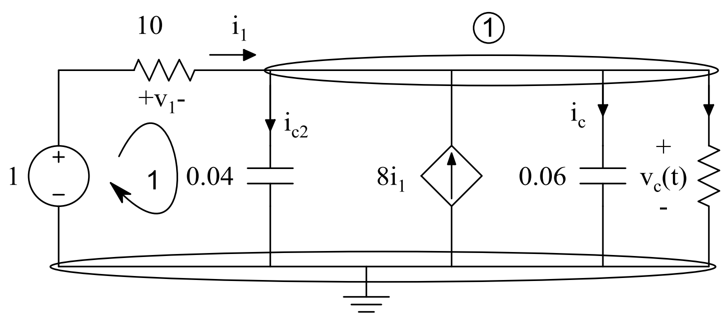
$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = k_2 - 2k_1 = k_2 + 1 = 0 \;\rightarrow\; k_2 = -1$

$v_c(t) = (\frac{-1}{2} - t)\, e^{-2\,t}$

۲۸) معادله دیفرانسیل $v_c(t)$ و پاسخهای پله و ضربه این ولتاژ را بدست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $9i_1 = i_c + ic_2 + i_2 \rightarrow \frac{9}{10}v_1 = 0/04\,\frac{dv_c}{dt} + 0/06\,\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{10}$

$\rightarrow \frac{9}{10}v_1 = 0/1\,\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{10}$ (1)

Kvl 1: $v_1 + v_c - 1 = 0$ (2)

(1),(2)$\rightarrow \frac{-9}{10}v_c + \frac{9}{10} = 0/1\,\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{10} \rightarrow 0/1\,\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0/9 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} + 10v_c = 9$

$v_c(t) = k\,e^{-10\,t} + \frac{9}{10}$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0 \xrightarrow[\text{مدار در حالت صفر است}]{} V_0 = 0$

$v_c(0^+) = k + \frac{9}{10} = 0 \rightarrow k = \frac{-9}{10}$

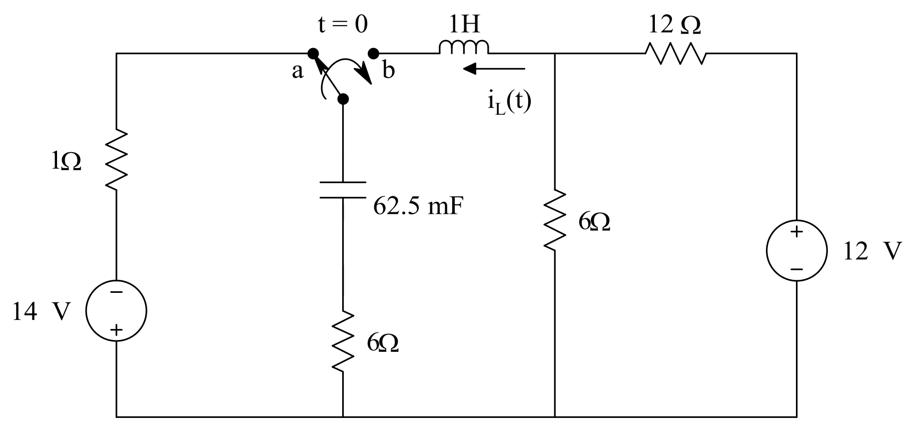
$v_c(t) = \frac{-9}{10}e^{-10\,t} + \frac{9}{10}$

$S(t) = (\frac{-9}{10}e^{-10\,t} + \frac{9}{10})\,u(t)$

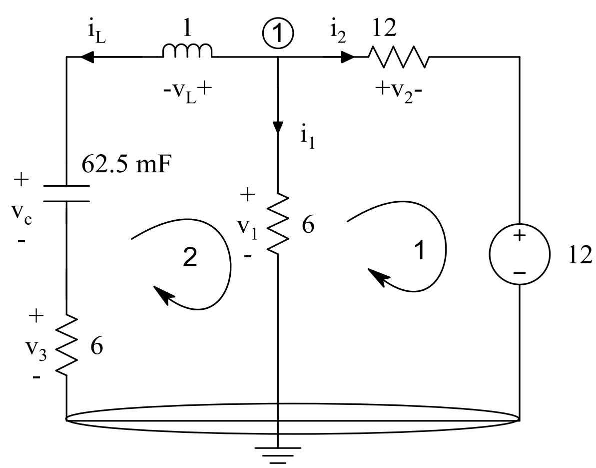
$$h(t) = 9\,e^{-10t}u(t) + \left(\frac{-9}{10}e^{-10t} + \frac{9}{10}\right)\delta(t)$$

$$h(t) = 9\,e^{-10t}\,u(t)$$

۲۹) کلید در مدار برای مدت طولانی در وضعیت a بوده، در t=0 به وضعیت b می‌رود. جریان $i_L(t)$ را برای $t > 0$ تعیین کنید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_L + i_1 + i_2 = 0$ (1)

Kvl 1: $v_2 + 12 - v_1 = 0$

$\rightarrow\ 12i_2 + 12 - 6i_1 = 0$

$\rightarrow\ 2i_2 + 2 - i_1 = 0$ (2)

Kvl 2: $-v_L - v_c - v_3 + v_1 = 0 \rightarrow \frac{-di_L}{dt} - 16\int_{-\infty}^{t} iL(t)dt - 6i_L + 6i_1 = 0$ (3)

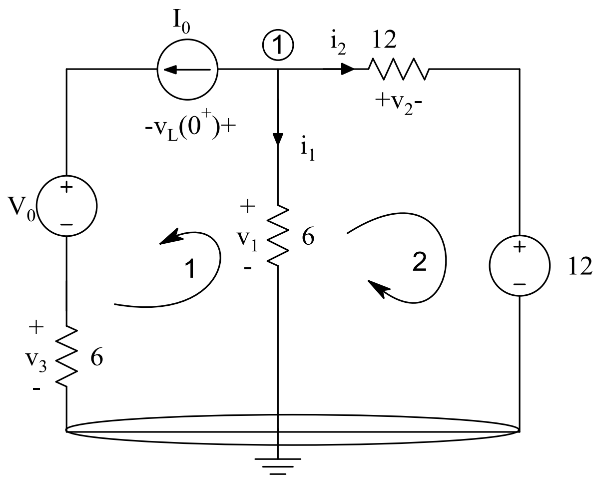
$$(1),(2),(3) \rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 10\frac{di_L}{dt} + 16\, i_L = 0$$

$i_L(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-8t}$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = v_L(0^+)$

رسم مدار در $t = 0^+$



Kcl 1 : $I_0 + i_1 + i_2 = 0$

$\rightarrow I_0 + \frac{v_1}{6} + \frac{v_2}{12} = 0$ (1)

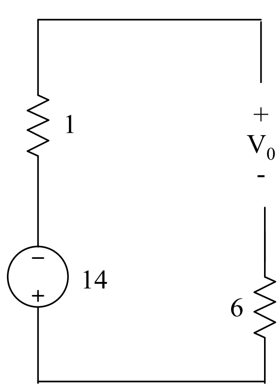
Kvl 1: $-v_1 + v_L(0^+) + V_0 + v_3 = 0$ $\rightarrow v_L(0^+) = v_1 - V_0 - 6I_0$ (2)

Kvl 2: $v_2 + 12 - v_1 = 0$

$\rightarrow v_2 = v_1 - 12$ (3)

(1),(2),(3) $\rightarrow v_L(0^+) = -10\, I_0 - v_0 + 4$

رسم مدار در $t = 0^-$



$\rightarrow I_0 = 0$, $v_0 = -14$

$i_L(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-8t}$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0 = 0$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = v_L(0^+) = -10\ I_0 - v_0 + 4 = 18$

$i_L(0^+) = k_1 + k_2 = 0 \quad (1)$

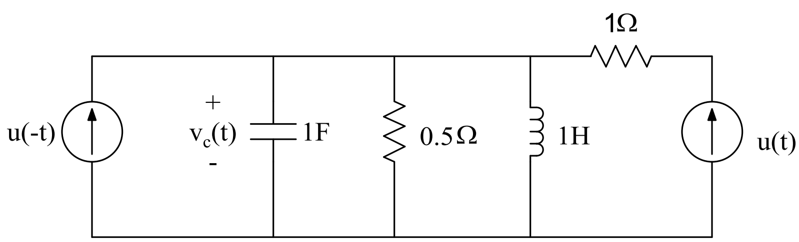
$\frac{di_L}{dt} = -2k_1\, e^{-2t} - 8k_2\, e^{-8t}$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0+} = -2k_1 - 8k_2 = 18 \quad (2)$

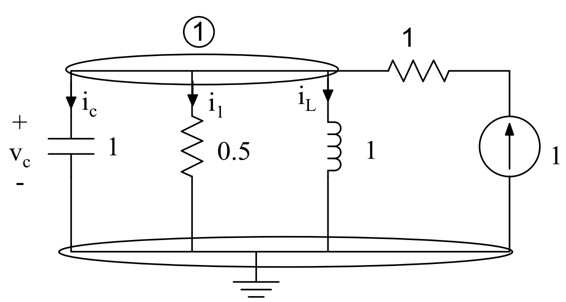
$(1),(2) \rightarrow k_1 = 3\ ,\ \ k_2 = -3$

$i_L(t) = 3\, e^{-2t} - 3\, e^{-8t}$

۳۰) در مدار زیر $v_c(t)$ را برای تمام زمان‌ها بدست آورید.



رسم مدار در $t\geq 0$



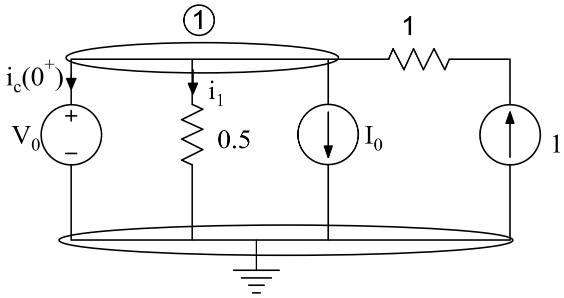
Kcl 1: $1 = i_c + i_1 + i_L \ \rightarrow\ 1 = \frac{dv_c}{dt} + 2v_c + \int_{-\infty}^{t} v_c(t)dt \ \rightarrow\ \frac{d^2v_c}{dt^2} + 2\,\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0$

$v_c(t) = (\ k_1 + k_2\, t\ )\ e^{-t}$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0$

$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = i_c(0^+)$

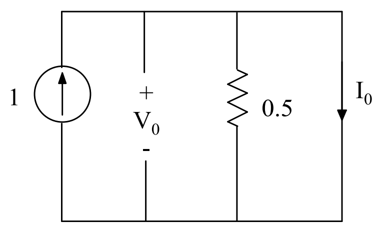
رسم مدار در $t=0^+$

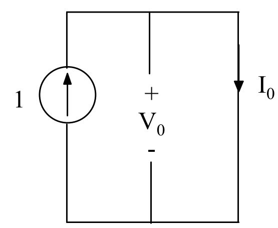


Kcl 1: $1 = i_c(0^+) + i_1 + I_0$

$\rightarrow i_c(0^+) = 1 - I_0 - 2v_0$

رسم مدار در $t = 0^-$





$\longrightarrow V_0 = 0 \quad , \quad I_0 = 1$

$v_c(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-t}$

$v_c(0^+) = 0$

$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = 0$

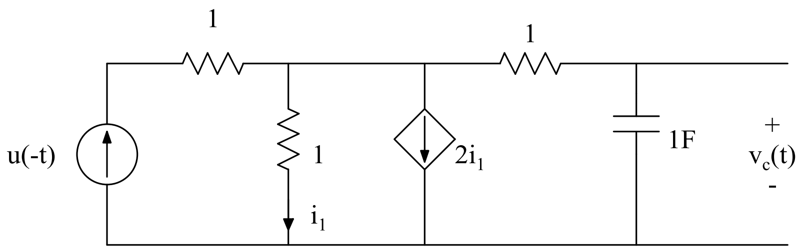
$v_c(0^+) = k_1 = 0$

$\frac{dv_c}{dt} = k_2 e^{-t} - e^{-t} (k_2 t)$

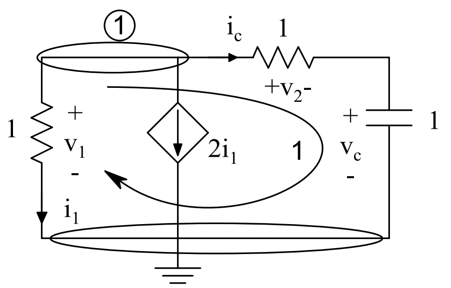
$\frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = k_2 = 0$

$\rightarrow v_c(t) = 0$

۳۱) در مدار زیر $v_c(t)$ را برای تمام زمان‌ها بیابید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_1 + 2i_1 + i_c = 0 \rightarrow 3i_1 + i_c = 0$

$\rightarrow 3v_1 + \frac{dv_c}{dt} = 0 \quad (1)$

$i_c = \frac{dv_c}{dt} = v_2 \quad (2)$

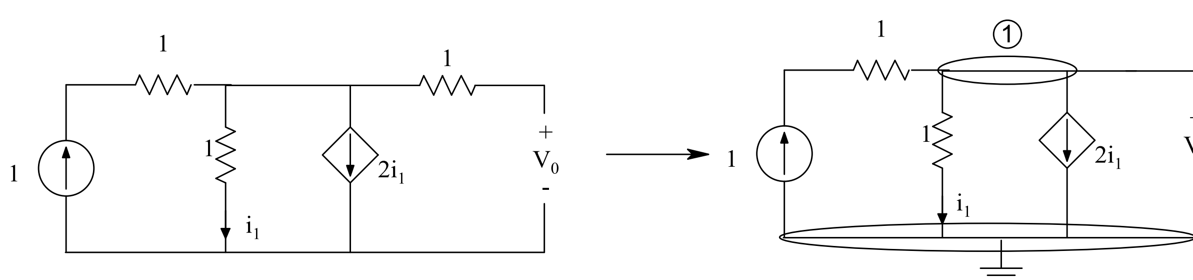
Kvl 1: $v_2 + v_c - v_1 = 0 \quad (3)$

$(1),(2),(3) \rightarrow \frac{dv_c}{dt} + \frac{3}{4} v_c = 0$

$v_c(t) = k\, e^{\frac{-3}{4}t}$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



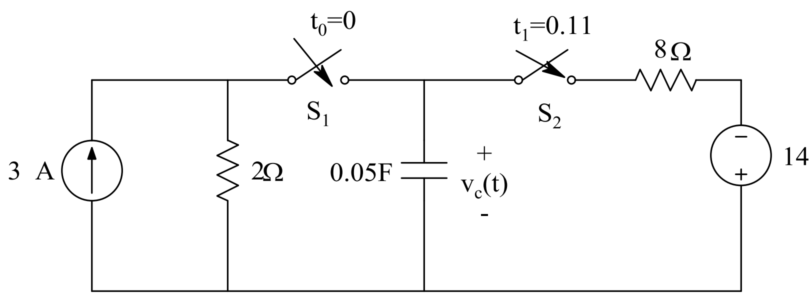
Kcl 1: $1 = i_1 + 2i_1 = 3\, i_1 \rightarrow i_1 = \frac{1}{3} \rightarrow V_0 = \frac{1}{3}$

$v_c(t) = k\, e^{\frac{-3}{4}t}$

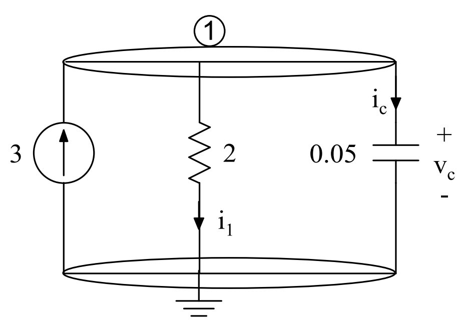
$v_c(0^+) = \frac{1}{3} \rightarrow v_c(0^+) = k = \frac{1}{3}$

$v_c(t) = \frac{1}{3} e^{\frac{-3}{4}t}$

۳۲) ابتدا کلید S_1 در لحظه $t_0 = 0$ و سپس کلید S_2 در لحظه $t_1= 0.11$ ثانیه بسته می‌شود. با فرض اینکه $v_c(0) = 0$ باشد، $v_c(t)$ را برای $t \geq 0$ بدست آورید.



رسم مدار در $0 \leq t < 0/11$



Kcl 1: $3 = i_1 + i_c \rightarrow 3 = \frac{v_c}{2} + 0/05\, \frac{dv_c}{dt}$

$\frac{dv_c}{dt} + 10v_c = 60$

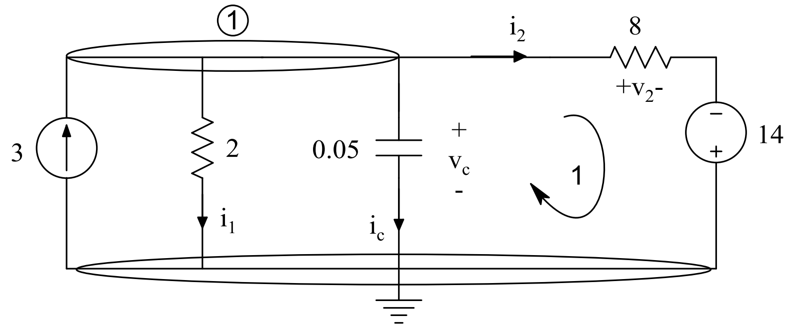
$v_c(t) = k\, e^{-10\,t} + 6$

$v_c(0) = 0$

$v_c(0) = k + 6 = 0 \rightarrow k = -6$

$v_c(t) = -6\, e^{-10\,t} + 6 \qquad (0 \leq t < 0/11)$

رسم مدار در $t \geq 0/11$



Kcl 1: $3 = i_1 + i_c + i_2 \rightarrow 3 = \frac{v_c}{2} + 0/05\,\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_2}{8}$ (1)

Kvl 1: $v_2 - 14 - v_c = 0 \rightarrow v_2 = 14 + v_c$ (2)

(1),(2) $\rightarrow 3 = \frac{v_c}{2} + 0/05\,\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{8} + \frac{7}{4} \rightarrow \frac{dv_c}{dt} + \frac{25}{2} v_c = 25$

$v_c(t) = k\, e^{\frac{-25}{2}(t-0/11)} + 2$

$v_c(0/11^-) = v_c(0/11^+)$

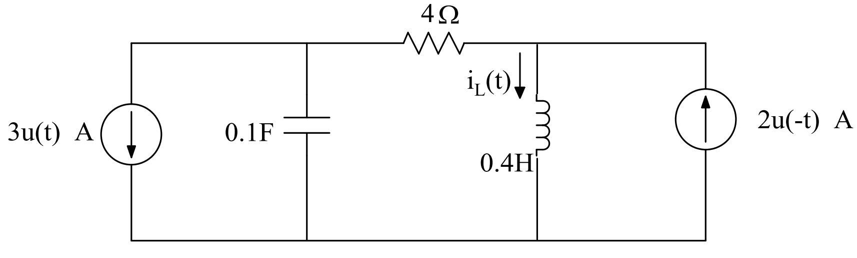
$v_c(0/11^-) = 6 - 6e^{-1/1}$

$e^{-1/1} \cong 0/3 \rightarrow v_c(0/11^-) = 6 - 6 \times 0/3 = 6 - 1/8 = 4/2$

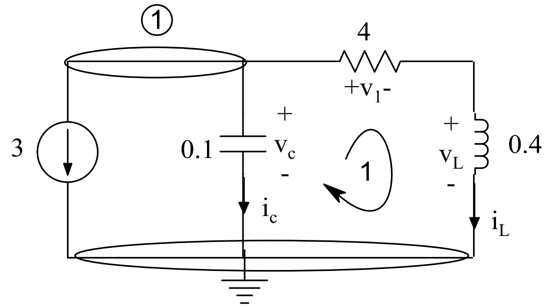
$v_c(0/11^+) = k + 2 = 4/2 \rightarrow k = 2/2$

$v_c(t) = 2/2\, e^{\frac{-25}{2}(t-0/11)} + 2 \quad (t \geq 0/11)$

۳۳) جریان $i_L(t)$ را برای $t \geq 0$ تعیین کنید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $3 + i_c + i_L = 0$ (1)

Kcl 1: $v_1 + v_L - v_c = 0 \rightarrow 4i_L + 0/4\,\frac{di_L}{dt} - 10\int_{-\infty}^{t} i_c(t)dt = 0$ (2)

(1),(2) $\rightarrow 4i_L + 0/4\,\frac{di_L}{dt} - 10\int_{-\infty}^{t}(-i_L - 3)dt = 0 \rightarrow 0/4\,\frac{d^2i_L}{dt^2} + 4\,\frac{di_L}{dt} + 10i_L = -30$

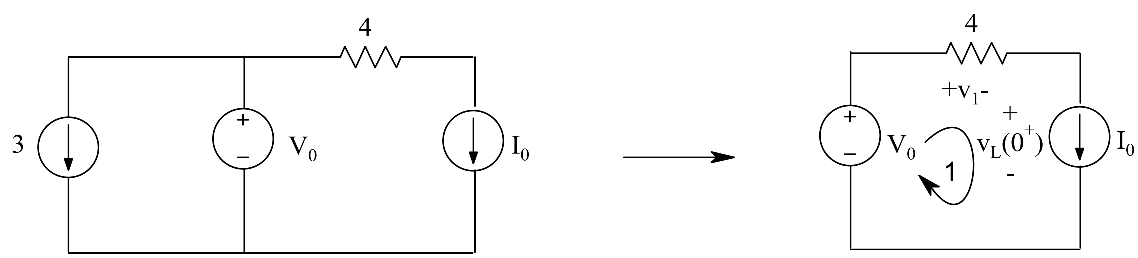
$\rightarrow \frac{d^2i_L}{dt^2} + 10\,\frac{di_L}{dt} + 25i_L = -75$

$i_L(t) = (k_1 + k_2 t)\,e^{-5t} - 3$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{0/4} = \frac{10}{4}\,v_L(0^+)$

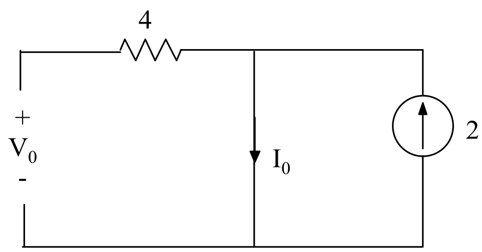
رسم مدار در $t = 0^+$



نکته: منبع جریان موازی با منبع ولتاژ از مدار حذف می‌شود.

Kvl 1: $v_1 + v_L(0^+) - V_0 = 0 \rightarrow v_L(0^+) = V_0 - v_1 = V_0 - 4I_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



$I_0 = 2\ ,\ V_0 = 0$

$i_L(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-5t} - 3$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0 = 2$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{0/4} = \frac{10}{4} v_L(0^+) = \frac{10}{4} (0 - 8) = -20$

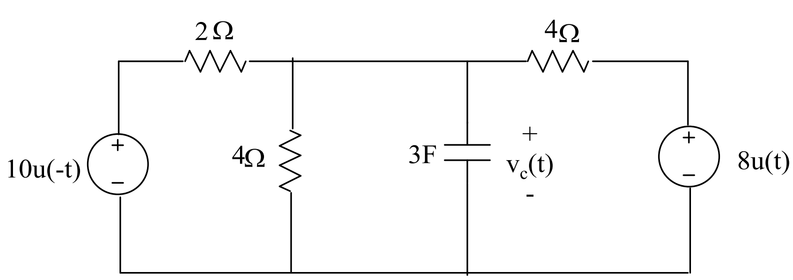
$i_L(0^+) = k_1 - 3 = 2 \ \rightarrow\ k_1 = 5$

$\frac{di_L}{dt} = (k_2) e^{-5t} - 5e^{-5t} (k_1 + k_2 t)$

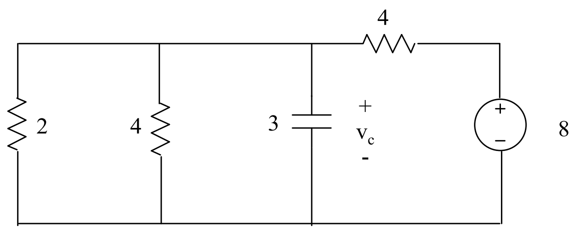
$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = k_2 - 5k_1 = k_2 - 25 = -20 \ \rightarrow\ k_2 = 5$

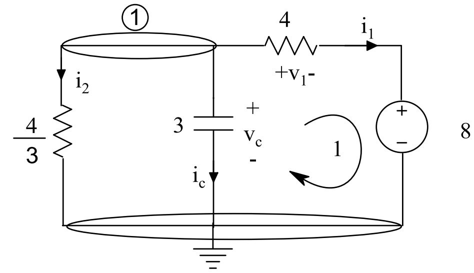
$i_L(t) = (5 + 5t) e^{-5t} - 3$

۳۴) در مدار شکل زیر، ولتاژ خازن $v_c(t)$ را برای زمان‌های $t \geq 0$ به دست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$





Kcl 1: $i_2 + i_c + i_1 = 0 \;\rightarrow \frac{3}{4} v_c + 3\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_1}{4} = 0$ (1)

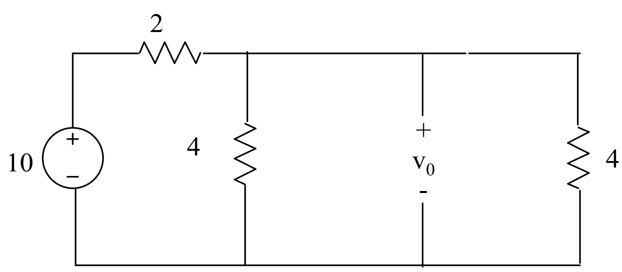
Kvl 1: $v_1 + 8 - v_c = 0$ (2)

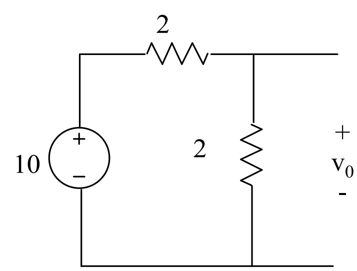
(1),(2) $\rightarrow \frac{3}{4} v_c + 3\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{4} - 2 = 0 \;\rightarrow\; \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{3} = \frac{2}{3}$

$v_c(t) = k\, e^{\frac{-1}{3}t} + 2$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0$

رسم مدار در $t = 0^-$





$V_0 = \frac{2}{2+2} \times 10 = 5$

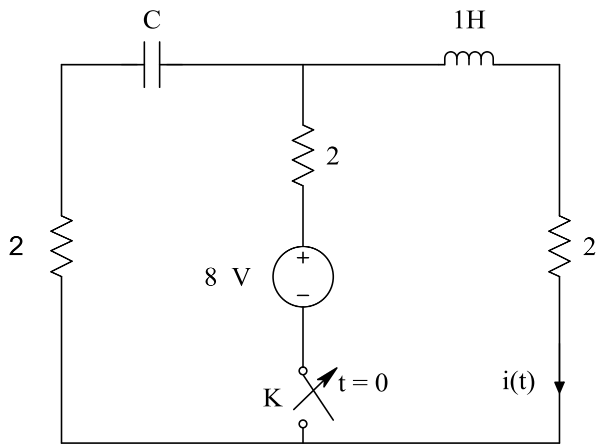
$v_c(t) = k\, e^{\frac{-1}{3}t} + 2$

$v_c(0^+) = 5$

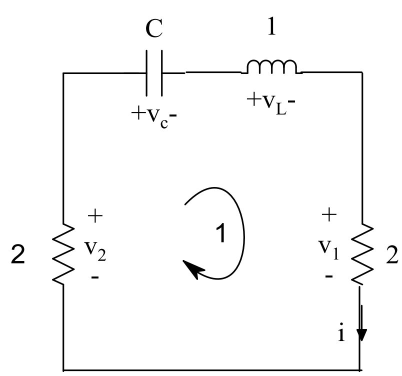
$v_c(0^+) = k + 2 = 5 \;\rightarrow\; k = 3$

$v_c(t) = 3\, e^{\frac{-1}{3}t} + 2$

۳۵) در این مدار کلید k به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t = 0$ باز می‌شود. مقدار خازن C را به گونه‌ای انتخاب کنید که پاسخ جریان i(t) در حالت میرایی بحرانی قرار گیرد. سپس این پاسخ را بیابید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kvl 1: $v_c + v_L + v_1 - v_2 = 0$

$\rightarrow \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt + \frac{di}{dt} + 2i + 2i = 0$

$\rightarrow \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt + \frac{di}{dt} + 4i = 0$

$\rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + 4\,\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$

$\Delta = 16 - 4\,(1)\,(\frac{1}{C}) = 0 \;\rightarrow\; 16 = \frac{4}{C} \;\rightarrow\; C = \frac{1}{4}\,F$

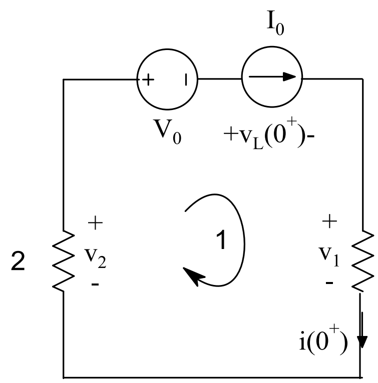
$\frac{d^2i}{dt^2} + 4\,\frac{di}{dt} + 4i = 0$

$i(t) = (k_1 + k_2\,t)\,e^{-2t}$

$i(0^+) = ?$

$\frac{di}{dt}\Big|_{t=0^+} = v_L(0^+) = ?$

رسم مدار در $t = 0^+$

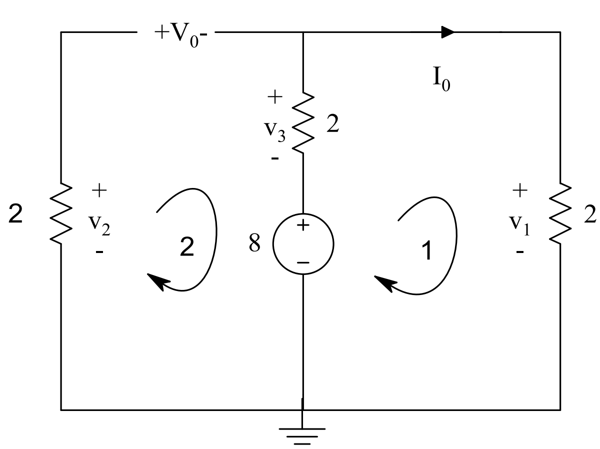


$i(0^+) = I_0$

Kvl 1: $V_0 + v_L(0^+) + 2I_0 + 2I_0 = 0$

$\rightarrow v_L(0^+) = -4I_0 - V_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



Kvl 1: $v_1 - 8 - v_3 = 0 \;\rightarrow\; 2I_0 - 8 + 2I_0 = 0 \;\rightarrow\; I_0 = 2$

Kvl 2: $v_3 + 8 - v_2 + V_0 = 0 \;\rightarrow\; -4 + 8 + V_0 = 0 \;\rightarrow\; V_0 = -4$

$i(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-2t}$

$i(0^+) = I_0 = 2$

$\frac{di}{dt}\Big|_{t=0^+} = v_L(0^+) = -4 I_0 - V_0 = -8 + 4 = -4$

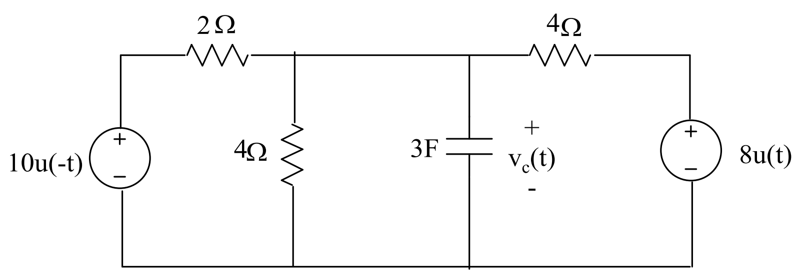
$i(0^+) = k_1 = 2$

$\frac{di}{dt} = (k_2)\, e^{-2t} - 2\, e^{-2t}\,(k_1 + k_2 t)$

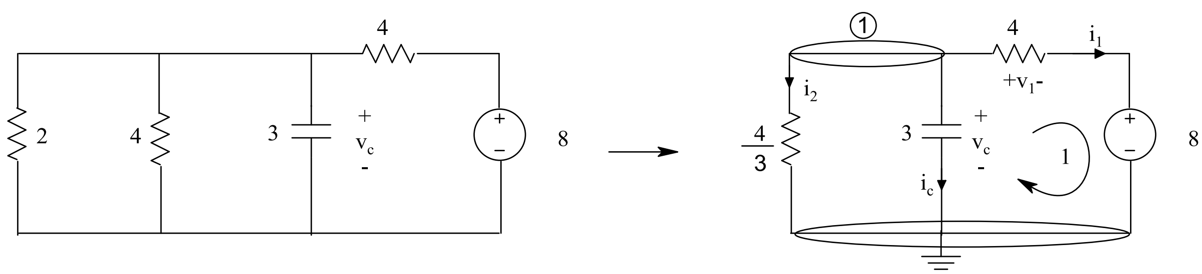
$\frac{di}{dt}\Big|_{t=0^+} = k_2 - 2\,(k_1) = k_2 - 4 = -4 \;\rightarrow\; k_2 = 0$

$i(t) = 2\, e^{-2t}$

۳۶) در مدار شکل زیر، ولتاژ خازن $v_c(t)$ را برای زمان‌های $t \geq 0$ به دست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_2 + i_c + i_1 = 0 \;\rightarrow \frac{3}{4} v_c + 3\,\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_1}{4} = 0$ (1)

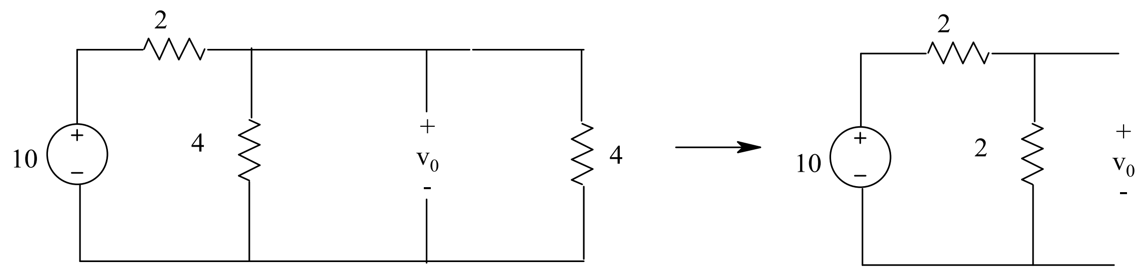
Kvl 1: $v_1 + 8 - v_c = 0$ (2)

(1),(2) $\rightarrow\; \frac{3}{4} v_c + 3\,\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{4} - 2 = 0 \;\rightarrow\; \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{3} = \frac{2}{3}$

$v_c(t) = k\, e^{\frac{-1}{3}t} + 2$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



$$V_0 = \frac{2}{2+2} \times 10 = 5$$

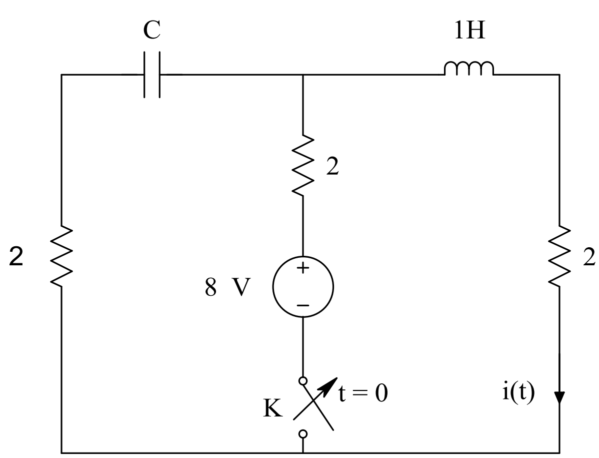
$$v_c(t) = k\, e^{\frac{-1}{3}t} + 2$$

$$v_c(0^+) = 5$$

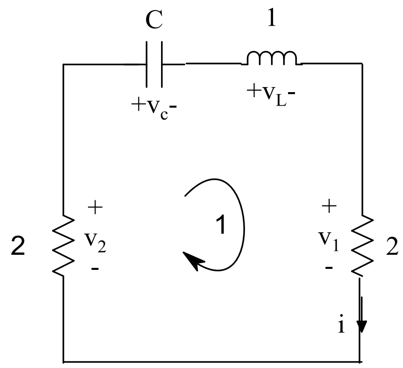
$$v_c(0^+) = k + 2 = 5 \;\rightarrow\; k = 3$$

$$v_c(t) = 3\, e^{\frac{-1}{3}t} + 2$$

۳۷) در این مدار کلید k به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t = 0$ باز می‌شود. مقدار خازن C را به گونه‌ای انتخاب کنید که پاسخ جریان $i(t)$ در حالت میرایی بحرانی قرار گیرد. سپس این پاسخ را بیابید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kvl 1: $v_c + v_L + v_1 - v_2 = 0$

$\rightarrow \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt + \frac{di}{dt} + 2i + 2i = 0$

$\rightarrow \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt + \frac{di}{dt} + 4i = 0$

$\rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + 4\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$

$\Delta = 16 - 4(1)(\frac{1}{C}) = 0 \rightarrow 16 = \frac{4}{C} \rightarrow C = \frac{1}{4}$ F

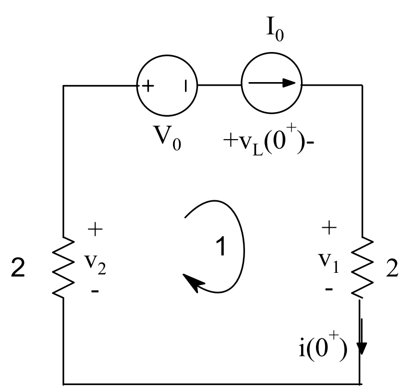
$\frac{d^2 i}{dt^2} + 4\frac{di}{dt} + 4i = 0$

$i(t) = (k_1 + k_2 t)e^{-2t}$

$i(0^+) = ?$

$\frac{di}{dt}\Big|_{t=0^+} = v_L(0^+) = ?$

رسم مدار در $t = 0^+$

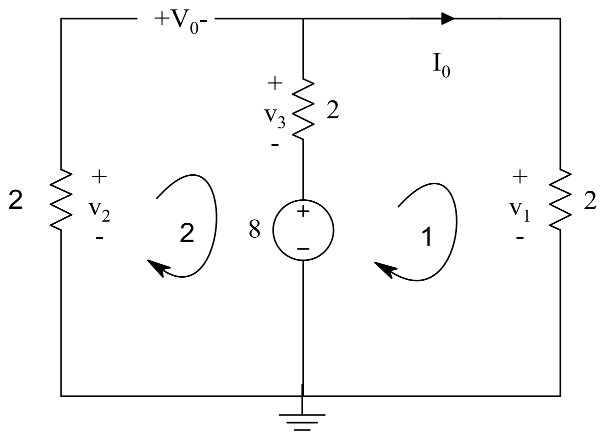


$i(0^+) = I_0$

Kvl 1: $V_0 + v_L(0^+) + 2I_0 + 2I_0 = 0$

$\rightarrow v_L(0^+) = -4I_0 - V_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



Kvl 1: $v_1 - 8 - v_3 = 0 \;\rightarrow\; 2I_0 - 8 + 2I_0 = 0 \;\rightarrow\; I_0 = 2$

Kvl 2: $v_3 + 8 - v_2 + V_0 = 0 \;\rightarrow\; -4 + 8 + V_0 = 0 \;\rightarrow\; V_0 = -4$

$i(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-2t}$

$i(0^+) = I_0 = 2$

$\frac{di}{dt}\Big|_{t=0^+} = v_L(0^+) = -4\, I_0 - V_0 = -8 + 4 = -4$

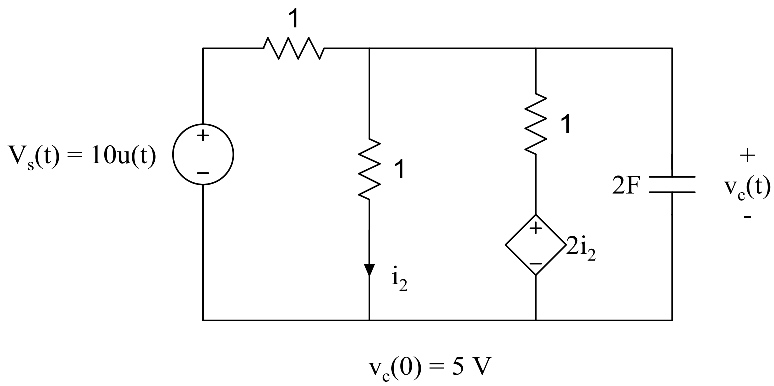
$i(0^+) = k_1 = 2$

$\frac{di}{dt} = (k_2) e^{-2t} - 2\, e^{-2t} (k_1 + k_2 t)$

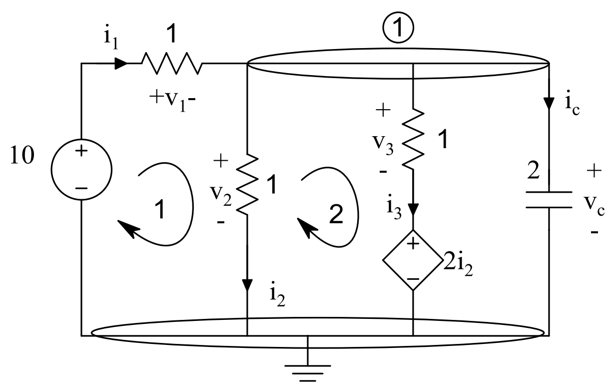
$\frac{di}{dt}\Big|_{t=0^+} = k_2 - 2 (k_1) = k_2 - 4 = -4 \;\rightarrow\; k_2 = 0$

$i(t) = 2\, e^{-2t}$

۳۸) در مدار مقابل $i_2(t)$ را برای $t \geq 0$ بدست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_1 = i_2 + i_3 + i_c$ (1)

Kvl 1: $v_1 + v_2 - 10 = 0 \rightarrow i_1 + i_2 - 10 = 0$ (2)

Kvl 2: $v_3 + 2i_2 - v_2 = 0 \rightarrow i_3 + 2i_2 - i_2 = 0 \rightarrow i_3 + i_2 = 0$ (3)

$v_2 = v_c \rightarrow i_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} i_c(t)dt$ (4)

(1),(2),(3),(4) $\rightarrow 10 - i_2 = i_2 - i_2 + 2\frac{di_2}{dt} \rightarrow \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{2} i_2 = 5$

$i_2(t) = k\, e^{\frac{-1}{2}t} + 10$

$i_2(0^+) = v_2(0^+) = v_c(0^+) = 5$

$i_2(0^+) = k + 10 = 5 \rightarrow k = -5$

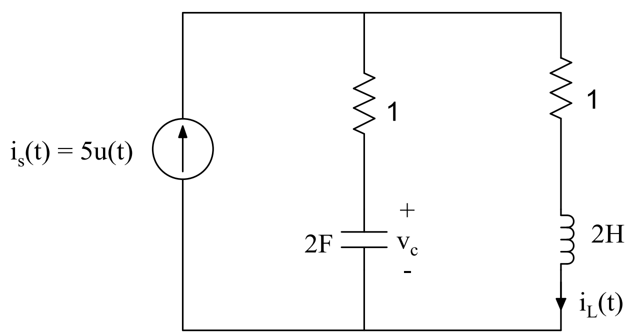
$i_2(t) = -5\, e^{\frac{-1}{2}t} + 10$

۳۹) در مدار مقابل:

الف) معادله دیفرانسیل $i_L(t)$ بر حسب $i_s(t)$ را بدست آورید.

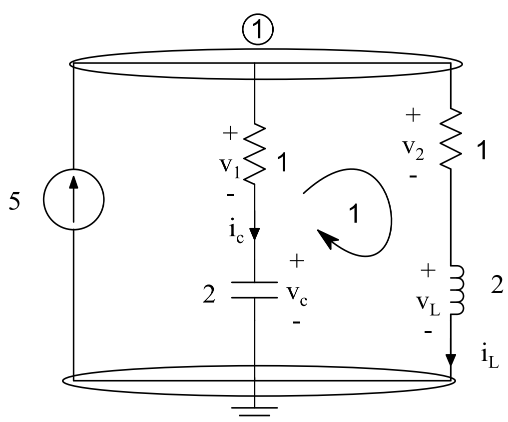
ب) شرایط اولیه این معادله دیفرانسیل یعنی $i_L(0)$ و $\frac{di_L}{dt}(0)$ را بنویسید.

ج) $i_L(t)$ را برای $t \geq 0$ حساب کنید.



$v_c(0) = i_L(0) = 0$

رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $5 = i_c + i_L \quad (1)$

Kvl 1: $v_2 + v_L - v_c - v_1 = 0$

$\rightarrow i_L + 2\frac{di_L}{dt} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} i_c(t)dt - i_c = 0 \; (2)$

$(1),(2) \rightarrow i_L + 2\frac{di_L}{dt} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}(5 - i_L)dt + i_L - 5 = 0$

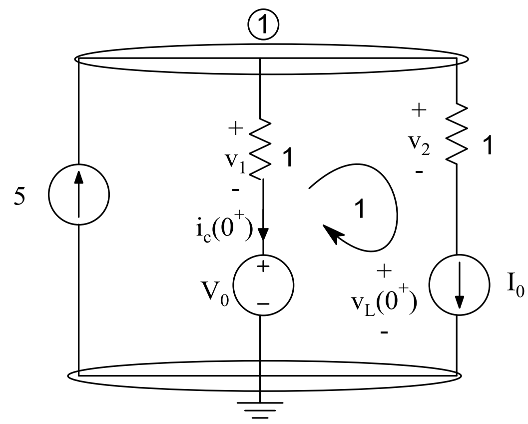
$\longrightarrow\ 2\,\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\,\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{2}\,i_L = \frac{5}{2}\ \longrightarrow\ \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{4}\,i_L = \frac{5}{4}$

$i_L(t) = (\,k_1 + k_2\,t\,)\,e^{\frac{-1}{2}t} + 5$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{1}{2}\,v_L(0^+)$

رسم مدار در $t = 0^+$



Kcl 1: $5 = i_c(0^+) + I_0 \xrightarrow{I_0=0} i_c\,(0^+) = v_1 = 5$

Kvl 1: $v_2 + v_L(0^+) - V_0 - v_1 = 0\ \longrightarrow v_L(0^+) = V_0 + 5 - I_0 \xrightarrow{V_0=0\ ,I_0=0} v_L(0^+) = 5$

$i_L(t) = (\,k_1 + k_2\,t\,)\,e^{\frac{-1}{2}t} + 5$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{1}{2}\,v_L(0^+) = \frac{5}{2}$

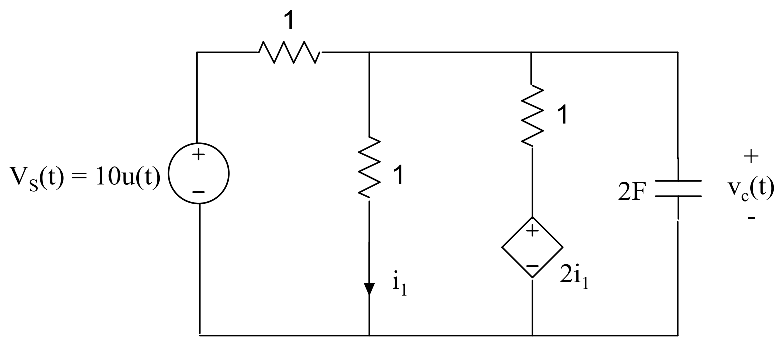
$i_L(0^+) = k_1 + 5 = 0\ \longrightarrow\ k_1 = -\,5$

$\frac{di_L}{dt} = k_2 e^{\frac{-1}{2}t} - \frac{1}{2}\,e^{\frac{-1}{2}t}\ (\,k_1 + k_2\,t\,)$

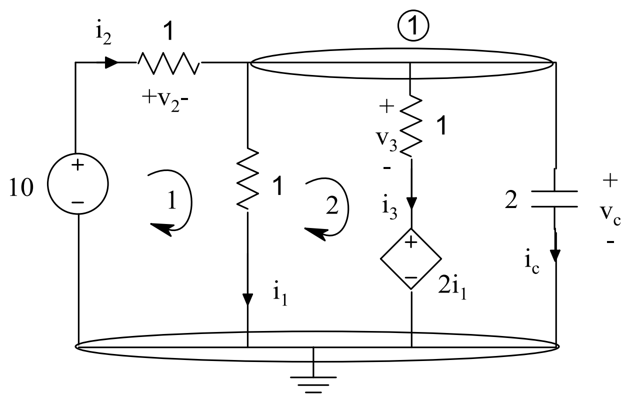
$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = k_2 - \frac{1}{2}\,k_1 = k_2 + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}\ \longrightarrow\ k_2 = 0$

$i_L(t) = -\,5\,e^{\frac{-1}{2}t} + 5$

۴۰) ولتاژ $v_c(t)$ را برای تمام زمان‌ها بدست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_2 = i_1 + i_3 + i_c \rightarrow v_2 = v_c + v_3 + 2\,\frac{dv_c}{dt}$ (1)

Kvl 1: $v_2 + v_c - 10 = 0$ (2)

Kvl 2: $v_3 + 2i_1 - v_c = 0 \rightarrow v_3 + 2v_c - v_c = 0 \rightarrow v_3 + v_c = 0$ (3)

$(1),(2),(3) \rightarrow 10 - v_c = v_c - v_c + 2\,\frac{dv_c}{dt}$

$2\,\frac{dv_c}{dt} + v_c = 10 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{2}v_c = 5$

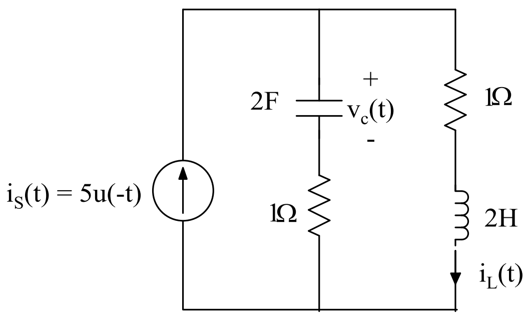
$v_c(t) = k\,e^{\frac{-1}{2}t} + 10$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0 \xrightarrow{\text{مدار در حالت صفر است}} V_0 = 0$

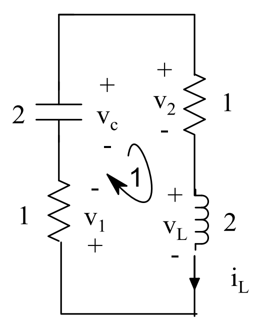
$v_c(0^+) = k + 10 = 0 \rightarrow k = -10$

$$v_c(t) = -10\, e^{\frac{-1}{2}t} + 10$$

۴۱) مطلوبست $i_L(t)$ برای تمام زمان‌ها.



رسم مدار در $t \geq 0$



$$\text{Kvl 1:}\;\; v_2 + v_L + v_1 - v_c = 0$$

$$\rightarrow\; i_L + 2\frac{di_L}{dt} + i_L - \left(-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} i_L(t)dt\right) = 0$$

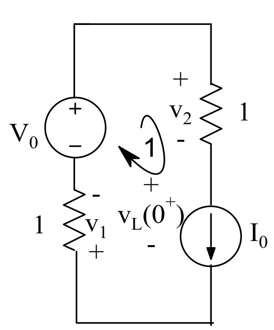
$$\rightarrow\; 2\frac{di_L}{dt} + 2\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{2} i_L = 0 \;\rightarrow\; \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{4} i_L = 0$$

$$i_L(t) = (k_1 + k_2 t)\, e^{\frac{-1}{2}t}$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$$

$$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{1}{2} v_L(0^+)$$

رسم مدار در $t=0^+$

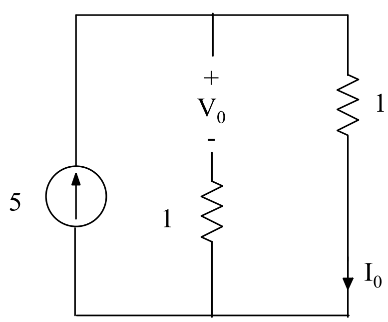


$$\text{Kvl 1:}\;\; v_2 + v_L(0^+) + v_1 - V_0 = 0$$

$$\rightarrow\; I_0 + v_L(0^+) + I_0 - V_0 = 0$$

$\rightarrow\ v_L(0^+) = -2I_0 + V_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



$\rightarrow\ I_0 = 5\ ,\ V_0 = 5$

$i_L(t) = (k_1 + k_2 t)\, e^{\frac{-1}{2}t}$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0 = 5$

$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{1}{2} v_L(0^+) = -I_0 + \frac{1}{2} V_0 = -5 + \frac{5}{2} = \frac{-5}{2}$

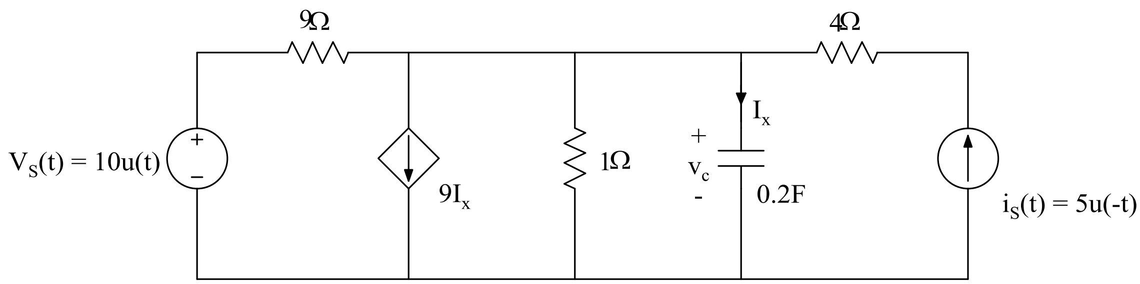
$i_L(0^+) = k_1 = 5$

$\frac{di_L}{dt} = k_2\, e^{\frac{-1}{2}t} - \frac{1}{2}\, e^{\frac{-1}{2}t}\, (k_1 + k_2 t)$

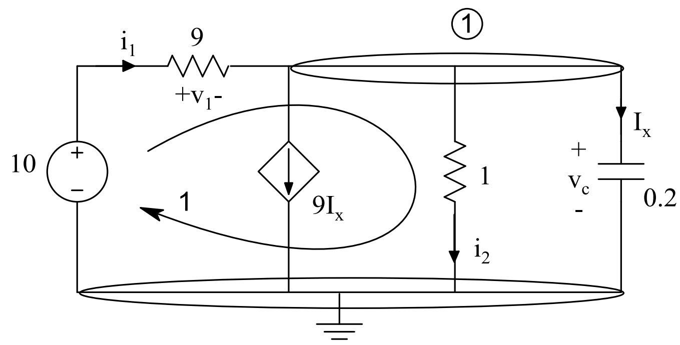
$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0^+} = k_2 - \frac{1}{2} k_1 = k_2 - \frac{5}{2} = \frac{-5}{2} \rightarrow k_2 = 0$

$i_L(t) = 5\, e^{\frac{-1}{2}t}$

۴۲) در مدار زیر ولتاژ دو سر خازن را برای $t \geq 0$ حساب کنید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_1 = 9I_x + i_2 + I_x \rightarrow i_1 = 10I_x + i_2 \rightarrow \frac{v_1}{9} = 2\,\frac{dv_c}{dt} + v_c \quad (1)$

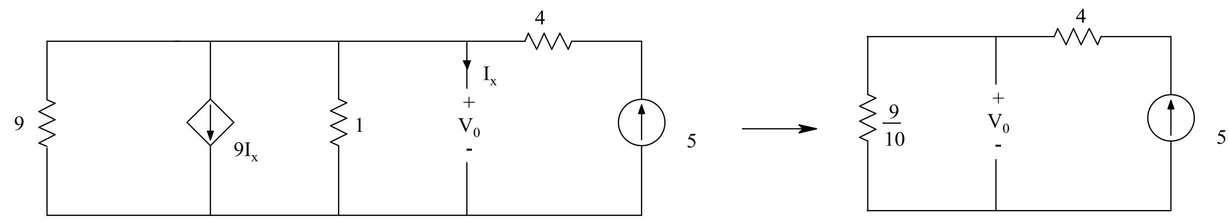
Kvl 1: $v_1 + v_c - 10 = 0 \quad (2)$

$(1),(2) \rightarrow \frac{dv_c}{dt} + \frac{5}{9}\,v_c = \frac{5}{9}$

$v_c(t) = k\,e^{\frac{-5}{9}t} + 1$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



$$V0 = \frac{9}{10} \times 5 = \frac{9}{2}$$

$$v_c(t) = k\, e^{\frac{-5}{9}t} + 1$$

$$v_c(0^+) = \frac{9}{2}$$

$$v_c(0^+) = k + 1 = \frac{9}{2} \rightarrow k = \frac{7}{2}$$

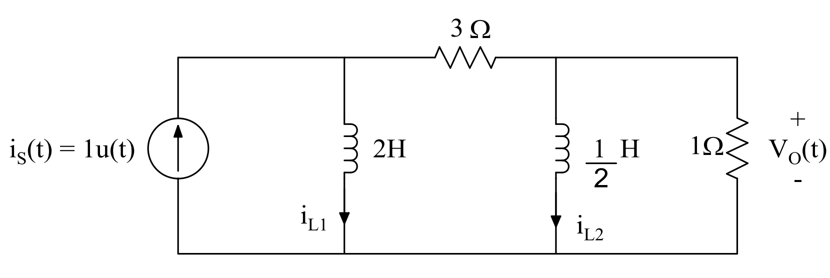
$$v_c(t) = \frac{7}{2}\, e^{\frac{-5}{9}t} + 1$$

۴۳) در مدار زیر مطلوب است:

الف) محاسبه معادله دیفرانسیل $V_O(t)$ بر حسب $i_S(t)$.

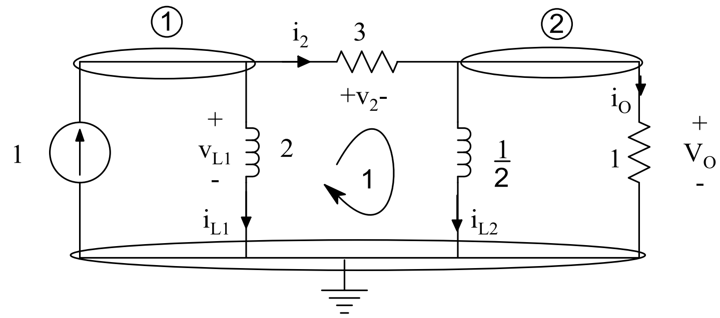
ب) محاسبه $V_O(0)$ و $\frac{dv_O}{dt}(0)$.

ج) محاسبه تابع زمانی $V_O(t)$ برای $t \geq 0$.



$i_{L1}(0) = i_{L2}(0) = 0$ A

رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $1 = i_{L1} + i_2 \rightarrow 1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} v_{L1}(t)dt + \frac{v_2}{3}$ (1)

Kcl 2: $i_2 + i_{L2} + i_O \rightarrow \frac{v_2}{3} = 2\int_{-\infty}^{t} V_O(t)dt + V_O$ (2)

Kvl 1: $v_2 + V_O - v_{L1} = 0$ (3)

از رابطه (۲) $\rightarrow v_2 = 6\int_{-\infty}^{t} V_O(t)dt + 3V_O$ (4)

از رابطه (۳) $\rightarrow v_{L1} = v_2 + V_O = 6\int_{-\infty}^{t} V_O(t)dt + 4V_O$ (5)

جایگذاری (۴)،(۵) در (۱) $\rightarrow 1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}\left(6\int_{-\infty}^{t} V_O(t)dt + 4V_O\right)dt + 2\int_{-\infty}^{t} V_O(t)dt + V_O$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} 0 = 3\int_{-\infty}^{t} V_O(t)dt + 2V_O + 2V_O + \frac{dv_O}{dt} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{d^2v_O}{dt^2} + 4\frac{dv_O}{dt} + 3V_O = 0$

شرط۱ $V_O(0^+) = ?$

شرط ۲ $\frac{dV_O}{dt}\Big|_{t=0^+} = ?$

برای پیدا کردن شرط ۲ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

رابطه (۵) : $v_{L1} = 6\int_{-\infty}^{t} V_O(t)dt + 4V_O \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{dV_O}{dt} = \frac{1}{4}\frac{dV_{L1}}{dt} - \frac{3}{2}V_O$ (6)

$v_{L1} = 2\frac{di_{L1}}{dt} \rightarrow \frac{dV_{L1}}{dt} = 2\frac{d^2i_{L1}}{dt^2}$ (7)

از روابط مدار داشتیم:

$$\begin{cases} 1 = i_{L1} + i_2 \;\rightarrow\; i_2 = 1 - i_{L1} \quad (\mathrm{I}) \\ i_2 = i_{L2} + i_O \;\rightarrow\; i_O = i_2 - i_{L2} = 1 - i_{L1} - i_{L2} \quad (\Pi) \\ v_2 + V_O - v_{L1} = 0 \;\rightarrow\; 3i_2 + i_O - 2\frac{di_{L1}}{dt} = 0 \quad (\text{Ш}) \end{cases}$$

$(\mathrm{I}),(\Pi),(\text{Ш}) \rightarrow 3 - 3i_{L1} + 1 - i_{L1} - i_{L2} - 2\frac{di_{L1}}{dt} = 0 \rightarrow 4 - 4i_{L1} - i_{L2} - 2\frac{di_{L1}}{dt} = 0$

$\rightarrow 2\frac{d^2 i_{L1}}{dt^2} = -4\frac{di_{L1}}{dt} - \frac{di_{L2}}{dt} = -4\frac{v_{L1}}{2} - \frac{v_{L2}}{\frac{1}{2}} = -2v_{L1} - 2v_{L2} \quad (8)$

$(7),(8) \rightarrow \frac{dv_{L1}}{dt} = 2\frac{d^2 i_{L1}}{dt^2} = -2v_{L1} - 2v_{L2} \quad (9)$

جایگذاری (۹) در (۶) $\rightarrow \frac{dV_O}{dt} = \frac{1}{4}\frac{dV_{L1}}{dt} - \frac{3}{2}V_O = -\frac{1}{2}v_{L1} - \frac{1}{2}v_{L2} - \frac{3}{2}V_O$

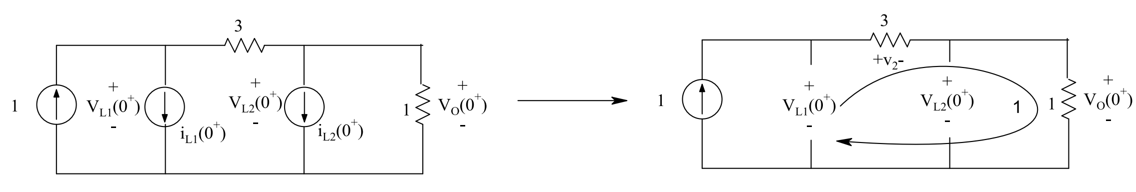
حال به معادله دیفرانسیل اصلی برمی‌گردیم:

$\frac{d^2 v_O}{dt^2} + 4\frac{dv_O}{dt} + 3V_O = 0$

$V_O(0^+) = ?$

$\frac{dV_O}{dt}\Big|_{t=0^+} = -\frac{1}{2}v_{L1}(0^+) - \frac{1}{2}v_{L2}(0^+) - \frac{3}{2}V_O(0^+)$

رسم مدار در $t = 0^+$



$V_O(0^+) = 1$, $v_{L2}(0^+) = V_O(0^+) = 1$

Kvl 1: $v_2 + V_O - v_{L1}(0^+) = 0 \rightarrow v_{L1}(0^+) = 3 + 1 = 4$

$\frac{d^2 v_O}{dt^2} + 4\frac{dv_O}{dt} + 3V_O = 0$

$V_O(0^+) = 1$

$\frac{dV_O}{dt}|_{t=0^+} = -\frac{1}{2} v_{L1}(0^+) - \frac{1}{2} v_{L2}(0^+) - \frac{3}{2} V_O(0^+) = -\frac{1}{2}(4) - \frac{1}{2}(1) - \frac{3}{2}(1) = -4$

$V_O(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t}$

$V_O(0^+) = k_1 + k_2 = 1 \quad (*)$

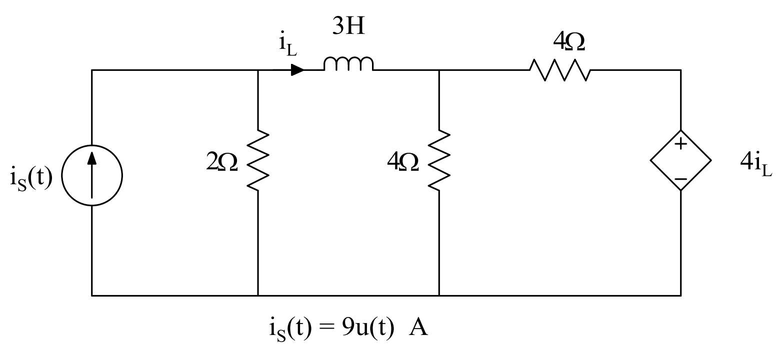
$\frac{dV_O}{dt} = -k_1 e^{-t} - 3k_2 e^{-3t}$

$\frac{dV_O}{dt}|_{t=0^+} = -k_1 - 3k_2 = -4 \quad (**)$

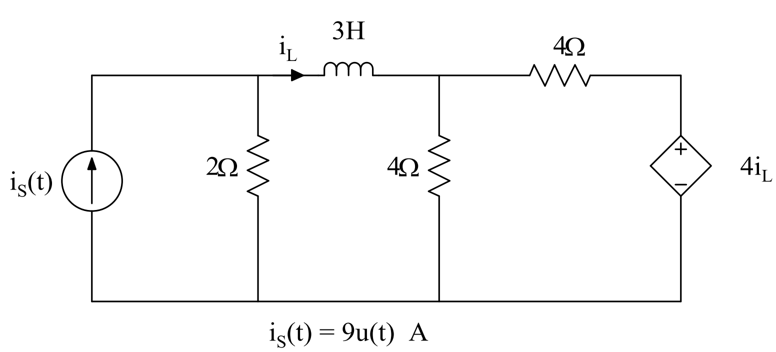
$(*),(**) \rightarrow \; k_1 = \frac{-1}{2} \quad , \quad k_2 = \frac{3}{2}$

$V_O(t) = \frac{-1}{2} e^{-t} + \frac{3}{2} e^{-3t}$

۴۴) برای مدار شکل زیر، جریان سلف $i_L(t)$ را برای تمام زمان‌ها به دست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $9 = i_1 + i_L \quad (1)$

Kcl 2: $i_L = i_2 + i_3 \quad (2)$

Kvl 1: $v_L + v_2 - v_1 = 0 \;\rightarrow\; 3\,\frac{di_L}{dt} = 4i_2 - 2i_1 = 0 \quad (3)$

Kvl 2: $v_3 + 4i_L - v_2 = 0 \;\rightarrow\; 4i_3 + 4i_L - 4i_2 = 0 \;\rightarrow\; i_3 + i_L - i_2 = 0 \quad (4)$

$(1),(2),(3),(4) \;\rightarrow\; \frac{3}{2}\frac{di_L}{dt} + 3i_L = 9 \;\rightarrow\; \frac{di_L}{dt} + 2i_L = 6$

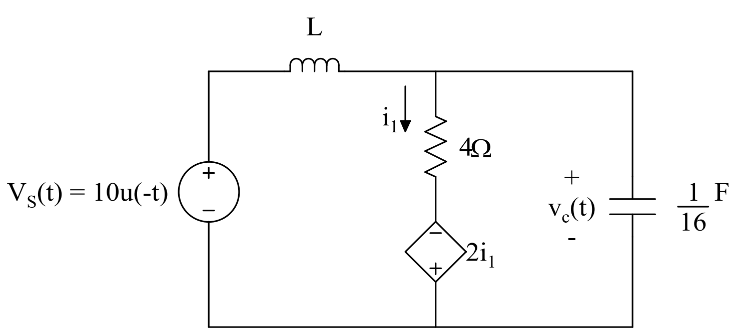
$i_L(t) = k\,e^{-2t} + 3$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0 \xrightarrow{\text{مدار در حالت صفر است}} I_0 = 0$

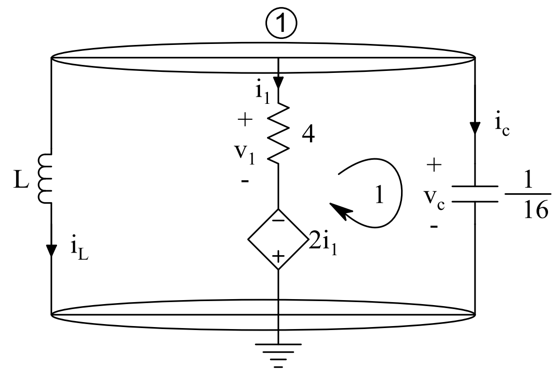
$i_L(0^+) = k + 3 = 0 \;\rightarrow\; k = -3$

$i_L(t) = -3\,e^{-2t} + 3$

۴۵) در مدار شکل زیر، مقدار سلف را به نحوی تععین کنید که پاسخ مدار، میرایی بحرانی باشد. سپس ولتاژ خازن $v_c(t)$ را برای زمان‌های $t \geq 0$ به دست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_L + i_1 + i_c = 0 \rightarrow \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_c(t)dt + \frac{v_1}{4} + \frac{1}{16}\frac{dv_c}{dt} = 0$ (1)

Kvl 1: $v_c + 2i_1 - v_1 = 0 \rightarrow v_c + \frac{v_1}{2} - v_1 = 0 \rightarrow v_c - \frac{v_1}{2} = 0$ (2)

(1),(2) $\rightarrow \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_c(t)dt + \frac{v_c}{2} + \frac{1}{16}\frac{dv_c}{dt} = 0 \rightarrow \frac{1}{16}\frac{d^2v_c}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{L} v_c = 0$

$\rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2} + 8\frac{dv_c}{dt} + \frac{16}{L} v_c = 0$

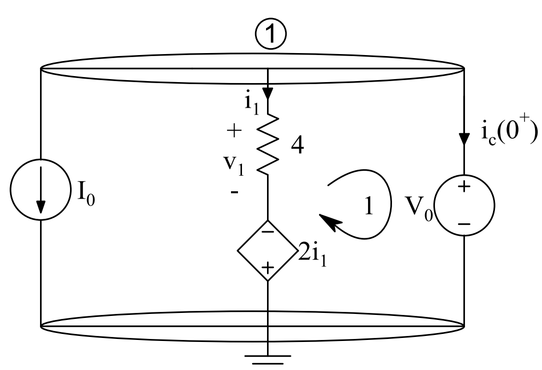
$\Delta = 0 \rightarrow 64 - (4)(1)(\frac{16}{L}) = 0 \rightarrow L = 1$

$\frac{d^2v_c}{dt^2} + 8\frac{dv_c}{dt} + 16 v_c = 0$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0$

$\frac{dV_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = 16i_c(0^+)$

رسم مدار در $t = 0^+$

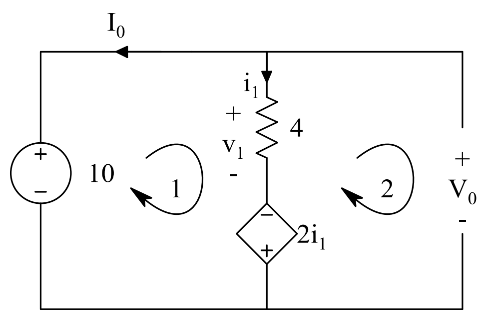


Kcl 1: $I_0 + i_1 + i_c(0^+) = 0$ (1)

Kvl 1: $V_0 + 2i_1 - v_1 = 0 \rightarrow V_0 + 2i_1 - 4i_1 = 0 \rightarrow i_1 = \frac{1}{2} V_0$ (2)

(1),(2) $\rightarrow I_0 + \frac{1}{2} V_0 + i_c(0^+) = 0 \rightarrow i_c(0^+) = - I_0 - \frac{1}{2} V_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



Kvl 1: $v_1 - 2i_1 - 10 = 0 \rightarrow 4i_1 - 2i_1 - 10 = 0 \rightarrow 2i_1 = 10 \rightarrow i_1 = 5$

$I0 = - i_1 = - 5$

Kvl 2: $V_0 + 2i_1 - v_1 = 0 \rightarrow V_0 = v_1 - 2i_1 = 20 - 10 = 10$

$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + 8 \frac{dv_c}{dt} + 16 v_c = 0$

$v_c(0^+) = 10$

$\frac{dV_c}{dt}|_{t=0^+} = 16i_c(0^+) = 16 (- I_0 - \frac{1}{2} V_0) = 16 (5 - 5) = 0$

$v_c(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-4 t}$

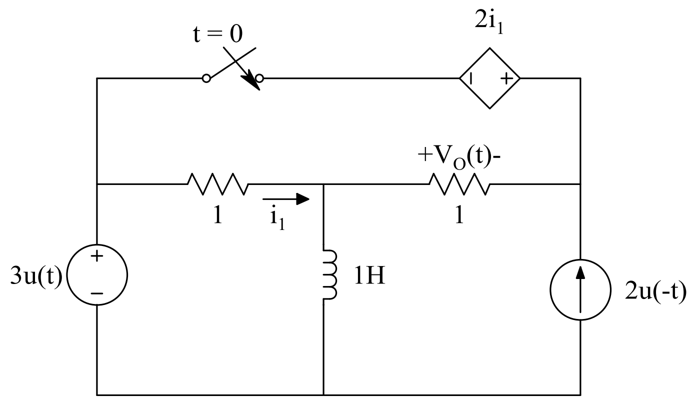
$v_c(0^+) = k_1 = 10$

$\frac{dV_c}{dt} = k_2 e^{-4 t} + (-4 e^{-4 t}) (k_1 + k_2 t)$

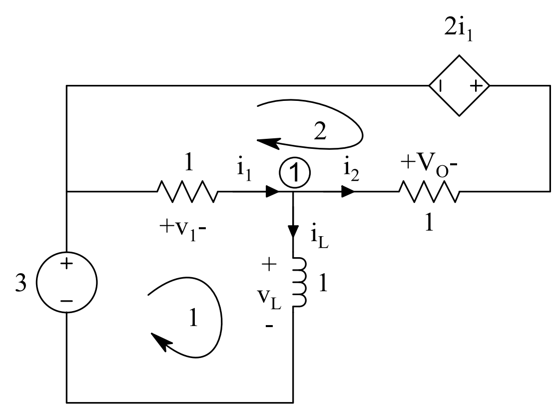
$\frac{dV_c}{dt}|_{t=0^+} = k_2 - 4k_1 = k_2 - 40 = 0 \rightarrow k_2 = 40$

$v_c(t) = (10 + 40 t) e^{-4 t}$

۴۶) در مدار مقابل، اگر کلید در $t = 0$ بسته شود، ولتاژ $V_O(t)$ را برای همه زمان‌ها محاسبه کنید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_1 = i_L + i_2 \;\rightarrow\; v_1 = \int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt + V_O \quad (1)$

Kvl 1: $v_1 + v_L - 3 = 0 \quad (2)$

Kvl 2: $-2i_1 - V_O - v_1 = 0 \;\rightarrow\; -2v_1 - V_O - v_1 = 0 \;\rightarrow\; -3v_1 - V_O = 0 \quad (3)$

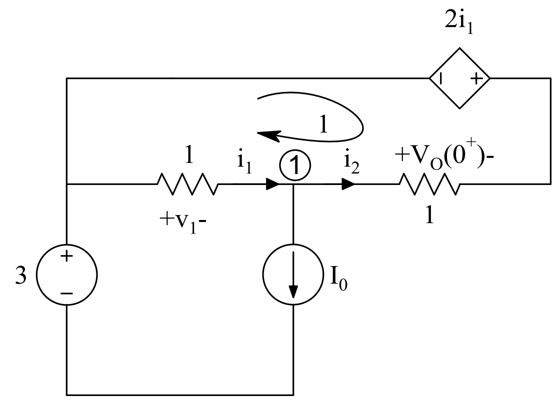
(1),(2),(3) $\rightarrow\; \frac{-1}{3} V_O = \int_{-\infty}^{t} (\,3 + \frac{1}{3} v_O)dt + V_O \;\rightarrow\; \frac{4}{3}\frac{dv_O}{dt} + \frac{1}{3} V_O + 3 = 0$

$\rightarrow\; \frac{dv_O}{dt} + \frac{1}{4} V_O = \frac{-9}{4}$

$V_O(t) = k\, e^{\frac{-1}{4}t} - 9$

$V_O(0^+) = ?$

رسم مدار در $t = 0^+$

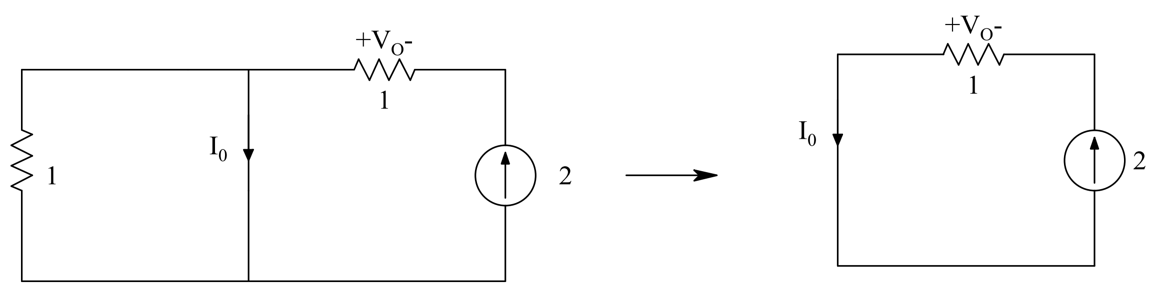


Kcl 1: $i_1 = I_0 + i_2 \rightarrow v_1 = I_0 + V_O(0^+)$ (1)

Kvl 1: $-2i_1 - V_O(0^+) - v_1 = 0 \rightarrow -3v_1 = V_O(0^+)$ (2)

(1),(2) $\rightarrow \frac{-1}{3} V_O(0^+) = I_0 + V_O(0^+) \rightarrow V_O(0^+) = \frac{-3}{4} I_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



$I_0 = 2$

$V_O(t) = k\, e^{\frac{-1}{4}t} - 9$

$V_O(0^+) = \frac{-3}{4} I_0 = \frac{-6}{4}$

$V_O(0^+) = k - 9 = \frac{-6}{4} \rightarrow k = \frac{15}{2}$

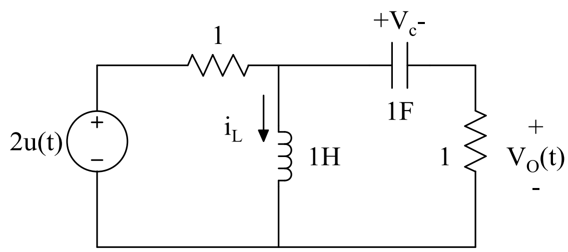
$V_O(t) = \frac{15}{2} e^{\frac{-1}{4}t} - 9$

۴۷) برای مدار زیر مطلوب است :

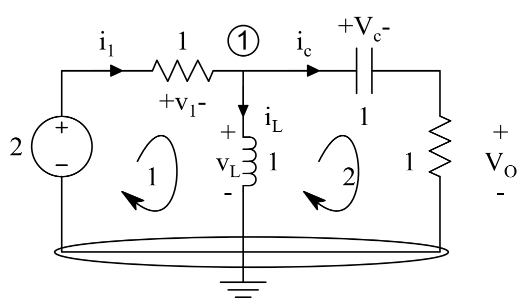
الف) معادله دیفرانسیل V_O بر حسب V_S

ب) محاسبه $V_O(0^+)$ و $\frac{dv_O}{dt}(0^+)$

ج) محاسبه $V_O(t)$ برای $t \geq 0$



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_1 = i_L + i_c \rightarrow v_1 = \int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt + \frac{dv_c}{dt}$ (1)

Kvl 1: $v_1 + v_L - 2 = 0$ (2)

Kvl 2: $v_c + V_O - v_L = 0$ (3)

$i_c = \frac{dv_c}{dt} = V_O$ (4)

(1),(2),(3),(4) $\rightarrow \frac{d^2V_O}{dt^2} + \frac{dV_O}{dt} + \frac{1}{2}V_O = 0$

$V_O(t) = (k_1 \cos\frac{1}{2}t + k_2 \sin\frac{1}{2}t)\, e^{\frac{-1}{2}t}$

شرط ۱ $V_O(0^+) = ?$

شرط ۲ $\frac{dV_O}{dt}\Big|_{t=0^+} = ?$

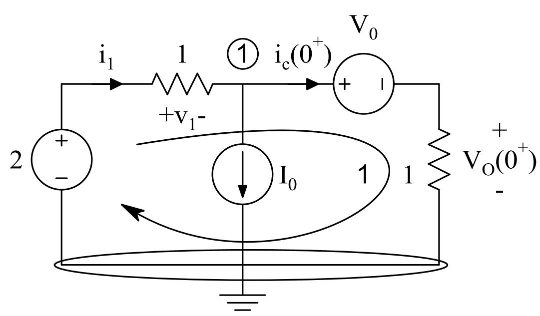
برای به دست آوردن شرط ۲ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

از رابطه (۴) $\rightarrow V_O = \frac{dv_c}{dt} \rightarrow \frac{dV_O}{dt} = \frac{d^2v_c}{dt^2}$

از روابط (۱)،(۲)،(۳)،(۴) $\rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2} + \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{2} v_c = 0 \rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2} = - \frac{dv_c}{dt} - \frac{1}{2} v_c$

$$\frac{dV_O}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{d^2v_c}{dt^2}\Big|_{t=0^+} = - \frac{dv_c}{dt}\Big|_{t=0^+} - \frac{1}{2} v_c(0^+) = -i_c(0^+) - \frac{1}{2} v_c(0^+) = -i_c(0^+) - \frac{1}{2} V_0$$

رسم مدار در $t = 0^+$



Kcl 1: $i_1 = I_0 + i_c(0^+)$ (1)

Kvl 1: $v_1 + V_0 + V_O(0^+) - 2 = 0 \rightarrow i_1 + V_0 + i_c(0^+) - 2 = 0$ (2)

(1),(2) $\rightarrow I_0 + i_c(0^+) + V_0 + i_c(0^+) - 2 = 0 \rightarrow i_c(0^+) = \frac{-1}{2} I_0 - \frac{1}{2} V_0 + 1$

$V_O(0^+) = i_c(0^+)$

مدار در حالت صفر است پس $V_0 = I_0 = 0$

$i_c(0^+) = \frac{-1}{2} I_0 - \frac{1}{2} V_0 + 1 = 1$

$V_O(0^+) = i_c(0^+) = 1$

$V_O(t) = (k_1 \cos \frac{1}{2} t + k_2 \sin \frac{1}{2} t) e^{\frac{-1}{2} t}$

$V_O(0^+) = 1$

$\frac{dV_O}{dt}|_{t=0^+} = -i_c(0^+) - \frac{1}{2} V_0 = -1$

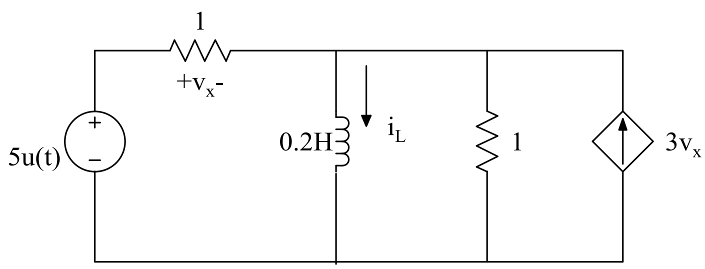
$V_O(0^+) = k_1 = 1$

$\frac{dV_O}{dt} = (-\frac{1}{2} k_1 \sin\frac{1}{2} t + \frac{1}{2} k_2 \cos\frac{1}{2} t) e^{\frac{-1}{2}t} - \frac{1}{2} e^{\frac{-1}{2}t} (k_1 \cos\frac{1}{2} t + k_2 \sin\frac{1}{2} t)$

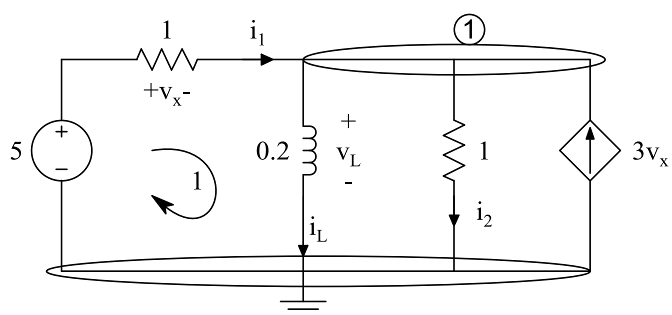
$\frac{dV_O}{dt}|_{t=0^+} = \frac{1}{2} k_2 - \frac{1}{2} k_1 = \frac{1}{2} k_2 - \frac{1}{2} = -1 \ \rightarrow \ k_2 = -1$

$V_O(t) = (\cos\frac{1}{2} t - \sin\frac{1}{2} t) e^{\frac{-1}{2}t}$

۴۸) جریان $i_L(t)$ را برای زمان‌های $t \geq 0$ به دست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kcl 1: $i_1 + 3v_x = i_2 + i_L \ \rightarrow \ i_1 + 3i_1 = i_2 + i_L \ \rightarrow \ 4i_1 = i_2 + i_L \quad (1)$

Kvl 1: $v_x + v_L - 5 = 0 \ \rightarrow \ i_1 + 0/2 \frac{di_L}{dt} - 5 = 0 \quad (2)$

$v_L = 0/2 \frac{di_L}{dt} = i_2 \quad (3)$

$(1),(2),(3) \rightarrow \frac{di_L}{dt} + i_L = 20$

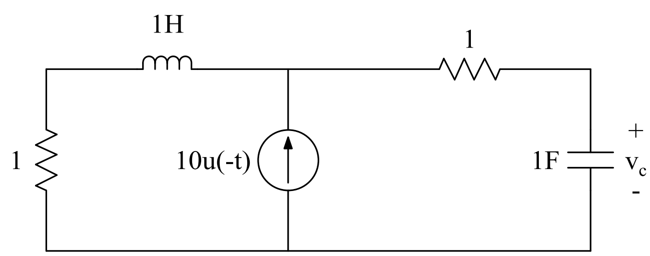
$i_L(t) = k\, e^{-t} + 20$

$i_L(0^+) = iL(0^-) = I_0 \xrightarrow{\text{مدار در حالت صفر است}} I_0 = 0$

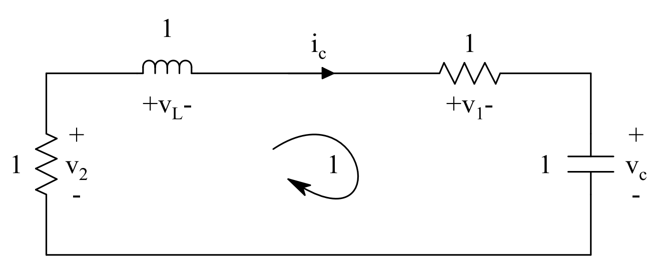
$i_L(0^+) = k + 20 = 0 \rightarrow k = -20$

$i_L(t) = -20\, e^{-t} + 20$

۴۹) در مدار شکل زیر، ولتاژ خازن v_c را برای زمان‌های $t \geq 0$ به دست آورید.



رسم مدار در $t \geq 0$



Kvl 1: $v_L + v_1 + v_c - v_2 = 0$ (1)

$i_c = v_1 = \frac{dv_c}{dt} = -v_2 = \int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt$ (2)

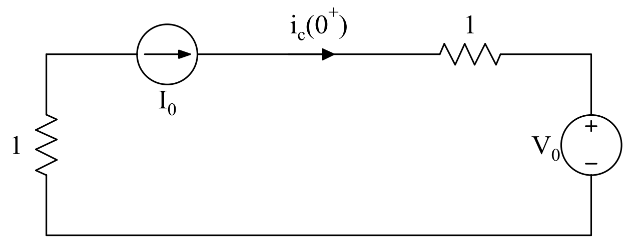
$(1),(2) \rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2} + 2\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0$

$v_c(t) = (k_1 + k_2 t)\, e^{-t}$

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0$

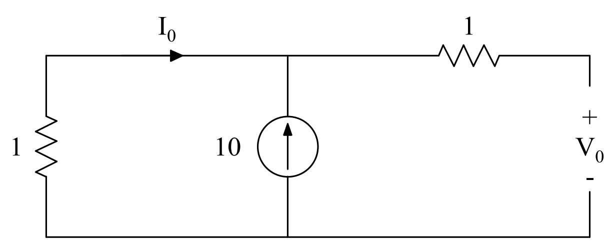
$\frac{dV_c}{dt}|_{t=0^+} = i_c(0^+)$

رسم مدار در $t = 0^+$



$i_c(0^+) = I_0$

رسم مدار در $t = 0^-$



$I_0 = -10 \quad , \quad V_0 = 10$

$v_c(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-t}$

$v_c(0^+) = 10$

$\frac{dV_c}{dt}|_{t=0^+} = i_c(0^+) = -10$

$v_c(0^+) = k_1 = 10$

$\frac{dV_c}{dt} = k_2 e^{-t} - e^{-t} (k_1 + k_2 t)$

$\frac{dV_c}{dt}|_{t=0^+} = k_2 - k_1 = k_2 - 10 = -10 \rightarrow k_2 = 0$

$v_c(t) = 10 e^{-t}$

فصل سوم:

تجزیه و تحلیل حالت دائمی

سینوسی

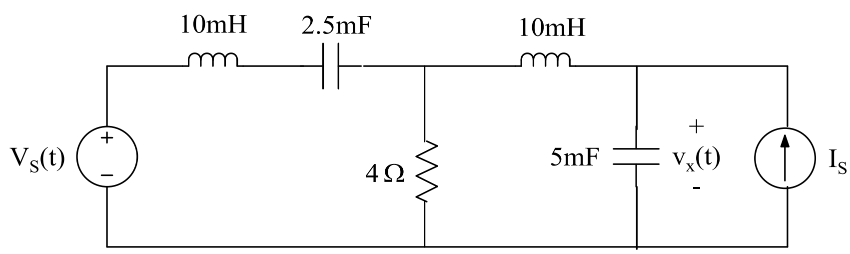
فصل سوم:

تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

با ذکر مثالی وارد این مبحث می‌شویم:

مثال ۱)

پاسخ حالت دائمی سینوسی $v_{x(t)}$ را بدست آورید.



$V_S(t) = 4\sin(200t)$ V

$I_S = 1$ A

منظور از پاسخ حالت دائمی سینوسی یعنی به دست آوردن پاسخ خصوصی زمانی که حداقل یکی از منابع مستقل مدار سینوسی باشد. از این رو نیازی به به دست آوردن معادله دیفرانسیل نیست و در این حالت پاسخ خصوصی را از روش فازوری به دست می‌آوریم.

تعریف حوزه فازور:

شکل کلی یک تابع سینوسی به صورت زیر است:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

که در این رابطه A, ω, θ تعاریف زیر را دارند:

A = دامنه بر حسب ولت یا آمپر (بستگی به منبع مستقل دارد. اگر منبع مستقل ولتاژ باشد واحد آن ولت و اگر منبع مستقل جریان باشد واحد آن آمپر است.)

$\omega = 2\pi f$ = فرکانس زاویه ای بر حسب ثانیه / رادیان$(\frac{rad}{sec})$

f = فرکانس بر حسب هرتز (Hz)

ϴ = فاز بر حسب رادیان (rad)

بنابراین برای منبع ولتاژ مستقل تابع سینوسی به صورت زیر است:

$v(t) = A\cos(\omega t + \theta)$ (ولت)

و برای منبع جریان مستقل تابع سینوسی به صورت زیر است:

$i(t) = A\cos(\omega t + \theta)$ (آمپر)

وقتی منبع مستقل مدار تابعی سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω باشد ولتاژ و جریان تمام شاخه‌های مدار تابعی سینوسی با همان فرکانس ω منبع ورودی می‌باشد ولی دامنه و فاز ولتاژ و جریان شاخه‌های مدار با دامنه و فاز منبع مستقل ورودی متفاوت است. پس مثلا جریان $i_k(t)$ و $v_k(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$v_k(t) = |v_k|\cos(\omega t + \measuredangle v_k)$

$i_k(t) = |i_k|\cos(\omega t + \measuredangle i_k)$

که v_k و i_k مقادیر فازوری می‌باشند و $|v_k|$ یعنی دامنه v_k و $\measuredangle v_k$ یعنی زاویه v_k و به همین ترتیب $|i_k|$ دامنه i_k و $\measuredangle i_k$ زاویه i_k می‌باشد.

اگر داشته باشیم $x(t) = A\sin(\omega t+\theta)$ باید ابتدا آن را به صورت کسینوسی زیر بنویسیم:

$X(t) = A\cos(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}) \rightarrow X = A\, e^{j(\theta-\frac{\pi}{2})} = Ae^{j\theta}.\, e^{-j\frac{\pi}{2}}$

رابطه اویلر: $e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2} = -j$

$\rightarrow X = -jAe^{j\theta}$

پس وقتی تابع سینوسی با رابطه سینوسی داده شده باشد می‌توان در مقدار فازوری آن $-j$ را در نظر گرفت و تابع سینوسی را تابع کسینوسی فرض کرد و مقدار فازوری آن را نوشت.

برای استفاده از روش فازوری ابتدا باید عناصر مدار را از حوزه‌ی زمان به حوزه‌ی فازور منتقل کرد. این انتقال از طریق روابط داده شده در جدول(۲) فصل اول (جدول مربوط به عناصر الکتریکی برای جهت‌های متناظر در

حوزه فازور) به دست می‌آید. طبق آن جدول مقاومت و منابع وابسته در حوزه زمان و حوزه فازور با هم یکسانند.فقط منابع مستقل، سلف و خازن در حوزه‌ی زمان و حوزه فازور با هم متفاوتند.

برای انتقال منابع مستقل طبق جدول (۲) داریم :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

$$X = A\, e^{j\theta} \quad , \quad j = \sqrt{-1}$$

اگر تابع سینوسیبا رابطه سینوسی به صورت زیر داده شده باشد باید ابتدا آن را به کسینوس تبدیل کرده و سپس مقدار فازوری آن را به دست آورد.

$x(t) = A\sin(\omega t + \theta)$

$$X = -jA\, e^{j\theta} \quad , \quad j = \sqrt{-1}$$

A = دامنه (ولت یا آمپر)

$\omega = {rad}/{s} =$ فرکانس

$$\theta = \text{زاویه}\ (rad)$$

مثال۲) مقدار فازوری v(t) را بنویسید:

$v(t) = 5\cos 100t$

A=5 (v)$\omega = 100 \quad (\frac{rad}{s})$ $\quad \theta = 0$ (rad)

$v = 5e^{j\times 0} = 5\ (v)$

مثال۳) مقدار فازوری i(t) را بنویسید:

$i(t) = 4\cos(100t - \frac{\pi}{4})$

A=4 $\quad \omega = 100 \quad\quad \theta = \frac{-\pi}{4}$

i = 4 $e^{\frac{-\pi}{4}j}$

یادآوری رابطه اویلر:

$$e^{J\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

$e^{-J\theta}=\cos(-\theta)+j\sin(-\theta)= \cos(\theta)-j\sin(\theta)$

بنابراین داریم:

$e^{j\times\frac{-\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}-J\sin\frac{\pi}{4} \;\rightarrow\; e^{j\times\frac{-\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-J\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\rightarrow i=2\sqrt{2}-j2\sqrt{2}$

مثال۴) مقدار فازوری $v_s(t)$ را بنویسید:

$v_s(t)=4\sin 200t$

A=4 $\omega=200$ $\theta=0-\frac{\pi}{2}$

$V = -j \times 4\, e^{j\times 0} = -4j$

مثال۵) مقدار فازوری $i(t)$ و $i_s(t)$ را بنویسید:

$i(t)=2\sin 10t,\;\; i_s(t)=1$

$i(t)=2\sin 10t \quad\rightarrow\quad i=-2J$

$i_s(t)=1 \quad\rightarrow\quad i = 1$

حال به حل مدار مثال داده شده باز می‌گردیم، برای تبدیل مقادیر سلف و خازن به امپدانس داریم:

$z_L=jL\omega(\Omega)$

$z_c=\frac{-J}{\omega c}(\Omega)$

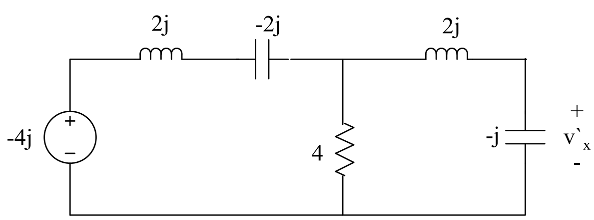
زمانی که مدار بیش از یک منبع مستقل سینوسی داشته باشد و ωهای منابع با هم مساوی نباشد در اینصورت برای هر سلف و خازن باید به ازای هر ω یک امپدانس به دست آورد. در این شرایط مدار را از طریق جمع آثار یا اصل برهم نهی حل می‌کنیم.

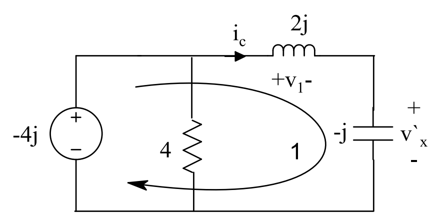
جمع آثار: حل مدار به ازای یک منبع مستقل و غیر فعال کردن سایر منابع مستقل و در نهایت جمع پاسخ‌ها در حوزه زمان.

در این مدار دو منبع مستقل وجود دارد یکی $V_s(t) = 4\sin 200t$ (ولت) با $\omega_1 = 200$ و دیگری $i_s(t) = 1$ (آمپر) با $\omega_2 = 0$. (وقتی یکی از منابع مستقل مدار سینوسی باشد، بقیه را هم باید سینوسی در نظر بگیریم.)

حل مدار از طریق جمع آثار :

رسم مدار در حوزه فازور با $\omega_1 = 200$. باید منبع $i_s(t) = 1$ را غیر فعال کنیم. غیر فعال کردن منابع یعنی قرار دادن مدار باز به جای منبع جریان و قرار دادن اتصال کوتاه به جای منبع ولتاژ. پس در اینجا منبع جریان $i_s(t)$ را مدار باز می‌کنیم و مدار به شکل زیر در می‌آید:





$L_1 = 10mH$, $L_2 = 10$ mH

$z_{L_1} = J\omega L_1 = J \times 200 \times 10 \times 10^{-3} = 2J\Omega$

$z_{L_2} = J\omega L_2 = J \times 200 \times 10 \times 10^{-3} = 2J\Omega$

$z_{c_1} = \frac{-J}{200 \times 5 \times 10^{-3}} = -j$

$z_{c_2} = \frac{-J}{200 \times 2/5 \times 10^{-3}} = -2j$

Kvl 1: $v_1 + v'_x + 4j = 0$ (1)

$i_c = \frac{v_1}{2j} = \frac{v'_x}{-j}$ (2)

(1),(2) $\rightarrow$ $-2v'_x + v'_x + 4j = 0$ $\rightarrow$ $v'_x = 4j$

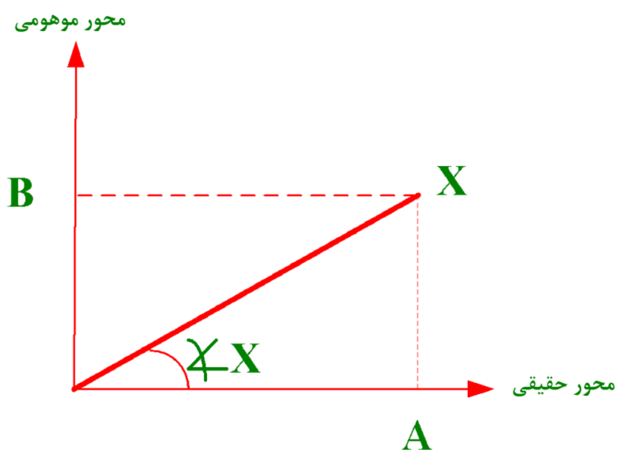
برای انتقال پاسخ $X=|X|\angle X$ از حوزه ی فازور به حوزه زمان از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$x(t) = |X| \cos(\omega t + \angle X)$$

برای به دست آوردن $|X|$ و $\angle X$ نکاتی از اعداد مختلط را یادآوری می‌کنیم:

یادآوری اعداد مختلط: اعداد مختلط هم در دستگاه دکارتی و هم در دستگاه قطبی نمایش داده می‌شوند و مختصات دکارتی و قطبی قابل تبدیل به یکدیگر هستند.

$Z = A + jB$را عدد مختلط Z در دستگاه دکارتی می‌گویند. اگر Z را در صفحه مختلط رسم کنیم خواهیم داشت:



اگربخواهیم Zرا در دستگاه قطبی بنویسیم باید در شکل فوق با توجه به $\angle Z$ و $|Z|$، روابط مربوطه را به صورت زیر بنویسیم:

$$|Z| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\angle Z = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

با توجه به نکات گفته شده داریم:

هنگام استفاده از جمع آثار v_x مربوطه از منبع با ω_1 را با v'_x و v_x مربوطه از منبع با ω_2 را با v''_x نشان می‌دهیم که جمع آن‌ها در حوزه زمان $v_x(t)$ را مشخص می‌کند یعنی در حوزه مان داریم:

$v_x(t) = v'_x(t) + v''x(t)$

$v'_x = 4j$

$|v'_x| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$

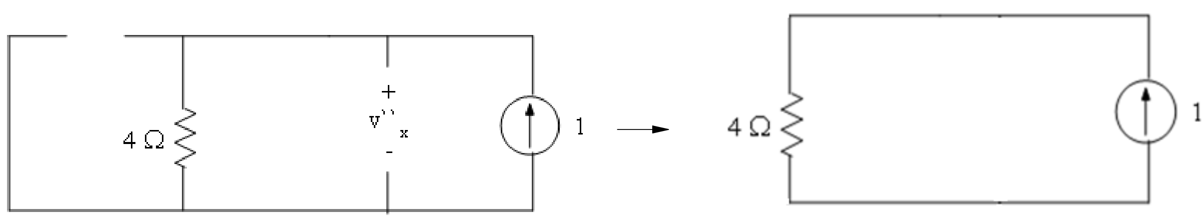
$\angle X' = tg^{-1}\left(\frac{4}{0}\right) = tg^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$

$v'_x(t) = |v'_x| \cos(200t + \measuredangle v'x)$

$v'_x(t) = 4\cos\left(200t + \frac{\pi}{2}\right)$

رسم مدار در حوزه فازور با $\omega_2 = 0$

در اینجا برای غیر فعال کردن منبع ولتاژ $v_s(t) = 4\sin 200t$ به جای آن اتصال کوتاه قار می‌دهیم و مدار به صورت زیر خواهد شد:



مقادیر $z_L = j\omega L = 0$ (اتصال کوتاه) و $zc = \frac{-j}{\omega c} = \infty$ (مدار باز) نیز در مدار وجود دارد.

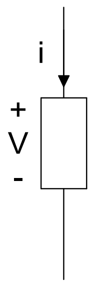
$v''_x = 4 \times 1 = 4$

$v_x(t) = v'_x(t) + v''_x(t)$

$v_x(t) = 4\cos\left(200t + \frac{\pi}{2}\right) + 4$

توان مختلط:

توان در حوزه فازور یعنی توان مختلط و با رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:



$$S = \frac{1}{2} V . \bar{\iota}$$

در این رابطه $\bar{\iota}$ یعنی i مزدوج.

بعضی کتاب‌ها i مزدوج را با i^* نیز نشان می‌دهند.

این رابطه توان برای هر شاخه قابل محاسبه است و همان طور که در شکل بالا می‌بینید برای جهت‌های متناظر رابطه مثبت است .

در حوزه فازور، ولتاژ و جریان مختلط هستندبنابراین توان مختلط که از رابطه فوق به دست می‌آید نیز یک عبارت مختلط استومی‌توان نوشت حاصل توان مختلط شامل یک عدد حقیقیو یک عدد موهومی می‌باشد که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$S = \frac{1}{2} V . \bar{\iota} = P_{av} + JQ$$

P_{av} را توان متوسط، حقیقی، اکتیو یا تلف شده می‌گویند و واحد آن وات (W) است .

Q را توان موهومی، راکتیو یا ذخیره شده می‌گویند و واحد آن (VAR) می‌باشد .

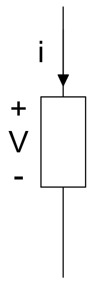
توان ظاهری:

توان مختلط یک کمیت مختلط است که در دستگاه دکارتی به صورت $S = P_{av} + jQ$ نوشته می‌شود. مقدار $|S|$ را توان ظاهری می‌نامند و واحد آن ولت آمپر (VA) است. در واقع اندازه توان مختلط را توان ظاهری گفته و از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$|S| = \sqrt{{P_{av}}^2 + Q^2}$$

مثال۲)

برای شاخه‌ی زیر توان مختلط و از روی آن توان متوسط و توان راکتیو را به دست آورید.

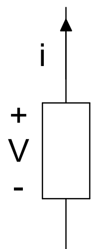


$$v = 1 + j \qquad , \qquad i = 1 - j$$

$$S = \frac{1}{2} V.\bar{\imath} = \frac{1}{2}(1 + j).(1 + j) = \frac{1}{2}(1 - 1 + 2j) = j$$

$$P_{av} = 0 \quad w \quad , \qquad Q = 1 \quad var$$

مثال۳)



برای شاخه‌ی زیر توان مختلط، توان متوسط و توان راکتیو را به دست آورید.

$$v = 2\measuredangle\frac{\pi}{4} \qquad , \qquad i = 4\measuredangle-\frac{\pi}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} v = 2e^{j\frac{\pi}{4}} \\ e^{j\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\,\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{2} + \mathrm{j}\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} i = 4e^{j\frac{-\pi}{4}} \\ e^{-j\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - j\,\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\,\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \rightarrow i = 2\sqrt{2} - j2\sqrt{2}$$

$$i^* = 2\sqrt{2} + j2\sqrt{2}$$

رابطه توان علامت منفی دارد زیرا جهت‌های ولتاژ و جریان نامتناظر است.

$$s = -\frac{1}{2} V.\bar{\imath} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + j\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2} + j2\sqrt{2}\right) = -4j$$

$$P_{av} = 0 \quad (w) \quad , \qquad Q = -4 \quad (var)$$

Q توانی است که در سلف یا خازن ذخیره می‌شود. به طور کلQ ناشی از وجود سلف یا خازن در مدار است.

P_{av}توانی است که در مقاومت یا امپدانس تلف می‌شود .

توان مختلط S مربوط به منابع مستقل یا منابع وابسته است.

توان متوسط P_{av} می‌تواند مثبت یا منفی باشد. اگر مقدار P_{av} مثبت باشد، آن عنصر از مدار توان می‌گیرد و اگر مقدار P_{av} منفی باشد یعنی آن عنصر به مدار توان می‌دهد.

در مدار Iهر نوع توانی را که بخواهیم به دست آوریم باید ابتدا توان مختلط را محاسبه کنیم.

یادآوری ریاضی :

اگر تابع x(t) وجود داشته باشد عددی مثل x_{rms} یا x_{eff} وجود دارد که به صورت زیر تعریف می شود.

$$x_{rms} = x_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt}$$

x_{rms} یا x_{eff} را مقدار موثر می‌نامند.

اگر توان مختلط را بر حسب v_{eff} و $\bar{\imath}_{eff}$ بنویسیم خواهیم داشت:

$$s = v_{eff}.\bar{\imath}_{eff}$$

زیرا رابطه v و v_{eff} و i و $\bar{\imath}_{eff}$ به صورت زیر است :

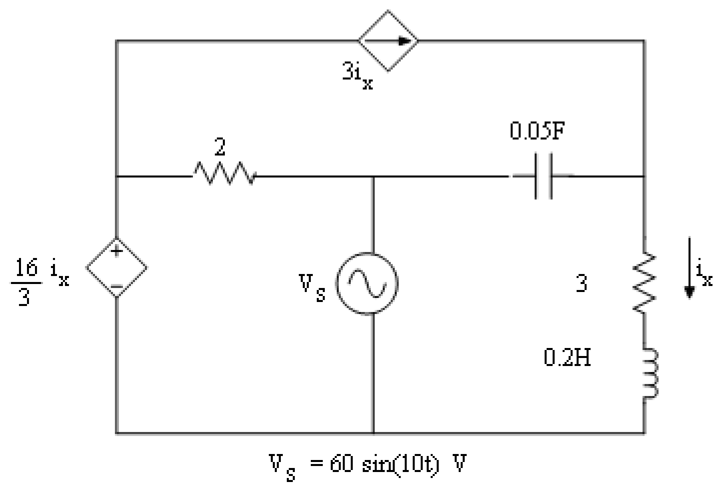
$$v_{eff} = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad , \quad i_{eff} = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

اگر این مقادیر را در رابطه توان فوق قرار دهیم خواهیم داشت:

$$s = v_{eff}.i^*{}_{eff} = \frac{v}{\sqrt{2}}.\frac{\bar{\imath}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}v.\bar{\imath}$$

مثال۶)

در مدار شکل زیر جریان $i_x(t)$ را در حالت دائمی سینوسی به دست آورید.

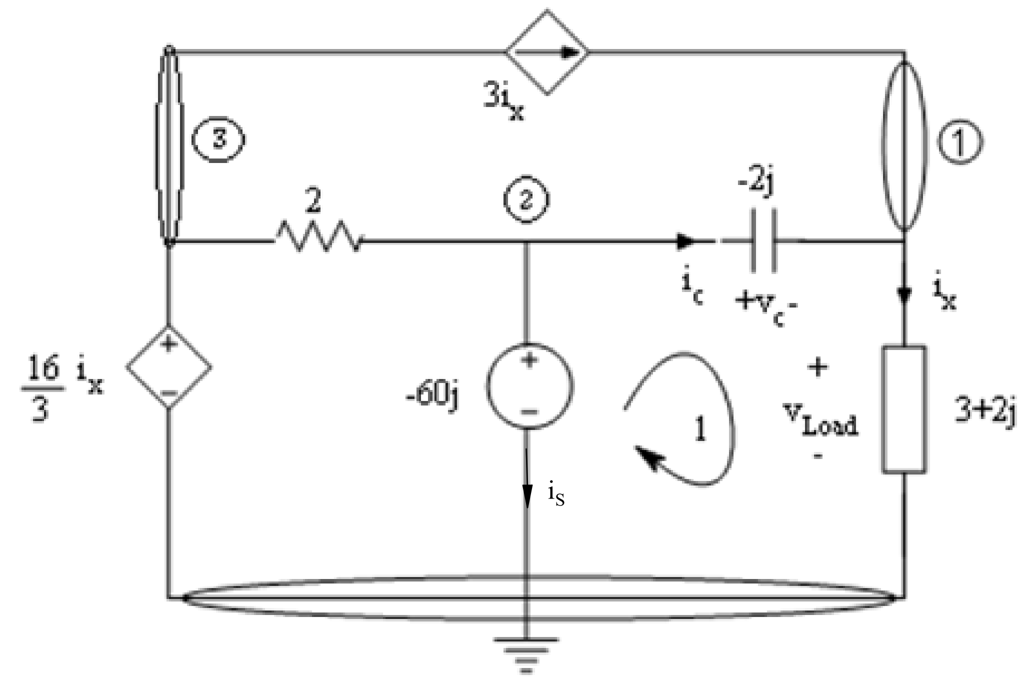


رسم مدار در حوزه فازور:

$$z_L = Lj\omega = 10 \times 0/2j = 2j\Omega$$

$$z_c = \frac{-j}{\omega c} = \frac{-j}{0/05 \times 10} = -2j$$

$$v_s = -6J$$



در گره ۲ و ۳ رابطه kcl نمی‌نویسیم زیرا در آن گره‌ها حداقل یکی از شاخه‌ها منبع ولتاژ است. در گره ۲، شاخه منبع ولتاژ مستقل v_S وجود دارد و در گره ۳ شاخه منبع ولتاژ وابسته $\frac{16}{3} i_x$ وجود دارد. پس فقط رابطه kcl در گره ۱ لازم است.

Kcl 1: $3i_x + i_c = i_x \rightarrow 2i_x + i_c = 0$ (1)

سوپر گره(Super Node): به طور کلی می‌توان گفت در هر گره‌ای که حداقل یکی از شاخه‌های آنفقط منبع ولتاژ باشد(چه مستقل و چه وابسته)، نباید kcl بنویسیم مگر در موارد خاص. به این گره‌ها، سوپر گره می‌گویند.

موارد خاص یعنی زمانی که خواسته مسئله، محاسبه جریان شاخه منبع ولتاژ باشد بهطور مثال در این مثال اگر i_s را بخواهند باید kcl 2 نوشته شود.

برای حل معادله فوق یک رابطه‌ی Kvl لازم است . kvl را در حلقه‌ای می‌نویسیم که مجهول i_c و i_x وجود داشته باشد. یعنی می‌توان kvl را در حلقه 1 یا حلقه بالایی آن نوشت. در حلقه‌ی بالا رابطه‌ی kvl نمی‌نویسیم زیرا یکی از شاخه‌های آن منبع جریان وابسته ی $3i_x$ است.

سوپر حلقه (سوپر مش):به طور کلی می‌توان گفت در هرحلقه‌ای که حداقل یکی از شاخه‌های آن منبع جریان باشد(چه مستقل و چه وابسته)، نبایدkvl بنویسیم مگر در موارد خاص . به این حلقه‌ها، سوپر حلقه می‌گویند.

موارد خاص یعنی زمانی که ولتاژ دو سر منبع جریان را خواسته باشند.به طور مثال اگر در این سوالولتاژ دو سر منبع جریان وابسته را خواسته بودند، باید در این مدار kvlحلقه بالایی را می‌نوشتیم.

Kvl 1: $v_c + v_{Load} + 60j = 0 \rightarrow -2ji_c + (3 + 2j)i_x + 60j = 0$ (2)

(1),(2) $\rightarrow (2j + 3)i_x - 2j(-2i_x) + 60j = 0 \rightarrow (3 + 6j)i_x = -60j \rightarrow i_x = -8 - 4j$

$i_x(t) = |i_x| \cos(10t + \measuredangle i_x)$

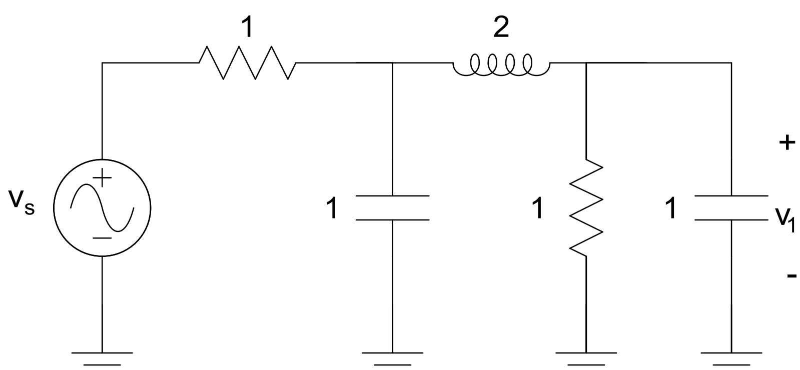
$i_x(t) = 4\sqrt{5} \cos(10t + tg^{-1}(\frac{1}{2}))$

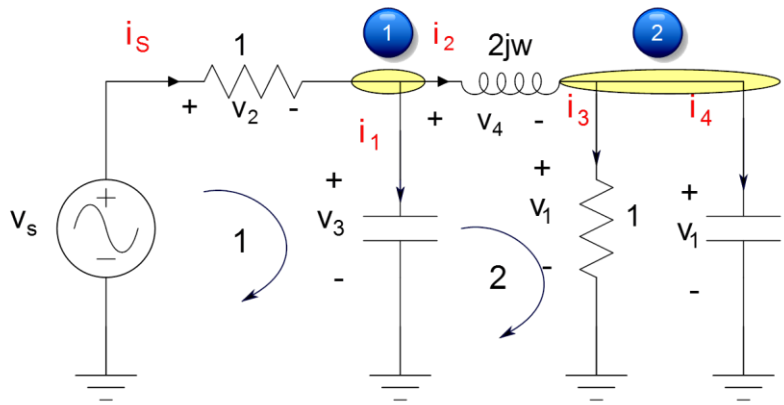
مثال۷)

پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ را به دست آورید.

$$H(j\omega) = \frac{v_1(j\omega)}{v_s(j\omega)}$$

پاسخ فرکانسی یعنی نسبت خروجی به ورودی در حوزه فازور. حوزه فازور یک تابع مثل H را با H(jω) نشان می‌دهند.





$kcl\ 1:\quad i_s = i_1 + i_2 \quad \rightarrow\ v_2 = j\omega v_3 + \frac{v_4}{2j\omega}(1)$

$kcl\ 2:\quad i_2 = i_3 + i_4 \quad \rightarrow\ \frac{v_4}{2j\omega} = v_1 + j\omega v_1 \rightarrow\ 2j\omega\,(1 + j\omega)\,v_1 = v_4 \quad (2)$

$kvl\ 1:\quad -v_s + v_2 + v_3 = 0 \quad (3)$

$kvl\ 2:\quad -v_3 + v_4 + v_1 = 0 \quad (4)$

جایگذاری (۲) در (۴) → $v_3 = 2j\omega\,(1 + j\omega)\,v_1 + v_1 = 2j\omega v_1 - 2\omega^2 v_1 + v_1 \quad (5)$

جایگذاری (۵) در (۳) → $v_2 = V_s - 2j\omega v_1 + 2\omega^2 v_1 - v_1 \quad (6)$

جایگذاری (۶) در (۱) → $V_s - 2j\omega v_1 + 2\omega^2 v_1 - v_1 = -2\omega^2 v_1 - 2j\omega^3 v_1 + j\omega v_1 + v_1 + j\omega v_1 \rightarrow$
$V_s = (2 + 4j\omega - 4\omega^2 - 2j\omega^3)\,v_1$

$$H(j\omega) = \frac{v_1(j\omega)}{v_s(j\omega)} = \frac{v_1}{(2 + 4j\omega - 4\omega^2 - 2j\omega^3)\,v1} = \frac{1}{2 + 4j\omega - 4\omega^2 - 2j\omega^3}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(-4\omega^2 + 2)^2 + (4\omega - 2\omega^3)^2}}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{4\omega - 2\omega^3}{-4\omega^2 + 2}\right)$$

مدار تشدید (رزونانس)

اگر مقدار موهومی ادمیتانس ورودی مدار مساوی صفر قرار گیرد، مدار را در حالت تشدید یا رزونانس می‌نامند. از مساوی صفر قرار دادن قسمت موهومی ادمیتانس ورودی مدار، مقدار ω به دست می‌آید که فرکانس تشدید نام دارد.

برای مدارهای RLC سری و موازی مقدار ω که آن را با ω_0 نشان می‌دهیم به صورت زیر است:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

مثال۸)

در یک مدار RLC موازی داریم:

$\omega_0 = 1000\ {rad}/{s}$, $L = 1\ H$

مقدار C را طوری بیابید که مدار در حالت رزونانس باشد.

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ شرط تشدید

$$1000 = \frac{1}{\sqrt{1 \times C}}$$

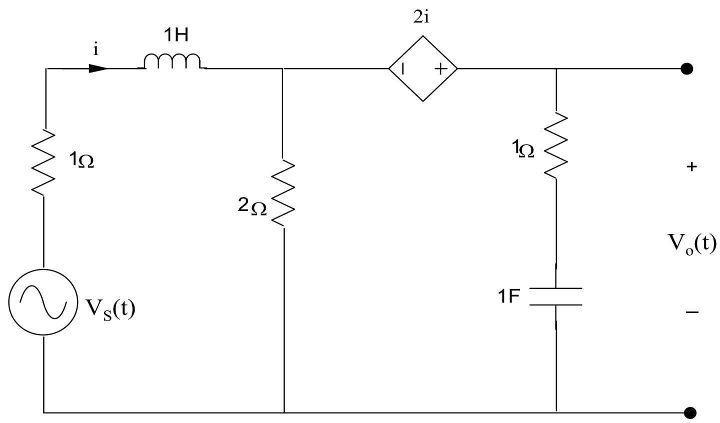
$\rightarrow 1000 = \frac{1}{\sqrt{C}} \rightarrow$ $C = 10^{-6} = 1\ \mu F$

تمرین‌های حل شده

فصل سوم

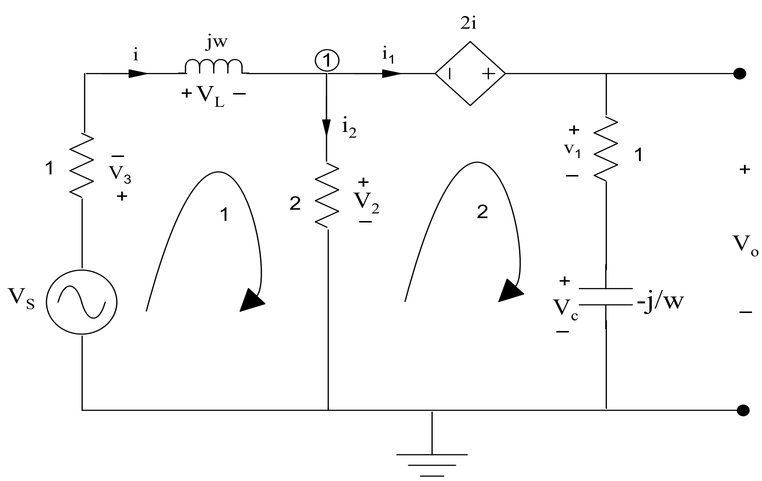
۱) برای مدار روبه‌رو مطلوب است:

محاسبه دامنه و فاز تابع شبکه $H(j\omega)=\frac{V_O}{V_S}$



$V_s(t)=A_m\cos(\omega t+\theta)$

رسم مدار در حوزه فازور



Kcl1: $i = i_1 + i_2$ (1)

Kvl1: $v_L + v_2 - v_S + v_3 = 0 \rightarrow j\omega i + 2i_2 - v_S + i = 0 \rightarrow (j\omega + 1)i + 2i_2 = v_S$ (2)

kvl2: $-2i + v_1 + v_c - v_2 = 0 \rightarrow -2i + i_1 + (\frac{-j}{\omega})i_1 - 2i_2 = 0 \rightarrow -2i + (1 - \frac{j}{\omega})i_1 - 2i_2 = 0$ (3)

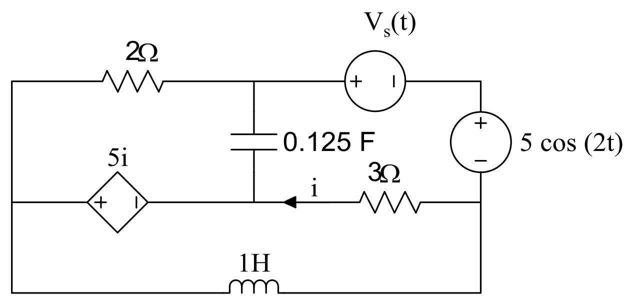
$(1),(2),(3) \;\rightarrow i_1 = \frac{4\omega V_S}{2\omega+3j\omega^2-3j}$

$V_O = (1-\frac{j}{\omega})\left(\frac{4\omega V_S}{2\omega+3j\omega^2-3j}\right) = \frac{(4\omega-4j)V_S}{2\omega+3j\omega^2-3j}$

$H(j\omega) = \frac{V_O}{V_S} = \frac{4\omega-4j}{2\omega+3j\omega^2-3j}$

$\rightarrow |H(j\omega)| = \frac{4\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{9\omega^4-14\omega^2+9}}$, $\measuredangle H(j\omega) = tg^{-1}\left(\frac{-1}{\omega}\right) - tg^{-1}\left(\frac{3\omega^2-3}{2\omega}\right)$

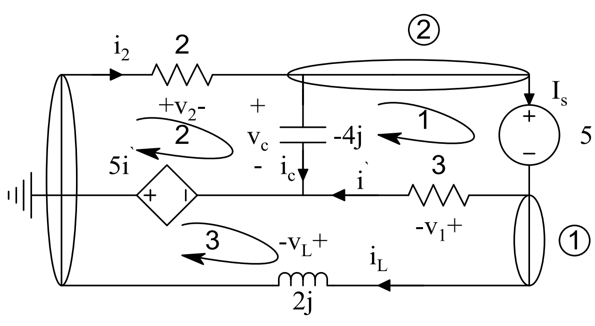
۲) جریان $i(t)$ را در حالت دائمی محاسبه نمایید.



$V_s(t) = 7\sqrt{2}\cos(4t + 45°)$

همان‌طور که مشاهده می‌شود مدار دارای دو منبع با فرکانس‌های مختلف است. در این گونه مدارها باید از روش جمع آثار استفاده نمود بدین ترتیب که ابتدا یکی از منابع را غیر فعال کرده و جواب را بدست می‌آوریم. سپس این کار را با منبع دیگر تکرار می‌کنیم و در نهایت امر جواب‌های حاصله را با هم جمع می‌کنیم.

رسم مدار در حوزه فازور و با $\omega = 2$



Kvl 1: $5 + v_1 - v_c = 0 \;\rightarrow 5 + 3i' + 4ji_c = 0 \quad (1)$

Kvl 2: $v_2 + v_c - 5i' = 0 \;\rightarrow 2i_2 - 4ji_c - 5i' = 0 \quad (2)$

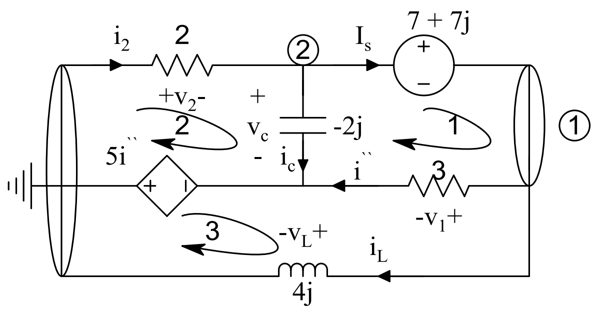
Kvl 3: $5i' - v_1 + v_L = 0 \rightarrow 5i' - 3i' + v_L = 0 \rightarrow 2i' + 2ji_L = 0$ (3)

$$\left.\begin{array}{l} kcl\ 1:\ I_s = i' + i_L \\ kcl\ 2:\ I_s = i_2 - i_c \end{array}\right\} \rightarrow i' + i_L = i_2 - i_c \quad (4)$$

(1),(2),(3),(4) (چهار معادله، چهار مجهول) $\rightarrow i' = \frac{-5+10j}{7}$

$i'(t) = \frac{5\sqrt{5}}{7} \cos(2t + tg^{-1}(-2))$

رسم مدار با $\omega = 4$



$V_s = 7\sqrt{2}\, e^{j45°} = 7\sqrt{2}\,(\cos 45° + j\sin 45°)$

$= 7\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 7 + 7j$

kvl 1: $7 + 7j + v_1 - v_c = 0 \rightarrow 7 + 7j + 3i'' + 2ji_c = 0$ (1)

Kvl 2: $v_2 + v_c - 5i'' = 0 \rightarrow 2i_2 - 2ji_c - 5i'' = 0$ (2)

Kvl 3: $5i'' - v_1 + v_L = 0 \rightarrow 5i'' - 3i'' + v_L = 0 \rightarrow 2i'' + 4ji_L = 0$ (3)

$$\left.\begin{array}{l} kcl\ 1:\ I_s = i'' + i_L \\ kcl\ 2:\ I_s = i_2 - i_c \end{array}\right\} \rightarrow i'' + i_L = i_2 - i_c \quad (4)$$

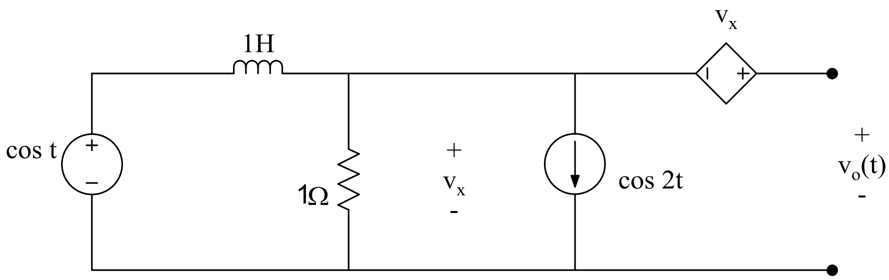
(1),(2),(3),(4) (چهار معادله، چهار مجهول) $\rightarrow i'' = \frac{-7}{2}$

$i''(t) = \frac{7}{2} \cos(4t)$

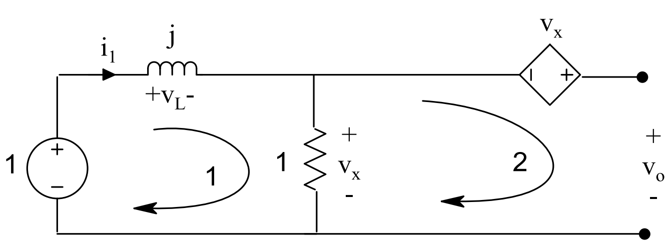
$i(t) = i'(t) + i''(t)$

$i(t) = \frac{5\sqrt{5}}{7} \cos(2t + tg^{-1}(-2)) + \frac{7}{2} \cos(4t)$

۳) ولتاژ خروجی $v_0(t)$ را در حالت دائمی تعیین کنید.



رسم مدار در حوزه فازور با $\omega = 1$



Kvl 1: $v_L + v_x - 1 = 0$ (1)

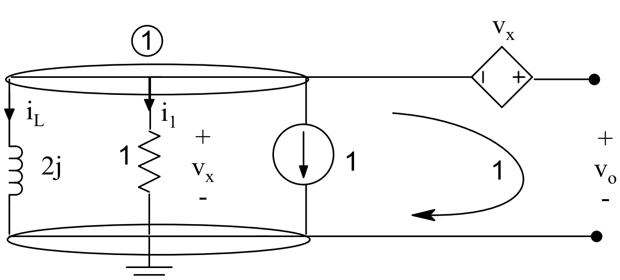
$i_1 = \frac{v_L}{j} = v_x = -jv_L \rightarrow v_L = jv_x$ (2)

(1),(2) $\rightarrow jv_x + v_x - 1 = 0 \rightarrow v_x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$

Kvl 2: $-v_x + v'_o - v_x = 0 \rightarrow v'_o = 2v_x = 1 - j$

$v'_o(t) = \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

رسم مدار در حوزه فازور با $\omega = 2$



Kcl 1: $i_L + i_1 + 1 = 0 \rightarrow \frac{v_x}{2j} + v_x + 1 = 0 \rightarrow v_x = \frac{-4}{5} - \frac{2}{5} j$

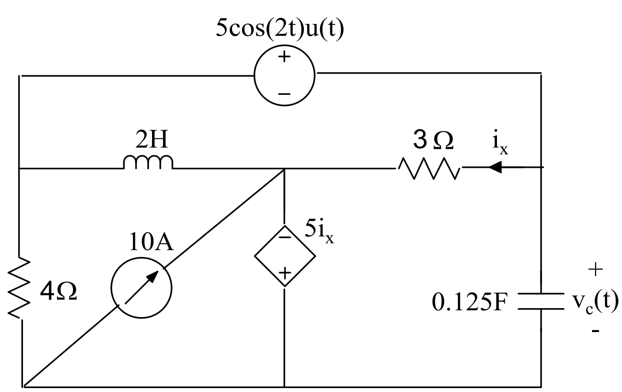
Kvl 1: $- v_x + v''_o - v_x = 0 \rightarrow v''_o = 2v_x = \frac{-8}{5} - \frac{4}{5} j$

$v''_o(t) = \frac{4\sqrt{5}}{5} \cos(2t + tg^{-1}(\frac{1}{2}))$

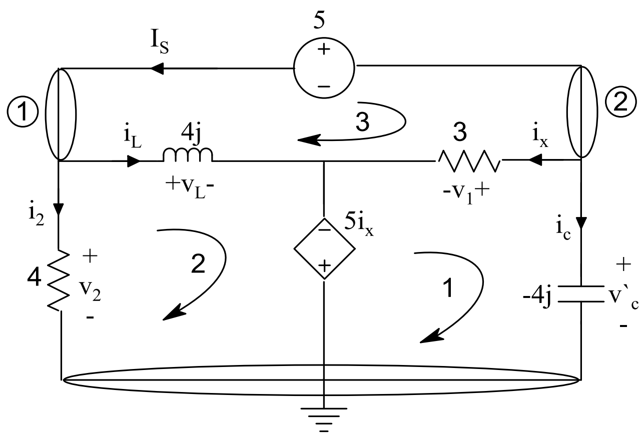
در نهایت از جمع آثار داریم:

$$v_o(t) = \sqrt{2} \cos(t - \frac{\pi}{4}) + \frac{4\sqrt{5}}{5} \cos(2t + tg^{-1}(\frac{1}{2}))$$

۴) برای مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان شکل زیر، ولتاژ خازن $v_c(t)$ را برای زمان‌های بسیار طولانی پس از t=0 تعیین کنید.



رسم مدار در حوزه فازور و با $\omega_1 = 2$



Kvl 1: $-v_1 + v'_c + 5i_x = 0 \;\rightarrow\; -v_1 + v'_c + 5\left(\frac{v_1}{3}\right) = 0 \;\rightarrow\; \frac{2}{3}v_1 + v'_c = 0 \quad (1)$

Kvl 2: $v_L - 5i_x - v_2 = 0 \;\rightarrow\; v_L - \frac{5}{3}v_1 - v_2 = 0 \quad (2)$

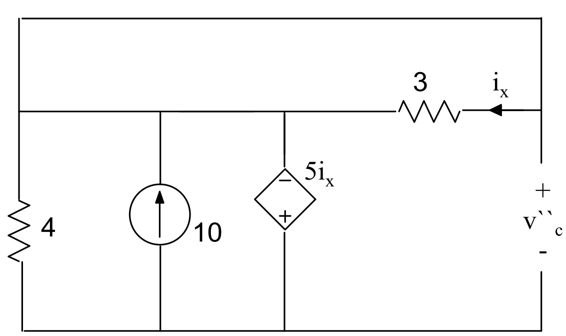
Kvl 3: $5 + v_1 - v_L = 0 \quad (3)$

$$\left.\begin{array}{l} kcl\ 1:\ I_s = i_2 + i_L \\ kcl\ 2:\ I_s = -i_c - i_x \end{array}\right\} \rightarrow \quad i_2 + i_L = -i_c - i_x \;\rightarrow\; \frac{v_2}{4} + \frac{v_L}{4j} = \frac{v'_c}{4j} - \frac{v_1}{3} \quad (4)$$

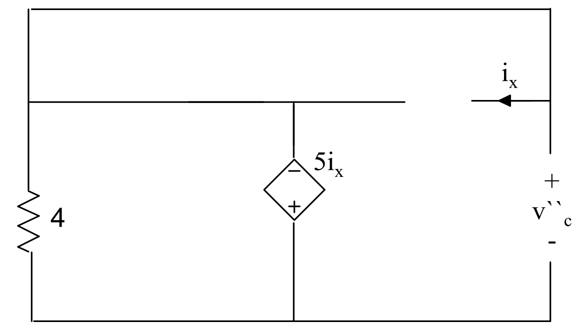
$(1),(2),(3),(4) \rightarrow v'_c = \frac{15+15j}{7/5 + 3j}$

$v'_c(t) = \frac{15}{\sqrt{65/25}} \cos\left(2t + \frac{\pi}{4} - tg^{-1}\left(\frac{3}{7/5}\right)\right)$

رسم مدار در حوزه فازور با $\omega_2 = 0$

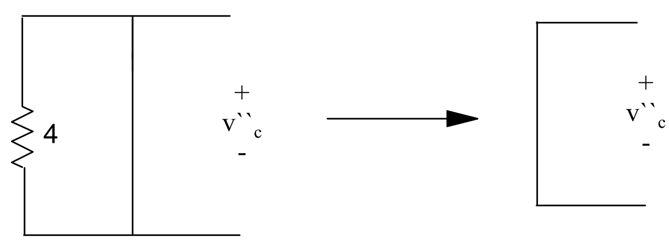


نکته: مقاومت موازی با اتصال کوتاه و منبع جریان موازی با منبع ولتاژ از مدار حذف می‌شوند.



چون i_x جریان مدار باز است پس صفر است و بنابراین منبع ولتاژ وابسته نیز صفر می‌شود.

نکته: منبع ولتاژ هنگامی که صفر می‌شود به اتصال کوتاه تبدیل می‌شود.



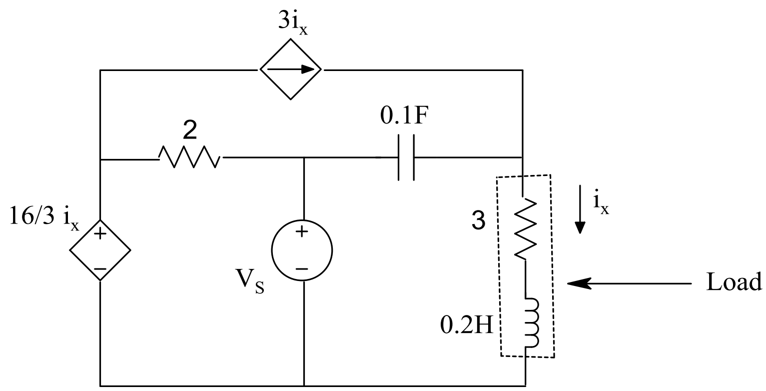
$$v''_c = 0$$

$$v_c(t) = v'_c(t) = v'_c(t) = \frac{15}{\sqrt{65/25}} \cos\left(2t + \frac{\pi}{4} - tg^{-1}\left(\frac{3}{7/5}\right)\right)$$

۵) مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی قرار دارد، مطلوب است:

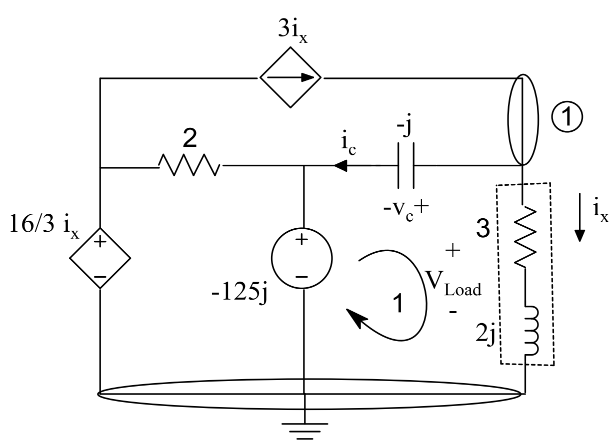
الف) جریان $i_x(t)$

ب) توان راکتیوی که مصرف کننده جذب می‌کند؟



$V_S = 125 \sin 10t$ (v)

رسم مدار در حوزه فازور:



$V_S = -j\,(125) = -125j$

Kcl 1: $3i_x = i_x + i_c \;\rightarrow\; 2i_x = i_c \quad (1)$

Kvl 1: $-v_c + v_L + 125j = 0 \;\rightarrow\; ji_c + (3 + 2j)i_x + 125j = 0 \quad (2)$

(1),(2) $\rightarrow 2ji_x + (3 + 2j)i_x + 125j = 0 \;\rightarrow (3 + 4j)i_x = -125j$

$\rightarrow\; i_x = \frac{-125j}{3+4j}$

$|i_x| = \frac{125}{5} = 25 \quad , \quad \measuredangle\, i_x = \frac{-\pi}{2} - tg^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

$i_x(t) = 25\cos\left(10t - \frac{\pi}{2} - tg^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$

ب)

$v_{Load} = (3 + 2j)\, i_x = (3 + 2j)\left(\frac{-125j}{3+4j}\right) = -30 - 85j$

$S_{Load} = \frac{1}{2} \times V_{Load} \times i^*x$

$i^*_x = -20 - 15j$

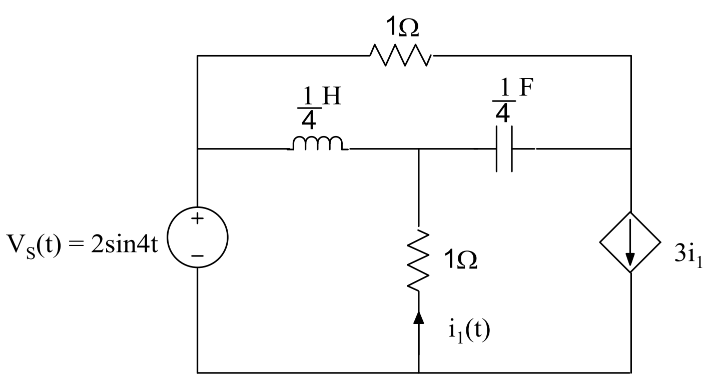
$S_{Load} = \frac{1}{2}(-30 - 85j)(-20 - 15j) = 937/5 + 625j$

$\rightarrow Q_{Load} = 625$ var

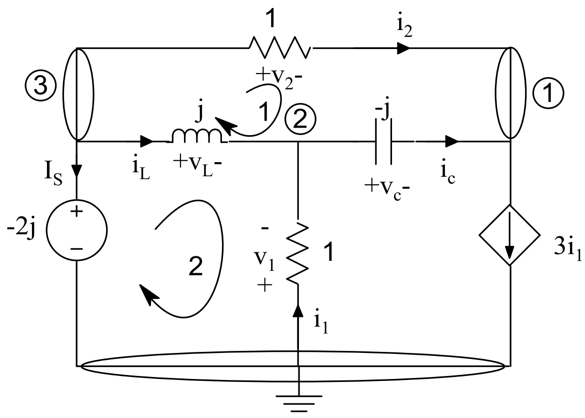
۶) در مدار شکل زیر مطلوبست:

الف) جریان $i_1(t)$ در حالت دائمی سینوسی

ب) توان ظاهری منبع ولتاژ مستقل $V_S(t)$



رسم مدار در حوزه فازور



Kcl 1: $i_2 + i_c = 3i_1$ (1)

Kcl 2: $i_L + i_1 = i_c$ (2)

Kvl 1: $v_2 - v_c - v_L = 0 \rightarrow i_2 + ji_c - ji_L = 0$ (3)

Kvl 2: $v_L - v_1 + 2j = 0 \rightarrow ji_L - i_1 + 2j = 0$ (4)

(1),(2),(3),(4) $\rightarrow i_1 = \frac{2j}{2+3j}$

$i_1(t) = \frac{2}{\sqrt{13}} \cos\left(4t + \frac{\pi}{2} - tg^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

ب)

Kcl 3: $i_2 + i_L + I_S = 0 \rightarrow I_S = -i_2 - i_L$

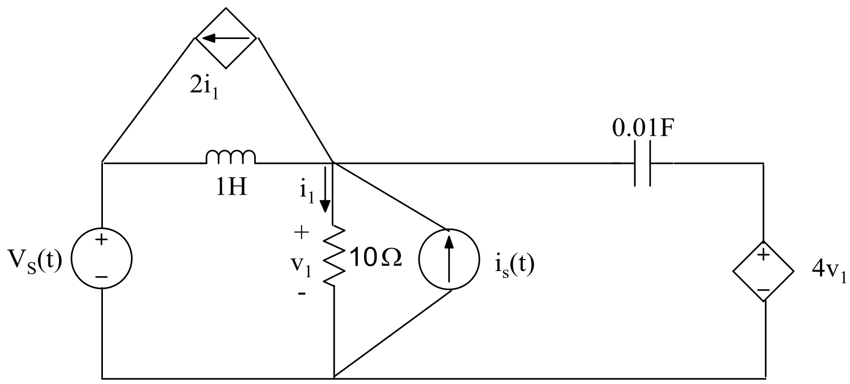
از حل معادلات قسمت الف، i_2 و i_L قابل محاسبه است:

$$(1),(2),(3),(4) \rightarrow \begin{cases} i_2 = \frac{23+11j}{13} \\ i_L = \frac{-2+4j}{1-5j} \end{cases}$$

$I_S = -\left(\frac{23+11j}{13}\right) - \left(\frac{-2+4j}{1-5j}\right) = \frac{263+67j}{13}$

$S_{\text{منبع}} = \frac{1}{2}(-2j)\left(\frac{263-67j}{13}\right) = \frac{-67-263j}{13}$

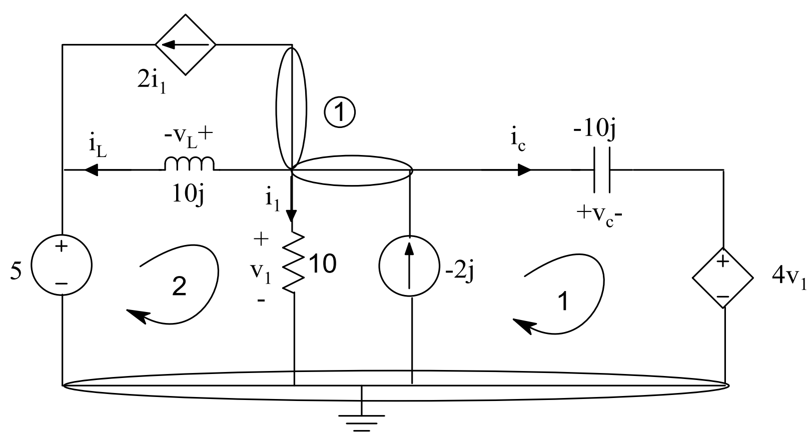
۷) مدار در حالت ماندگار (دائم) سینوسی قرار دارد. مطلوب است $v_1(t)$ و توان مختلطی که منبع جریان مستقل تحویل می‌دهد.



$$V_s(t) = 5\sqrt{2}\cos(10t)\ \text{V}\ ,\ i_s(t) = 2\sqrt{2}\sin(10t)\ \ \text{A}$$

رسم مدار در حوزه فازور:

با توجه به ظاهر شدن مقدار $\sqrt{2}$ در V_s و i_s ، برای سادگی محاسبات مقادیر موثر آنها را لحاظ می‌کنیم:



$$v_s = 5\sqrt{2}\quad ,\ i_s = -2\sqrt{2}j$$

$$\rightarrow v_{s(rms)} = 5\ \ ,\ i_{s(rms)} = -2j$$

Kcl 1: $-2j = i_c + i_L + 3i_1 \ \rightarrow\ -2j = \frac{1}{10} jv_c - \frac{1}{10} jv_L + \frac{3}{10} v_1 \quad (1)$

Kvl 1: $v_c + 4v_1 - v_1 = 0 \ \rightarrow\ v_c = -3v_1 \quad (2)$

Kvl 2: $-v_L + v_1 - 5 = 0 \ \rightarrow\ v_L = v_1 - 5 \quad (3)$

$(1),(2),(3) \;\rightarrow\; -2j = -\frac{3}{10}jv_1 - \frac{1}{10}j(v_1 - 5) + \frac{3}{10}v_1$

$\rightarrow\; -2j = -\frac{3}{10}jv_1 - \frac{1}{10}j\,v_1 + \frac{1}{2}j + \frac{3}{10}v_1 \;\rightarrow\; v_1 = 4 - 3j$

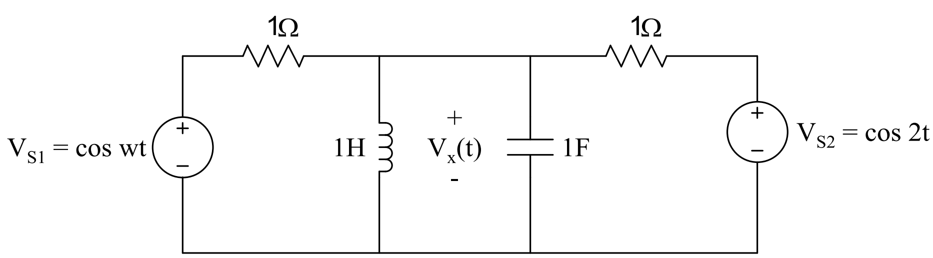
$v_1(t) = 5\cos\left(10t + tg^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right)\right)$

$P_{\text{منبع جریان مستقل}} = v_1\, i^*_s = (4 - 3j)(2j) = 6 + 8j$

۸) مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است.

الف) فرکانس ω منبع V_{S1} را به نحوی تعیین کنید که مدار در حالت تشدید قرار گیرد.

ب) ولتاژ $v_x(t)$ را محاسبه نمایید.



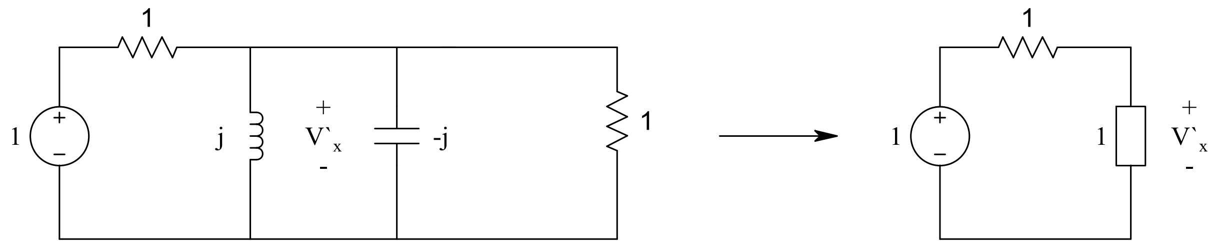
الف)

نکته: شرط اینکه مدار RLC در حالت تشدید قرار گیرد این است که: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{lc}}$

$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{lc}} = \frac{1}{2\pi} \;\rightarrow\; \omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\right) = 1$

ب) حل با استفاده از روش جمع آثار:

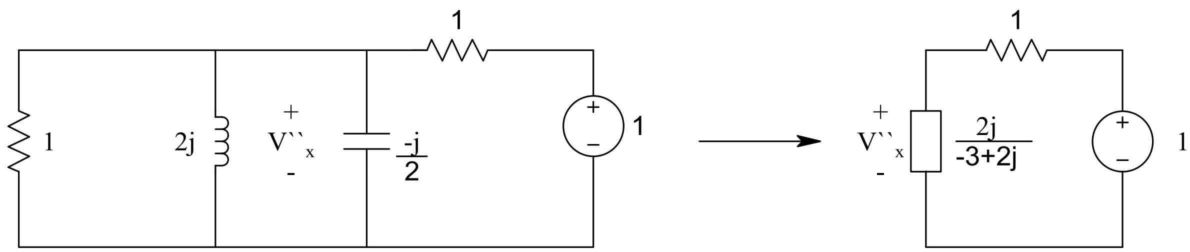
رسم مدار در حوزه فازور و با $\omega_1 = 1$



$Z_L \parallel Z_c \parallel R \;\rightarrow\; (j) \parallel (-j) \parallel 1 = 1$

$v'_x = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \;\rightarrow v'_x(t) = \frac{1}{2} \cos (t)$

$\omega_2 = 2$ رسم مدار با



$Z_L \parallel Z_c \parallel R \;\rightarrow\; (۲j) \parallel (\frac{-j}{2}) \parallel 1 = \frac{2j}{-3+2j}$

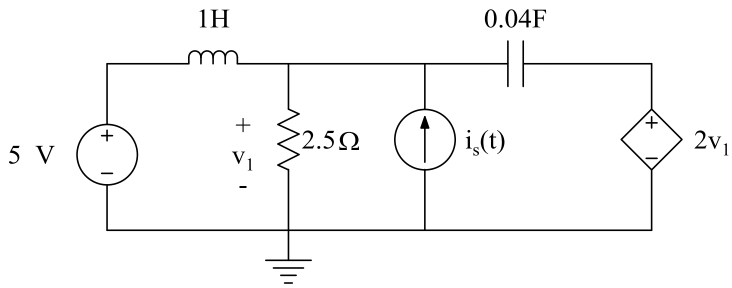
$v''_x = \frac{\frac{2j}{-3+2j}}{\frac{2j}{-3+2j}+1} = \frac{\frac{2j}{-3+2j}}{\frac{-3+4j}{-3+2j}} = \frac{2j}{-3+4j} \;\rightarrow\; v''_x(t) = \frac{2}{5} \cos (2t + \frac{\pi}{2} - tg^{-1}(\frac{4}{-3}))$

$v_x(t) = v'_x(t) + v''_x(t) = \frac{1}{2} \cos (t) + \frac{2}{5} \cos (2t + \frac{\pi}{2} - tg^{-1}(\frac{4}{-3}))$

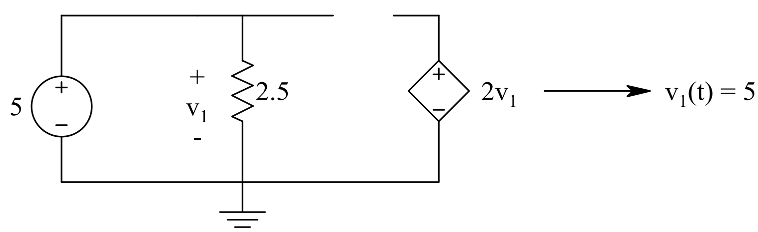
۹) مطلوبست ولتاژ $v_1(t)$ اگر منبع جریان مستقل در مدار به صورت زیر باشد:

$i_s(t)= 2\sqrt{2}\cos(5t+45°)$ A

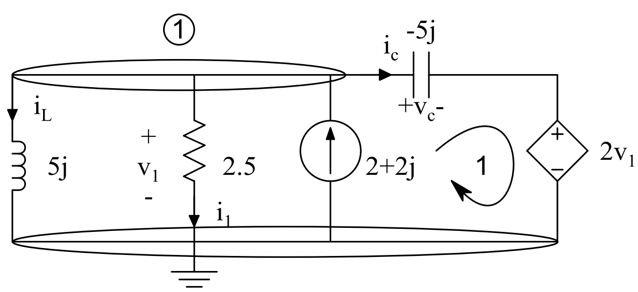
فرض کنید مدار به حالت دائم (ماندگار) رسیده است.



رسم مدار در حالت فازور با $\omega_1=0$



رسم مدار در حالت فازور با $\omega_2 = 5$



$$i_s = 2\sqrt{2}\, e^{j\,45°} = 2\sqrt{2}\,(\cos 45° + j\sin 45°) = 2\sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\,\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 + 2j$$

Kcl 1: $i_L + i_c + i_1 = 2+2j \;\rightarrow\; \frac{v_1}{5j} + \frac{v_1}{2/5} + \frac{v_c}{-5j} = 2+2j \;\rightarrow\; -\frac{1}{5}jv_1 + \frac{2}{5}v_1 + \frac{1}{5}jv_c = 2+2j$

$$(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}j)v_1 + \frac{1}{5}jv_c = 2+2j \quad (1)$$

Kvl 1: $v_c + 2v_1 - v_1 = 0 \rightarrow v_c + v_1 = 0 \rightarrow v_c = -v_1$ (2)

(1), (2) $\rightarrow (\frac{2}{5} - \frac{1}{5} j)v_1 - \frac{1}{5} jv_1 = 2+2j$

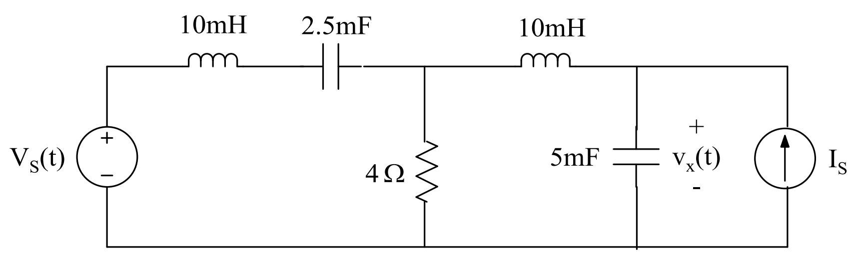
$(\frac{2}{5} - \frac{2}{5} j)v_1 = 2+2j \rightarrow v_1 = 5j$

$v_1(t) = 5 \cos(5t + \frac{\pi}{2})$

در نهایت از جمع آثار داریم:

$v_1(t) = ۵ + 5 \cos(5t + \frac{\pi}{2})$

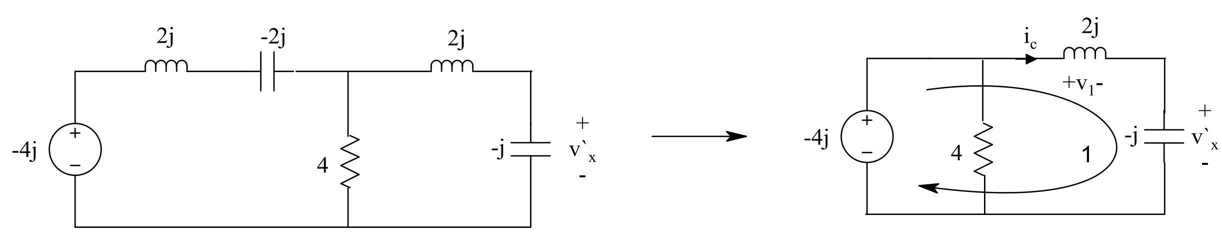
۱۰) با فرض اینکه منابع به صورت زیر باشند، ولتاژ $v_x(t)$ را بدست آورید.



$V_S(t) = 4\sin(200t)$ V

$I_S = 1$ A

رسم مدار در حوزه فازور با $\omega_1 = 200$



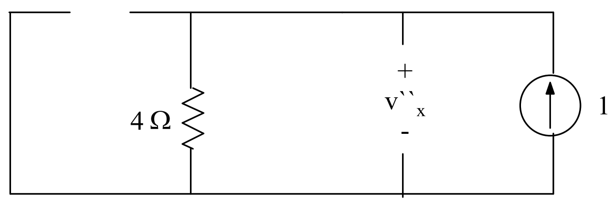
Kvl 1: $v_1 + v'_x + 4j = 0$ (1)

$i_c = \frac{v_1}{2j} = \frac{v'_x}{-j}$ (2)

(1),(2) $\rightarrow -2v'_x + v'_x + 4j = 0 \rightarrow v'_x = 4j$

$v'_x(t) = 4\cos(200t + \frac{\pi}{2})$

رسم مدار در حوزه فازور با $\omega_2 = 0$



$v''_x = 4 \times 1 = 4$

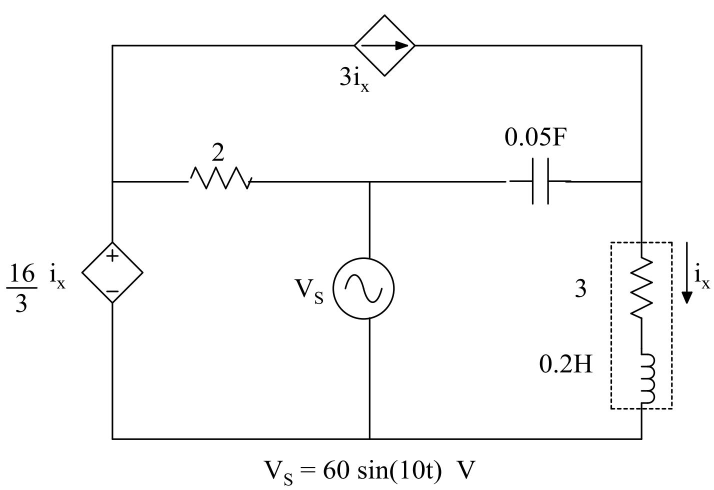
$v_x(t) = v'_x(t) + v''_x(t)$

$v_x(t) = 4\cos(200t + \frac{\pi}{2}) + 4$

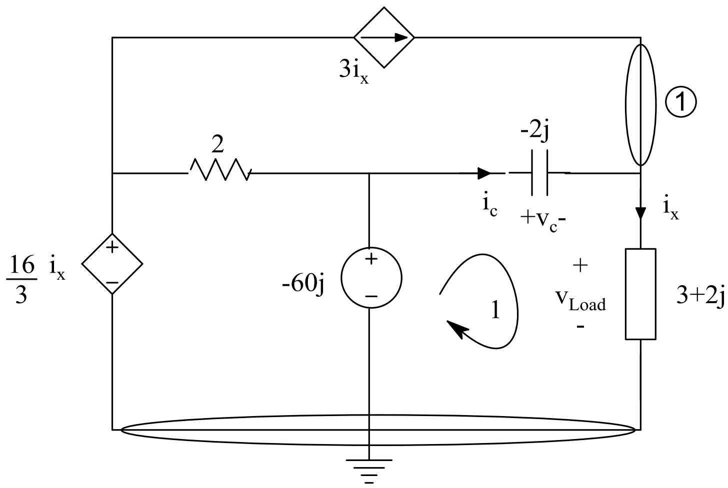
۱۱) مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی قرار دارد، مطلوب است:

الف) جریان $i_x(t)$.

ب) توان راکتیوی که مصرف کننده جذب می‌کند (مقاومت و سلفی سری که در داخل کادر قرار دارد، مصرف کننده فرض شود.)



الف) رسم مدار در حوزه فازور:



Kcl 1: $3i_x + i_c = i_x \;\rightarrow\; 2i_x + i_c = 0 \quad (1)$

Kvl 1: $v_c + v_{Load} + 60j = 0 \;\rightarrow\; -2ji_c + (3 + 2j)i_x + 60j = 0 \quad (2)$

$(1),(2) \;\rightarrow\; (2j + 3)i_x - 2j(-2i_x) + 60j = 0 \;\rightarrow\; (3 + 6j)i_x = -60j \;\rightarrow i_x = -8 - 4j$

$i_x(t) = 4\sqrt{5}\cos\left(10t + tg^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

ب)

$v_{Load-} = (-8 - 4j)(3 + 2j) = -16 - 28j$

$S_{Load} = \frac{1}{2} v_{Load} i^*_x = \frac{1}{2}(-16 - 28j)(-8 + 4j) = 120 + 80j$

$Q_{Load} = 80$ var

فصل چهارم:

آشنایی با ترانسفورماتورهای ایده‌آل

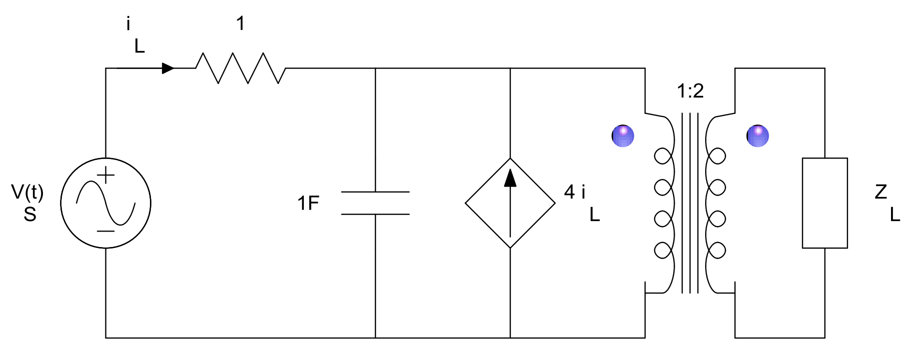
فصل چهارم:

آشنایی با ترانسفورماتورهای ایده‌آل

در این فصل با ترانسفورماتورهای ایده‌آل، روابط توان، قضیه انتقال توان ماکسیمم و مدار معادل تونن و نورتن آشنا می‌شویم. با ذکر مثالی به این مباحث می‌پردازیم:

مثال ۱)

مدار زیر در حالت دائمی سینوسی قرار دارد. Z_L را طوری پیدا کنید که بیشترین توان متوسط به آن انتقال یابد. و سپس این مقدار توان را بدست آورید.



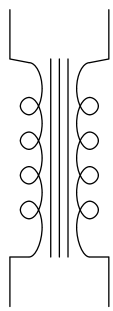
$$v_s(t) = \sin 5t$$

برای حل این مدار ابتدا باید مفاهیمی که در ادامه خواهد آمد را بررسی کرد:

ترانس یا ترانسفرماتور:

برای حل مدارهای شامل ترانس باید مدار یک طرف ترانس را به طرف دیگر منتقل کرد و سپس مدار را حل نمود. وقتی مدار یک طرف ترانس به طرف دیگر منتقل شود، می‌توان فرض کرد مدار دیگر فاقد ترانس است و مانند مدارهای معمولی فازوری حل می‌شود.

ترانس را از نظر الکتریکی به صورت زیر نشان می‌دهیم:



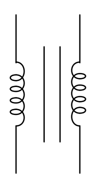
$n_1 : n_2$

n_1 : تعداد دور سیم پیچ شماره ۱

n_2 : تعداد دور سیم پیچ شماره 2

اگر ترانس را بر حسب نسبت دور سیم پیچ‌ها نشان دهیم به صورت زیر خواهد شد:

1 : n



که در آن از روابط زیر استفاده شده است:

$$\frac{n_1}{n_1} = 1$$

$$\frac{n_2}{n_1} = n$$

نسبت 1:n یعنی تعداد دور یک سیم پیچ n برابر سیم پیچ دیگر است.

در ترانس ۴ کمیت زیر از یک سیم پیچ به سیم پیچ دیگر منتقل می‌شود:

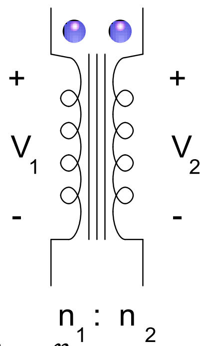
۱- ولتاژ دو سر هر سیم پیچ

۲- جریان عبوری از هر سیم پیچ

۳- امپدانس موازی با هر سیم پیچ

۴- معادل تونن یا نورتن مدار در دو سر هر سیم پیچ

انتقال ولتاژ:

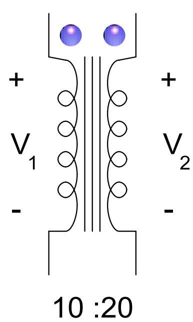


برای ترانس رو به رو رابطه ولتاژ سمت چپ و سمت راست ترانس به صورت زیر است:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

برای تعیین علامت مثبت یا منفی رابطه انتقال ولتاژ در ترانس، دو سر نقطه دار برایترانس انتخاب می‌کنیم و ولتاژ سرهای نقطه دار را با هم مقایسه می‌کنیم. اگر سرهای نقطه دار هم علامت بودند رابطه مثبت است و در غیر این صورت رابطه منفی است.

مثال: در ترانس زیر v_2 را بدست آورید.

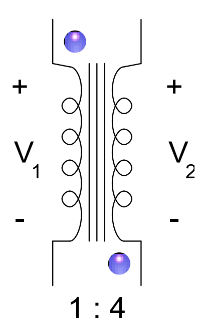


$$v_1 = 1 + j$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{10}{20} \rightarrow \frac{1+j}{v_2} = \frac{1}{2} \rightarrow v_2 = 2 + 2j \quad volt$$

با توجه به این مثال مشخص است که به جای استفاده از تعداد دور سیم پیچ n_1 و n_2 می‌توان از نسبت دور سیم پیچ ها استفاده کرد.

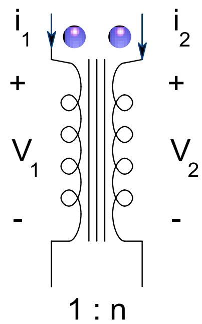
مثال۴) در مدار شکل زیر v_2 را بدست آورید.



$$v_1 = 1 - j$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{-1}{4} \rightarrow \frac{1-j}{v_2} = \frac{-1}{4} \quad , \quad v_2 = -4 + 4j$$

انتقال جریان در ترانس:

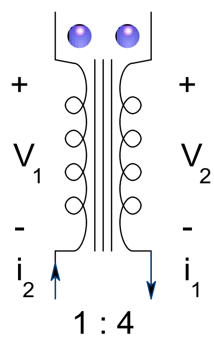


رابطه انتقال جریان به صورت زیر است:

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{-1}{n}$$

اگر هردو جریان i_1 و i_2 از سرهای نقطه‌دار وارد سیم پیچ‌ها شوند یا هردو جریان i_1 و i_2 از سرهای نقطه‌دار از سیم پیچ‌ها خارج شوند، رابطه منفی است. در غیر اینصورت رابطه مثبت است.

مثال۵) در مدار زیر i_2 را بدست آورید.

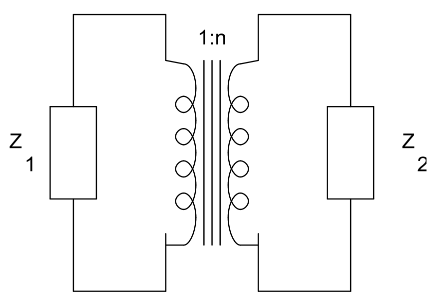


$$i_1 = 1 + j$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{1}{4} \quad , \quad \frac{1+j}{i_2} = \frac{1}{4} \rightarrow i_2 = 4 + 4j$$

انتقال امپدانس :

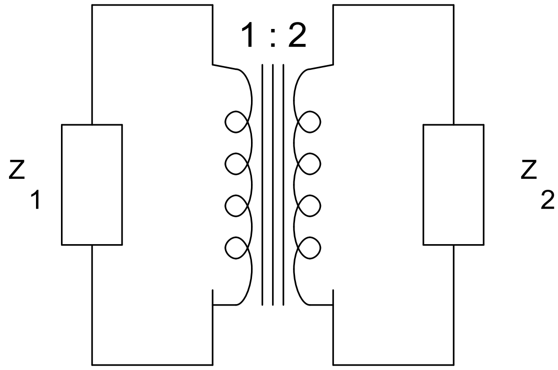
انتقال امپدانس در ترانس از رابطه زیر بدست می‌آید:



$$\frac{Z_1}{Z_2} = (\frac{1}{n})^2$$

رابطه انتقال امپدانس در ترانس همیشه مثبت است زیرا به مجذور نسبت دورها بستگی دارد پس نیازی به مشخص کردن سرهای نقطه‌دار نیست.

مثال۶) در مدار زیر Z_2 را بدست آورید.



$Z_1 = 1 + j$

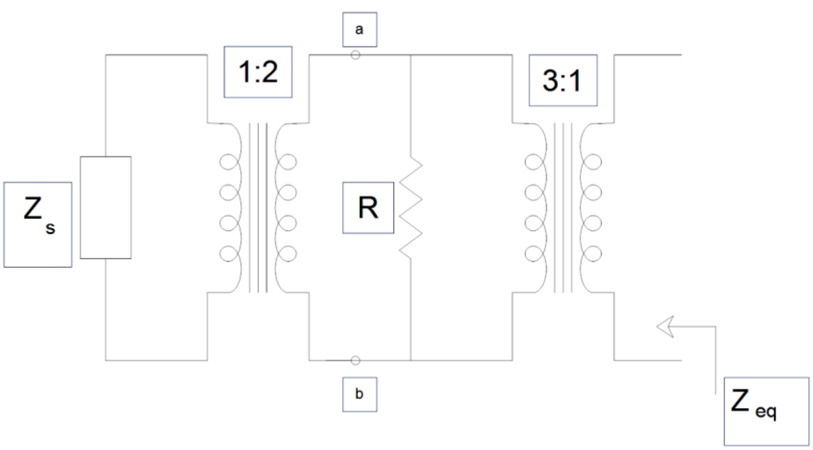
$$\frac{Z_2}{Z_1} = (\frac{2}{1})^2 = 4 \rightarrow \frac{Z_2}{1+j} = 4 \rightarrow Z_2 = 4 + 4j$$

نکته:نسبت ولتاژ در ترانس با تعداد دور سیم پیچها رابطه مستقیمو مساوی دارد.

نکته:نسبت جریان در ترانس با تعداد دور سیم پیچها رابطه معکوس و مساوی دارد.

نکته:نسبت امپدانس در ترانس با تعداد دور سیم پیچها رابطه مجذور و مستقیم دارد.

مثال۷)Z_{eq} را به دست آورید.



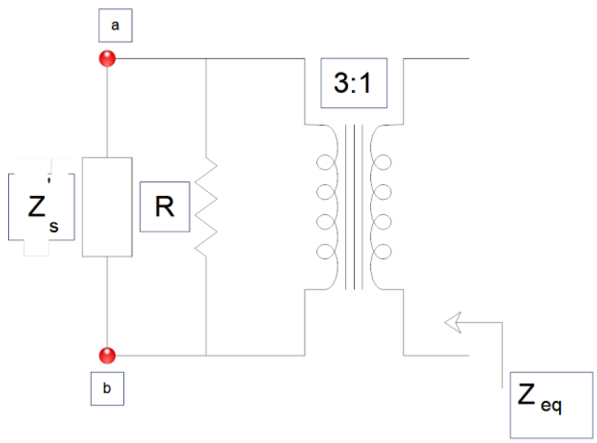
$z_s = 1 + J\Omega$R=10 Ω

حل: در مسائلی که دارای ترانس است باید ابتدا ترانس را از مدار حذف کرد سپس مدار معمولی به دست آمده را حل نمود. از طرفی یا باید سمت چپ ترانس به سمت راست منتقل شود یا بالعکس. بهتر است طرفی که مجهول دارد منتقل نشود.

برای انتقال از روابط مذکور استفاده می‌کنیم.

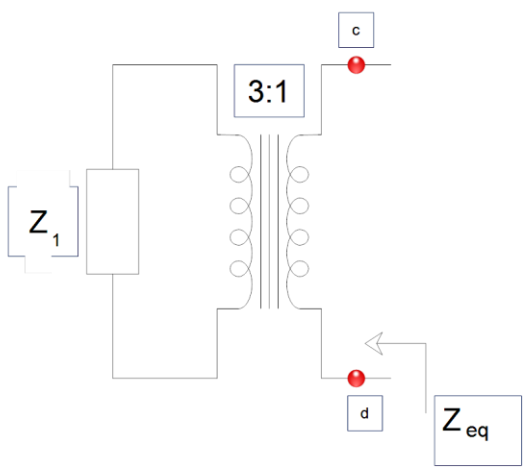
z_s انتقال یافته از ترانس اول در دوسر a و b ، امپدانس z'_s نام دارد.

z'_sاز رابطه‌ی زیر به دست می آید:



$$\frac{z_s}{z'_s} = (\frac{1}{2})^2 \;\rightarrow\; z'_s = 4z_s \;\rightarrow\; z'_s = 4 + 4J$$

$$z_1 = z'_s \| R \quad = \frac{z'_s \times R}{z'_s + R} = \frac{(4+4J)10}{4+4J+10} = \frac{40+40J}{14+4J} = z_1$$



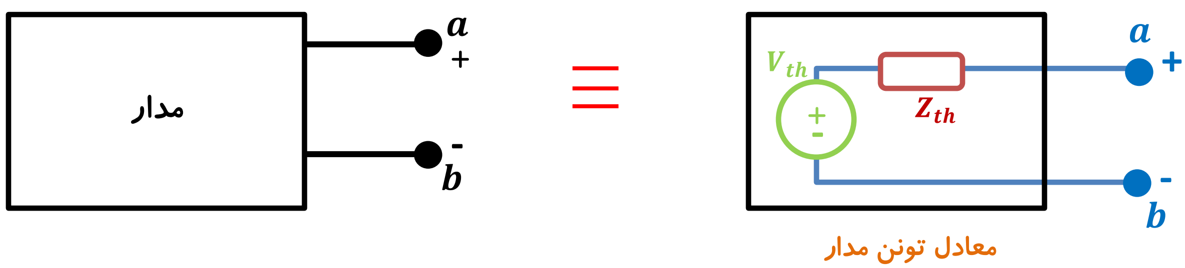
z_1 به دوسر c و d با رابطه زیر منتقل می‌شود :

$$\frac{z_1}{z_{eq}} = (\frac{3}{1})^2 \;\rightarrow\; z_{eq} = \frac{1}{9} z_1$$

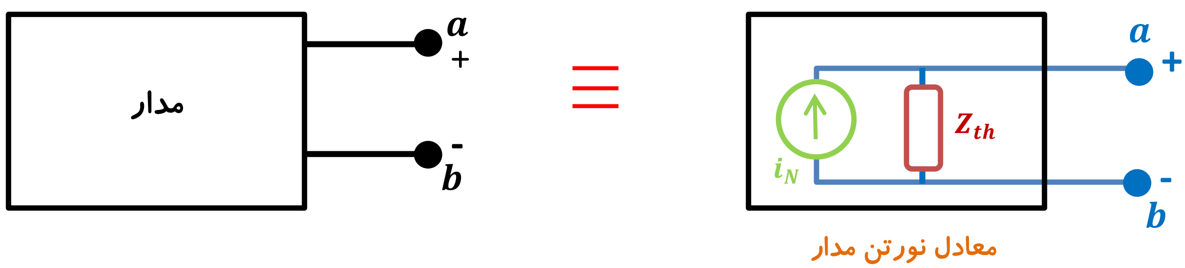
$$z_{eq} = \frac{1}{9}\left(\frac{40+40J}{14+4J}\right)$$

توضیح مدار معادل تونن و نورتن:

هر مدار خطی دلخواه در حوزه فازور یا هر مدار ساده (مدار فاقد سلف و خازن) خطی دلخواه در حوزه زمان از هر دو سر aو b معادل است با یک منبع ولتاژ مستقل با مقدار V_{th} که با یک امپدانس Z_{th} سری شده است. V_{th} را ولتاژ تونن مدار وZ_{th} را امپدانس تونن مدار و این معادل را معادل تونن مدار می‌نامند.



هر مدار خطی دلخواه در حوزه فازور یا هر مدار ساده (مدار فاقد سلف و خازن) خطی دلخواه در حوزه زمان از هر دو سر aو b معادل است با یک منبع جریان مستقل با مقدار i_N که با یک امپدانس Z_Nموازی شده است. i_N را جریاننورتن مدار وZ_N را امپدانس نورتن مدار و این معادل را معادل نورتن مدار می‌نامند.

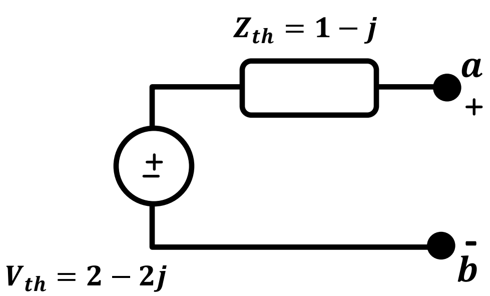


روابط معادل نورتن و معادل تونن به صورت زیر است که آن‌ها را روابط تبدیل منابع گویند:

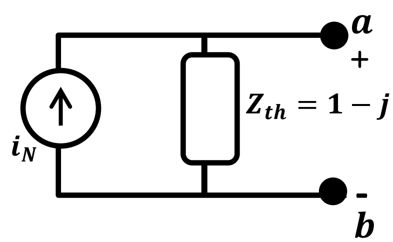
$$\left.\begin{aligned} V_{th} &= i_N . Z_{th} \\ i_N &= \frac{V_{th}}{Z_{th}} \end{aligned}\right\} \text{تبدیل منابع}$$

روابط تبدیل منابع نشان می‌دهد که در هر مدار از هر دو سر دلخواه a و b می‌توان یک منبع ولتاژ سری شده با یک امپدانس را با یک منبع جریان موازی شده با همان امپدانس جا به جا کرد.

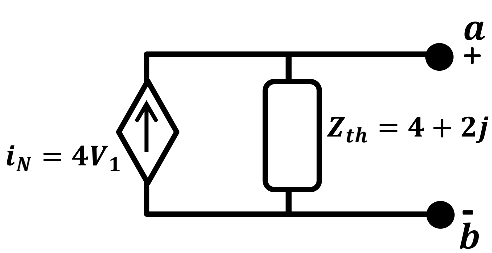
مثال ۸) با استفاده ازروش تبدیل منابع نورتن را برای مدارهای معادل نورتن را برای مدارهای تونن داده شده ومعادل تونن را برای مدارهای نورتن داده شده به دست آورید.



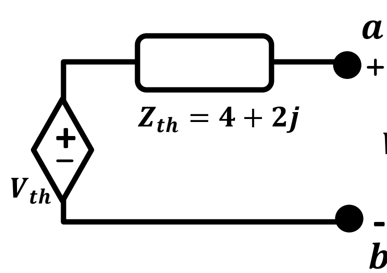
$\equiv$



$$i_N = \frac{V_{th}}{Z_{th}} = \frac{2(1-j)}{1-j} = 2(A)$$



$\equiv$



$$V_{th} = i_N . Z_{th} = 4V_1(4 + 2j)$$

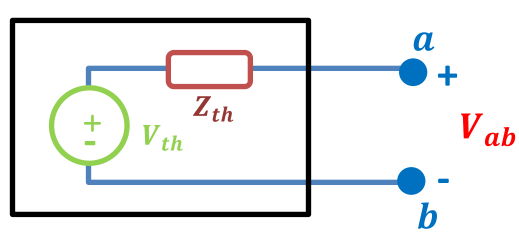
نحوه محاسبه V_{th}, Z_{th}, i_N :

اگر در مدار معادل تونن از دو سر a و b، ولتاژ V_{ab} را به دست آوریم برابر V_{th} خواهد شد.

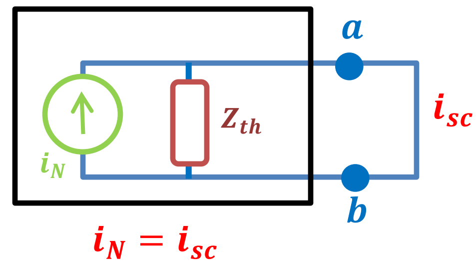
$$V_{th} = V_{ab}$$

$$i_N = i_{sc}$$

$$Z_{th} = \frac{V_{th}}{i_N}$$



در مدار معادل نورتن اگر دو سر a و b را اتصال کوتاه کنیم جریان اتصال کوتاه i_{sc} برابر جریان i_N خواهد شد:

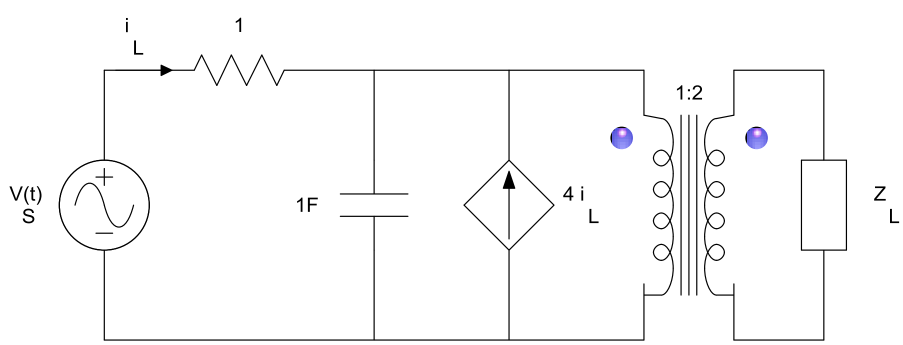


جهت‌های متناظر معادل تونن و نورتن:

جهت‌های در نظر گرفته شده برای مدارهای معادل تونن و نورتن با هم متناظر است اگر جهت جریان i_{sc} از سر مثبت به سر منفی باشد. یعنی اگر علامت ولتاژ در نقطه a مثبت و در نقطه b منفی باشد جهت جریان i_{sc} از a به سمت b باید در نظر گرفته شود.

اکنون به مساله اول فصل بازمی‌گردیم:

مدار زیر در حالت دائمی سینوسی قرار دارد. Z_L را طوری پیدا کنید که بیشترین توان متوسط به آن انتقال یابد. این مقدار توان را بدست آورید.

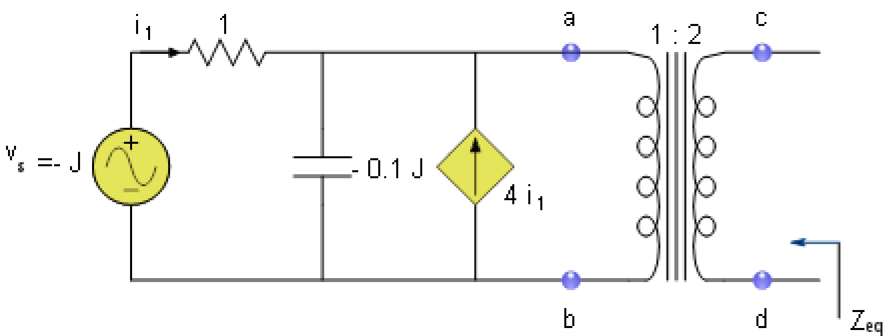


$$v_s(t) = \sin 5t$$

برای انتقال حداکثر توان متوسط به بار Z_L باید Z_L را از مدار جدا کرد و از دو سر آن یعنی دوسر امپدانس، معادل مدار یعنی Z_{eq} را به دست آورد و از رابطه زیر Z_L را محاسبه کرد.

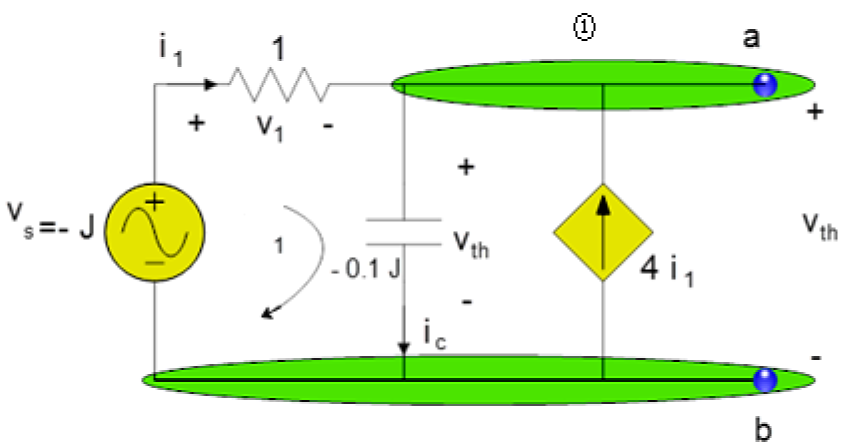
$Z_L = \overline{Z_{eq}}$

$\overline{Z_{eq}} \;=\; Z_{eq}$ مزدوج



از دو سر ab مدار سمت چپ باید معادل تونن یا معادل نورتن گرفت.

برای محاسبه معادل تونن از دو سر دلخواه ab باید ابتدا v_{th}یعنی همان ولتاژ دو سرab را به دست آوریم.



$kcl\;\;1:\quad i_1 + 4i_1 = i_c \rightarrow 5i_1 = i_c \;\;\rightarrow\;\; 5v_1 = \frac{V_{th}}{-0/1j} = 10jv_{th} \rightarrow\;\; v_1 = 2jv_{th} \quad (1)$

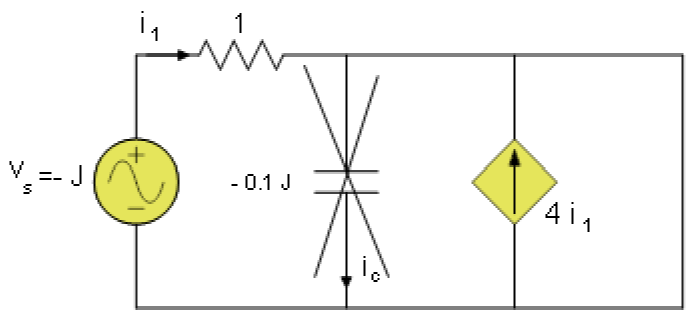
$kvl\;\;1:\;\; v_1 + v_{th} + j = 0 \qquad (2)$

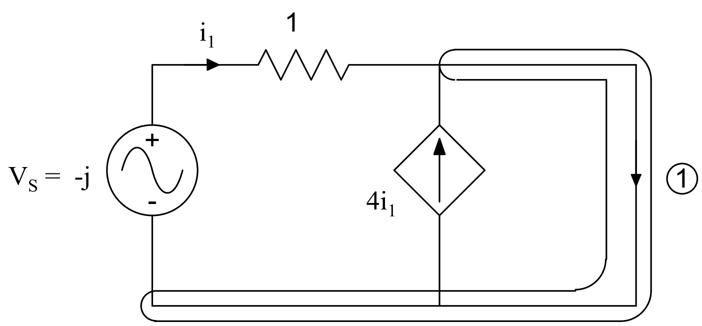
$(1),(2) \;\rightarrow\;\; 2jv_{th} + v_{th} + j = 0 \;\;\rightarrow\;\; v_{th}(2j+1) = -j \;\;\;\rightarrow\;\;\; v_{th} = \frac{-j}{2j+1}$

برای محاسبه Z_{th} باید دو سر ab را اتصال کوتاه کرد و جریان اتصال کوتاه i_{sc}را به دست آورد. سپس از رابطه-ی زیر Z_{th} محاسبه می‌شود:

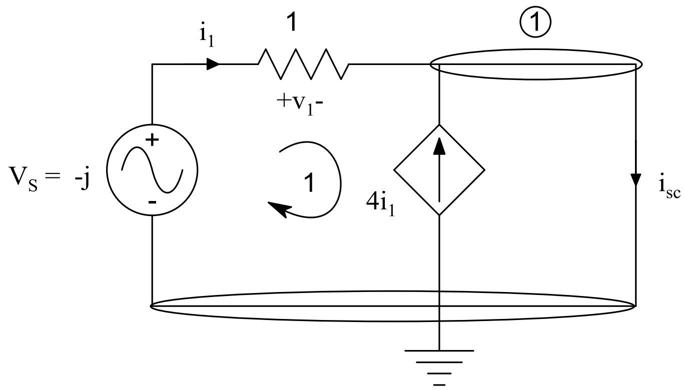
$$Z_{th} = \frac{v_{th}}{i_{sc}}$$

نکته: مقاومت (امپدانس) و منبع ولتاژ موازی با اتصال کوتاه از مدار حذف می‌شود. توجه داشته باشید که در حوزه فازور، سلف و خازن **مقاومت موهومی** هستند که امپدانس نامیده می‌شوند.





در این مدار از آنجا که جریان شاخه اتصال کوتاه i_{sc} مجهول مسئله است بنابراین باید شاخه‌ی اتصال کوتاه را دو گره مجزا در نظر گرفت بنابراین مدار به شکل زیر خواهد بود.



نکته: ولتاژ دو سر اتصال کوتاه برابر صفر است.

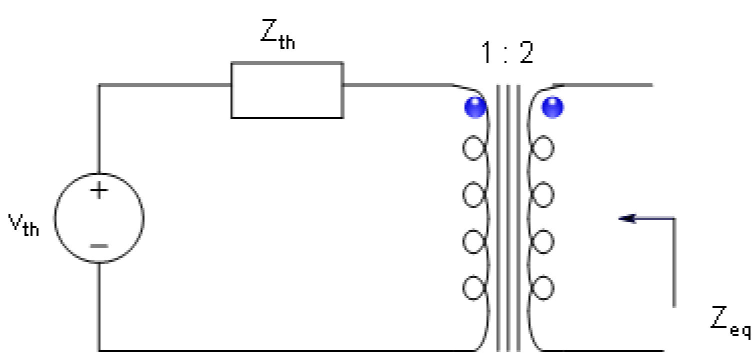
Kcl 1: $i_1 + 4i_1 = i_{sc} \rightarrow 5i_1 = i_{sc}$ (1)

Kvl 1: $v_1 + 0 + j = 0 \rightarrow v_1 = -j \rightarrow i_1 = -j$ (2)

(1),(2) $\rightarrow i_{sc} = -5j$

$Z_{th} = \frac{v_{th}}{i_{sc}} = \frac{\frac{-j}{2j+1}}{-5j} = \frac{1}{25} - \frac{2}{25}j$

سمت چپ مدار از دو سرab به معادل تونن تبدیل شد که شکل آن به صورت زیر است:



$\frac{Z_{th}}{Z_{eq}} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \rightarrow Z_{eq} = 4Z_{th} = \frac{4}{25} - \frac{8}{25}j$

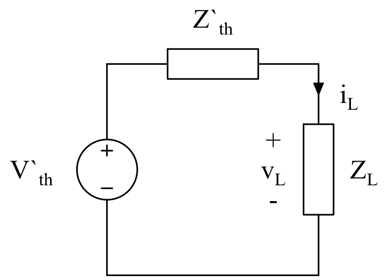
$Z_L = \overline{Z_{eq}}$

$Z_L = \frac{4+8j}{25}$

توانی را که در Z_L مصرف می‌شودنیز محاسبه کنید.

$$Z'_{th} = Z_{eq}$$

$$\frac{v_{th}}{v'_{th}} = \frac{1}{2} \rightarrow v'_{th} = 2v_{th} = \frac{-2j}{1+2j}$$



از رابطه تقسیم ولتاژ داریم:

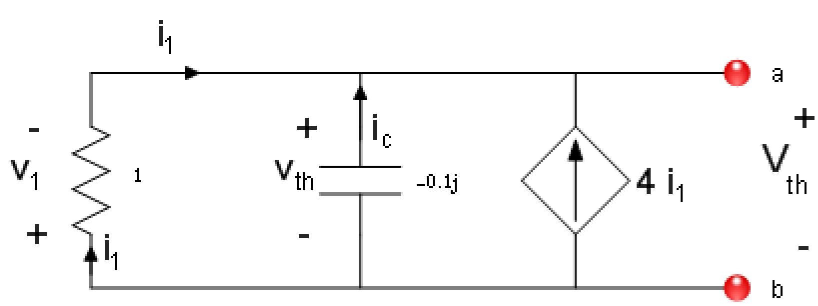
$$v_L = \frac{Z_L}{Z_L + Z'_{th}} \times v'_{th} = \frac{\frac{4+8j}{25}}{\frac{8}{25}} \times \left(\frac{-2j}{1+2j}\right) = -j$$

$$i_L = \frac{v_L}{z_L} = \frac{-j}{\frac{4+8j}{25}} = -2/5 - 1/25\, j$$

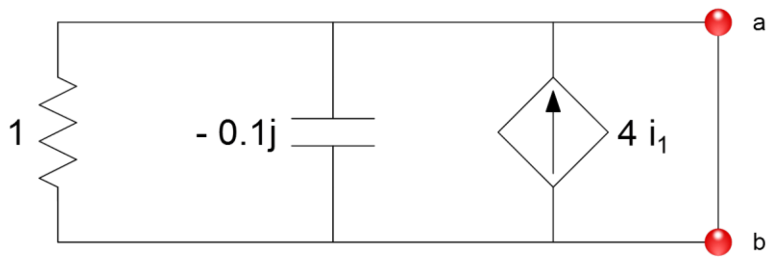
$$S = \frac{1}{2} v_L\, i^*_L = \frac{1}{2} (-j)(-2/5 + 1/25\, j) = \frac{5}{4} j + \frac{5}{8}$$

$$p_{av} = \frac{5}{8}(w) \quad , \quad Q = \frac{5}{4} \ (VAR)$$

مثال۹) در مدار زیر معادل تونن را از دوسر ab به دست آورید.



در این مدار داریم $i_{sc}=0$ و $v_{th}=0$ زیرا هنگامی که مدار فاقد منابع مستقل باشد، ولتاژ و جریان تمام شاخه-ها برابر صفر است.



$$i_{sc}=4i_1=0$$

$$Z_{th}=\frac{v_{th}}{i_{sc}}=\frac{0}{0}$$ مبهم

برای محاسبه Z_{th} باید رفع ابهام کرد، از نظر مدار رفع ابهام یعنی قرار دادن یک منبع مستقل تست در دو سر ab.

روش منبع تست:

در دو سری که می‌خواهیم از آن دو سر معادل تونن به دست آوریم، یک منبع ولتاژ مستقل به نام V_T با جریان نامتناظر I_T قرار می‌دهیم. (روش دیگر قرار دادن یک منبع جریان مستقل با مقدار I_T و ولتاژ نامتناظر V_T است.) اگر مانند یک مدار ساده روابط kcl و kvl را برای آن بنویسیم، با حل معادلات به رابطه زیر می‌رسیم:

$$V_T = AI_T + B$$

ضریب $I_T(A)$ همان Z_{th} و مقدار B همان v_{th} است.

نکته: روش منبع تست روشی است که در تمامی مدارها استفاده از آن مجاز است .

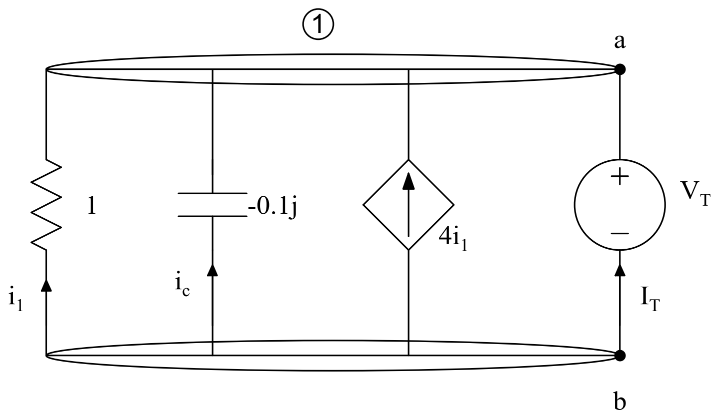
نکته: وقتی در حوزه فازور مدار فاقد منبع مستقل باشد، یا وقتی در حوزه زمان مدار ساده فاقد منبع مستقل باشد باید برای به دست آوردن معادل تونن یا معادل نورتن از روش منبع تست استفاده کنیم. هم چنین اگر مدار هم منابع مستقل و هم منابع وابسته داشته باشد، روش منبع تست سرعت بیشتری به حل ما می‌دهد. در مدارهای تزویج نیز که فصل بعد با آن‌ها آشنا می‌شویم در صورت نیاز به محاسبه معادل تونن یا معادل نورتن باید از روش منبع تست استفاده کنیم.

نکته: در مدارهایی که فقط منابع مستقل داریم، روش منبع تست نیز صحیح است اما اگر از روش زیر استفاده کنیم مسئله سریع‌تر حل خواهد شد:

روش محاسبه Z_{th} برای مدارهای فاقد منابع وابسته:

برای به دست آوردن Z_{th} منابع مستقل را غیر فعال می‌کنیم. امپدانسی که از دو سر مورد نظر مشاهده می‌شود همانZ_{th}است. مجددا با احتساب منابع مستقل، ولتاژ دو سر مورد نظر که همان v_{th} است را نیز محاسبه می-کنیم.

به حل سوال قبل باز می‌گردیم:

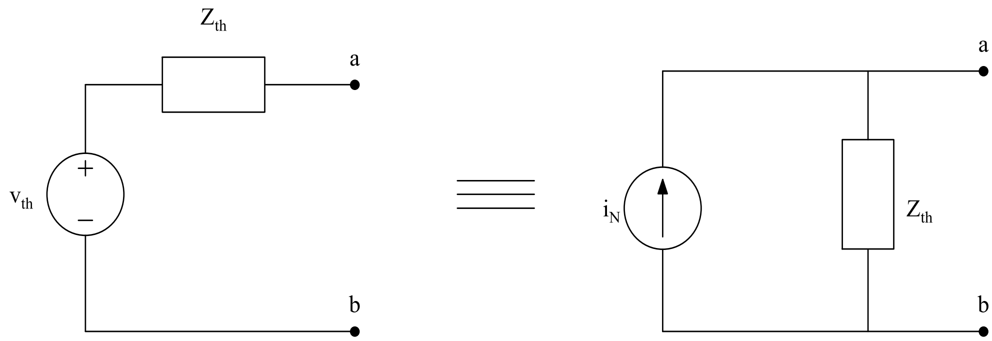


Kcl 1: $i_1 + i_c + 4i_1 + I_T = 0 \;\rightarrow\; -5V_T - 10jV_T + I_T = 0 \;\rightarrow\; (5 + 10j)V_T = I_T$

$\rightarrow V_T = \left(\frac{1}{5+10j}\right) I_T \rightarrow\; Z_{th} = \frac{1}{5+10j}$

نکته:

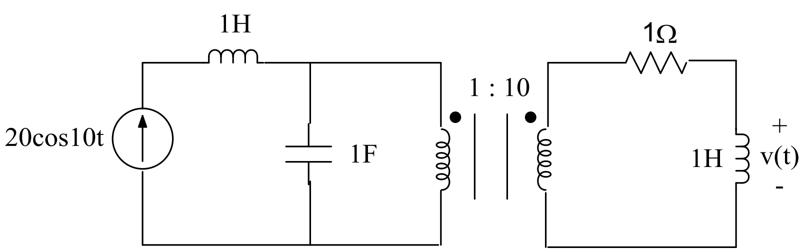
معادل نورتن: از هر دوسر دلخواه می‌توان به جای معادل تونن مدار، معادل نورتن را قرار داد. به این کار تبدیل منابع می‌گویند.معادل نورتن یعنی قرار دادن یک منبع جریان با یک امپدانس موازی به صورت زیر :



$$\boldsymbol{i_N = \frac{v_{th}}{Z_{th}}}$$

مثال۱۰)

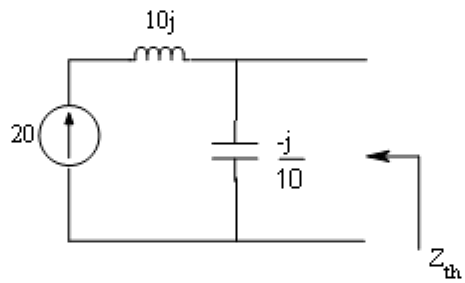
در مدار شکل زیر ولتاژ v(t) را به دست آورید.

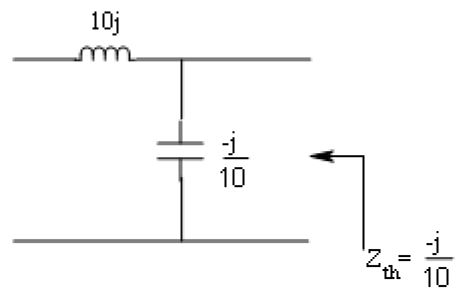


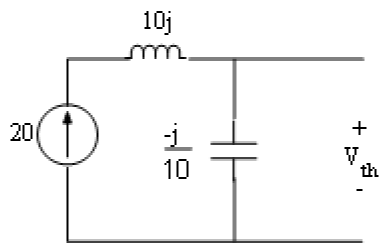
رسم مدار در حوزه فازور:

برای حل مسائل ترانس دار، باید طرف معلوم را به طرف مجهول انتقال دهیم و خواسته مسئله را به دست آوریم. در این سوال باید از سمت چپ ترانس معادل تونن یا نورتن گرفته و آن را به سمت راست ترانس انتقال دهیم.

در این مدار به علت این که فقط منبع مستقل داریم، سریع‌ترین راه برای به دست آوردن Z_{th} غیر فعال کردن منبع مستقل است.



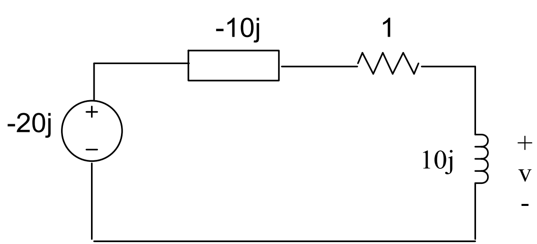




$V_{th} = \frac{-j}{10} \times 20 = -2j$

$\frac{Z_{th}}{Z'_{th}} = \frac{1}{100} \longrightarrow Z'_{th} = 100\ Z_{th} = -10j$

$\frac{V_{th}}{V'_{th}} = \frac{1}{10} \longrightarrow V'_{th} = 10\ V_{th} = -20j$



$v = \frac{10j}{10j - 10j + 1} \times (-20j) = 200$

$v(t) = 200 \cos (10t)$

تمرین‌های حل شده

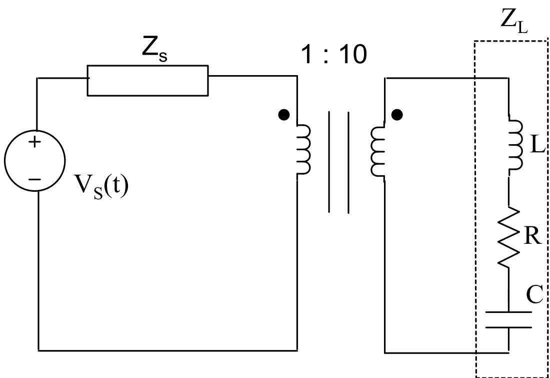
فصل چهارم

۱) اگر $R = 100\ \Omega$ ، $L = 1\ H$ و $c = 2\ mF$ باشد، مطلوب است:

الف) محاسبه امپدانس Z_s به نحوی که حداکثر توان متوسط به امپدانس بار (Z_L) تحویل گردد.

ب) نوع و اندازه المان‌های تشکیل دهنده Z_s را تعیین کنید.

ج) حداکثر توان متوسط دریافتی توسط امپدانس بار (Z_L) چه قدر است؟



$V_S(t) = 2\cos(50t)$

الف) مقادیر سلف و خازن را به حوزه فازور برده و آنها را با مقاومت سری می‌کنیم و امپدانس بار را به دست می‌آوریم:

$$Z_L = 100 + (50j) + \left(\frac{-j}{10^{-1}}\right) = 100 + 50j - 10j = 100 + 40j$$

$$\frac{Z_s}{Z'_s} = \frac{1}{100} \rightarrow Z'_s = 100\, Z_s \quad (1)$$

$$Z_L = Z'^{*}_s = 100 + 40j \rightarrow Z'_s = 100 - 40j \quad (2)$$

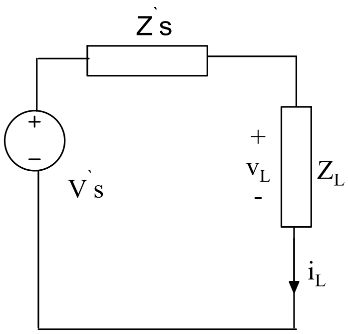
$$(1),(2) \rightarrow Z_s = 1 - \frac{4}{10} j$$

ب)

$$-\frac{4}{10} j = \frac{-j}{\omega c} \rightarrow -\frac{4}{10} j = \frac{-j}{50c} \rightarrow C = 0/05\ F$$

مقاومت با مقدار $R = 1\ \Omega$ سری شده با خازن به مقدار $C = 0/05\ F$

ج)



$$V_s = 2$$

$$\frac{V_s}{V'_s} = \frac{1}{10} \rightarrow V'_s = 10\ V_s = 20$$

$$V_L = \frac{Z_L}{Z_L + Z'_s} \times V'_s = \frac{100+40j}{200} \times 20 = 10 + 4j$$

$$i_L = \frac{V_L}{Z_L} = \frac{10+4j}{10\,(10+4j)} = 0/1$$

$$S_{Load} = \frac{1}{2}\,(10 + 4j)\,(0/1) = 0/5 + 0/2j$$

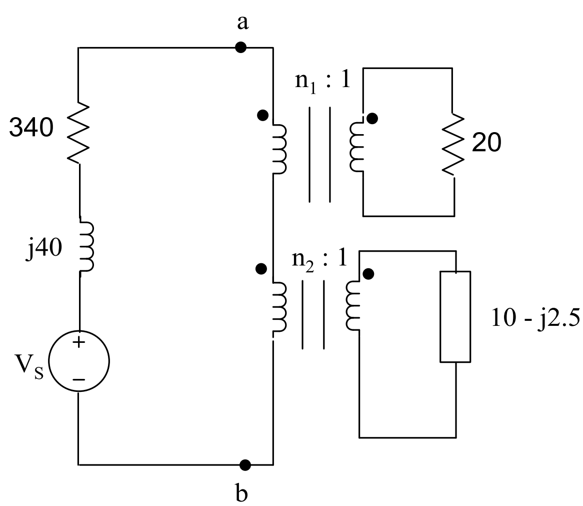
توان متوسط $= P = 0/5$ w

۲) در مدار فازوری شکل زیر ترانسفورماتورها ایده‌آل فرض می‌شوند.

الف) نسبت دورهای n_1 و n_2 را به گونه‌ای تعیین کنید که حداکثر توان حقیقی (متوسط) در سرهای a و b جذب شود.

ب) در این شرایط توان حقیقی که منبع تحویل می‌دهد را به‌دست آورید.

(مقاومت‌ها و امپدانس‌ها بر حسب اهم)



$V_S = 170 < 0$ v(rms)

الف)

$Z_{th}\ a,b = 340 + 40j \rightarrow Z^*_{th}\ a,b = 340 - 40j$

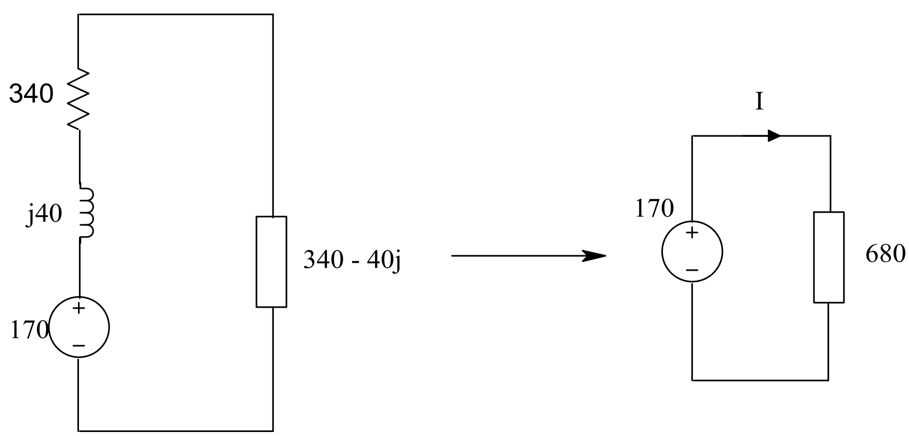
$\frac{20}{Z_1} = \frac{1}{{n_1}^2} \rightarrow z_1 = 20\,{n_1}^2$

$\frac{10 - 2/5\,j}{Z_2} = \frac{1}{{n_2}^2} \rightarrow z_2 = 10{n_2}^2 - 2/5j{n_2}^2$

$z_1 + z_2 = Z^*_{th}\ a,b \rightarrow (20{n_1}^2 + 10{n_2}^2) - 2/5j{n_2}^2 = 340 - 40j$

$$\rightarrow \begin{cases} 2/5{n_2}^2 = 40 \rightarrow {n_2}^2 = 16 \rightarrow n_2 = 4 \\ 20{n_1}^2 + 10{n_2}^2 = 340 \rightarrow 20{n_1}^2 + 160 = 340 \rightarrow {n_1}^2 = 9 \rightarrow n_1 = 3 \end{cases}$$

ب)



$I = \frac{170}{680} = 0/25\ A$

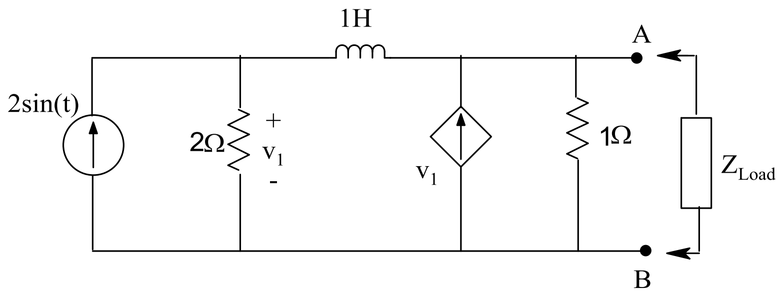
$S_{\text{منبع}} = -VI^* = -170 \times 0/25 = -42/5$

$P_{\text{تحویلی}} = -42/5\ w$

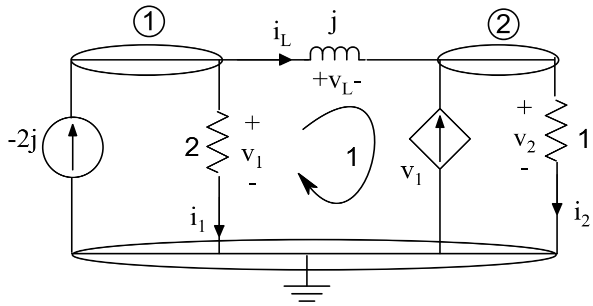
۳) در مدار شکل زیر:

الف) توان متوسط تلف شده توسط مقاومت ۲Ω را بدست آورید.

ب) اگر به دو سر A و B امپدانس بار Z_{Load} وصل شود، مقدار امپدانس بار را به نحوی تعیین کنید که توان حداکثر به آن اتقال یابد. اجزاء امپدانس بار Z_{Load} را مشخص کنید.



الف) رسم مدار در حوزه فازور:



Kcl 1: $-2j = i_1 + i_L$ (1)

Kvl 1: $v_L + v_2 - v_1 = 0 \rightarrow ji_L + i_2 - 2i_1 = 0$ (2)

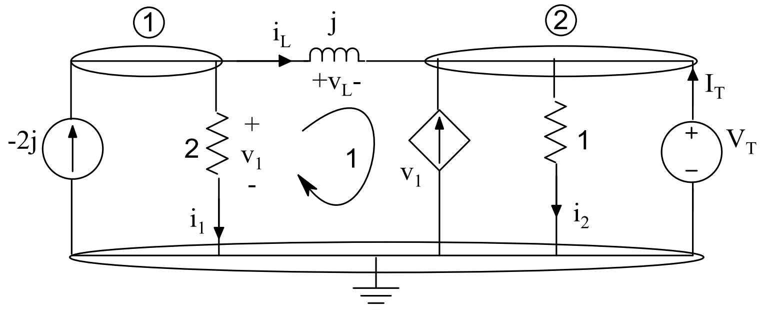
Kcl 2: $i_L + v_1 = i_2 \rightarrow i_L + 2i_1 = i_2$ (3)

$(1),(2),(3) \rightarrow i_1 = -2j$

$v_1 = (2)(-2j) = -4j$

$P = 1/2\,(-4j)(2j) = 4$

ب) استفاده از منبع تست



Kcl 1: $-2j = i_1 + i_L \rightarrow -2j = \frac{v_1}{2} + (\frac{v_L}{j})$ (1)

Kcl 2: $i_L + v_1 + I_T = i_2 \rightarrow \frac{v_L}{j} + v_1 + I_T = V_T$ (2)

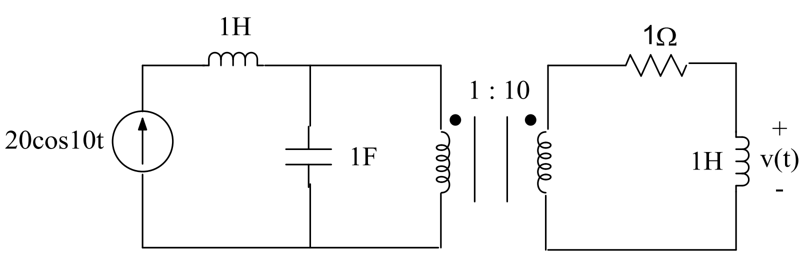
Kvl 1: $v_L + V_T - v_1 = 0$ (3)

$(1),(2),(3) \rightarrow V_T = (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}j)\, I_T - 4j$

$Z_{th} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j$

$Z_L = Z^*_{th} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j$

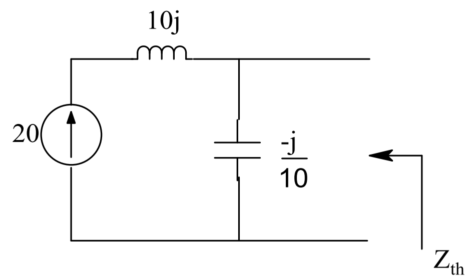
۴) در مدار شکل زیر ولتاژ $v_c(t)$ را به دست آورید.

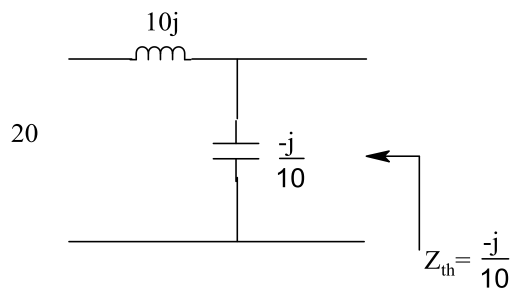


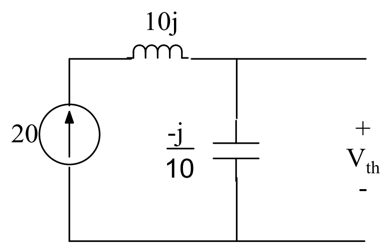
رسم مدار در حوزه فازور:

برای حل مسائل ترانس دار، باید طرف معلوم را به طرف مجهول انتقال دهیم و خواسته مسئله را به دست آوریم.

در این سوال باید از سمت چپ ترانس معادل تونن گرفته و آن را به سمت راست ترانس انتقال دهیم.



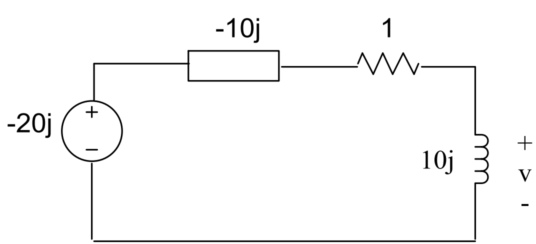




$V_{th} = \frac{-j}{10} \times 20 = -2j$

$\frac{Z_{th}}{Z'_{th}} = \frac{1}{100} \rightarrow Z'_{th} = 100\, Z_{th} = -10j$

$\frac{V_{th}}{V'_{th}} = \frac{1}{10} \rightarrow V'_{th} = 10\, V_{th} = -20j$



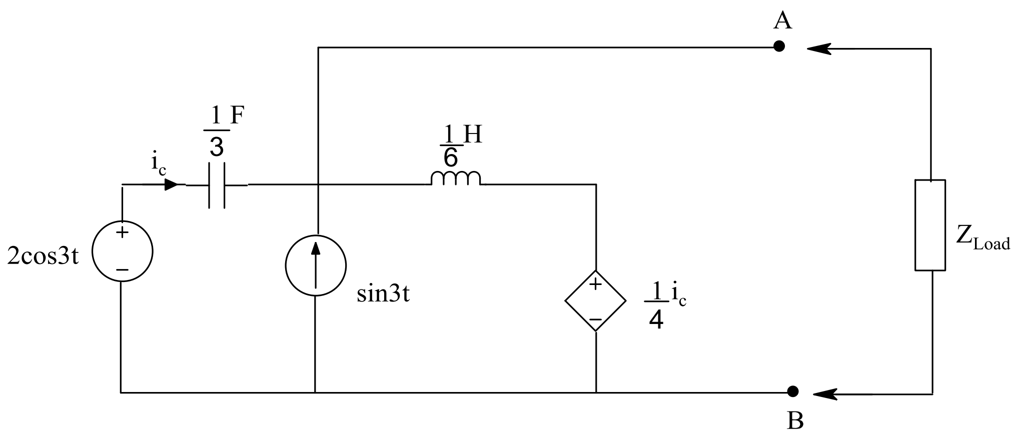
$v = \frac{10j}{10j-10j+1} \times (-20j) = 200$

$v(t) = 200 \cos(10t)$

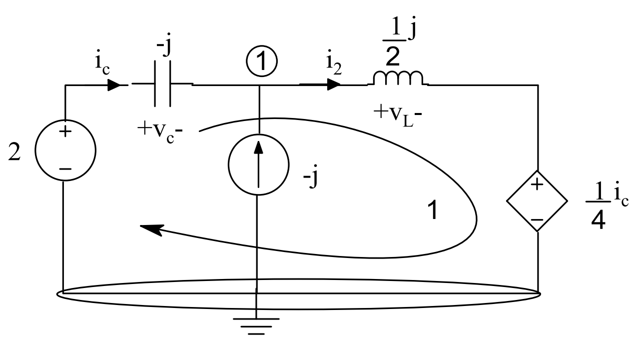
۵) در مدار شکل زیر:

الف) توان متوسط تلف شده در منبع ولتاژ وابسته را بدست آورید.

ب) اگر به دو سر A و B امپدانس بار Z_{Load} وصل شود، مقدار امپدانس بار را به نحوی تعیین کنید که حداکثر توان متوسط به آن انتقال یابد.



الف) رسم مدار در حوزه فازور:



Kcl 1: $i_c - j = i_2$ (1)

Kvl 1: $v_c + v_L + \frac{1}{4} i_c - 2 = 0 \;\rightarrow\; -ji_c + \frac{1}{2} ji_2 + \frac{1}{4} i_c - 2 = 0$

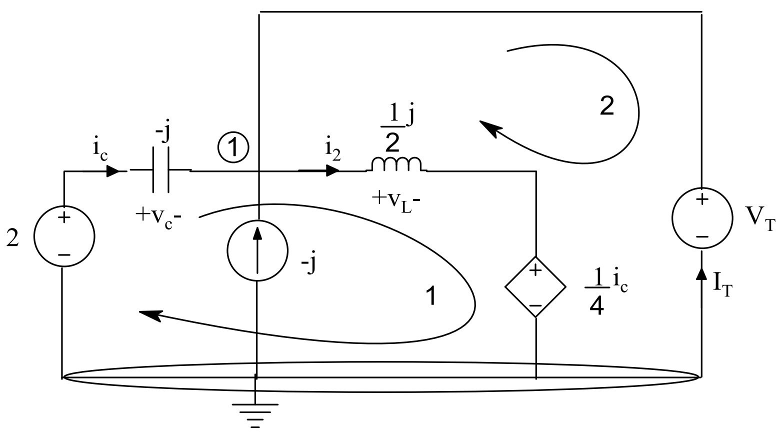
$\rightarrow\; (\frac{1}{4} - j)\, i_c + \frac{1}{2} ji_2 = 2$ (2)

(1),(2) $\rightarrow$ $i_c = 1/2 + 2/4\, j$, $i_2 = 1/2 + 1/4\, j$

$S_{\text{منبع وابسته}} = \frac{1}{2} (\frac{1}{4} i_c) i^*_2 = 0/6 + 0/15\, j$

$\rightarrow P_{av} = 0/6$

ب) برای حل این قسمت ، منبع تست را به مدار اضافه می‌کنیم:



Kcl 1: $i_c - j + I_T = i_2$ (1)

Kvl 1: $v_c + v_L + \frac{1}{4} i_c - 2 = 0 \rightarrow -ji_c + \frac{1}{2} ji_2 + \frac{1}{4} i_c - 2 = 0$

$\rightarrow (\frac{1}{4} - j) i_c + \frac{1}{2} ji_2 = 2$ (2)

Kvl 2: $V_T - \frac{1}{4} i_c - v_L = 0 \rightarrow V_T - \frac{1}{4} i_c - \frac{1}{2} ji_2 = 0$ (3)

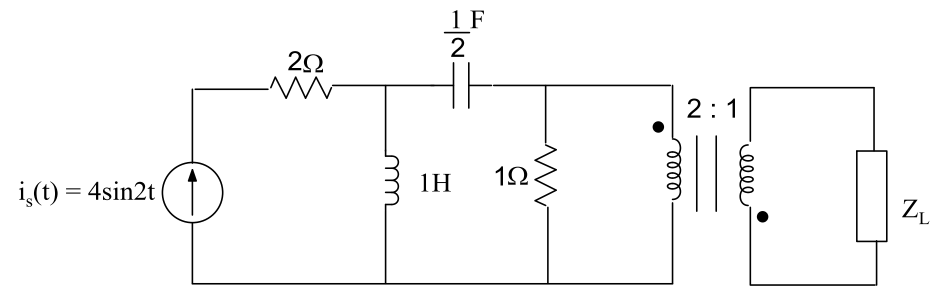
(1),(2),(3) $\rightarrow V_T = (\frac{3}{4} j) I_T + \frac{5}{4}$

$\rightarrow Z_{th} = \frac{3}{4} j \rightarrow Z_L = z^*_{th} = - \frac{3}{4} j$

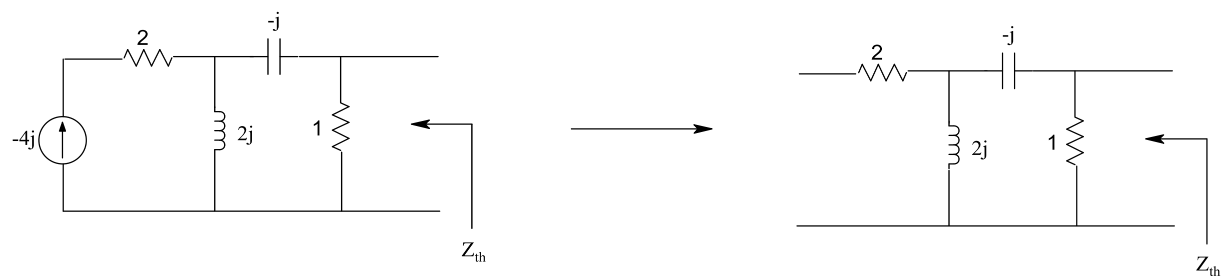
۶) در مدار شکل زیر:

الف) Z_L را طوری بیابید که بیشترین توان حقیقی (متوسط) در آن جذب شود.

ب) با مقدار Z_L بدست آمده در قسمت الف توان مختلط منبع جریان i_s را بدست آورید.



الف) باید Z_{th} سمت چپ ترانس را بیابیم و آن را به سمت راست منتقل نماییم. برای این کار بعد از بردن مقادیر به حوزه فازور باید منابع مستقل را غیر فعال کنیم و Z_{th} را محاسبه کنیم.



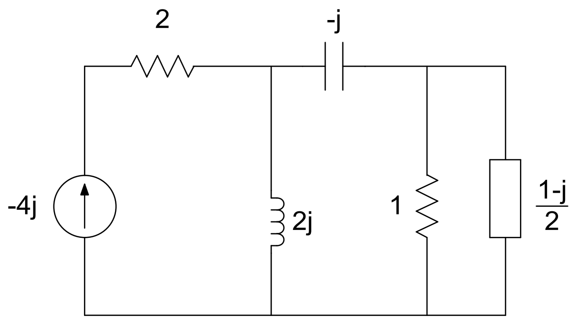
$Z_{th} = (2j - j) \parallel (1) = \frac{j}{1+j} = \frac{1+j}{2}$

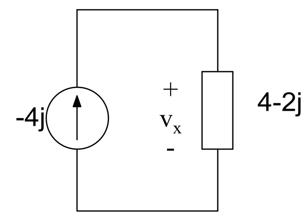
$\frac{Z'_{th}}{Z_{th}} = \frac{1}{4} \rightarrow Z'_{th} = \frac{Z_{th}}{4} = \frac{1+j}{8}$

$Z_L = Z^{*\prime}_{th} = \frac{1-j}{8}$

ب)

$\frac{Z_L}{Z'_L} = \frac{1}{4} \rightarrow Z'_L = 4Z_L = \frac{1-j}{2}$





$v_x = (4-2j)(-4j) = -8-16j$

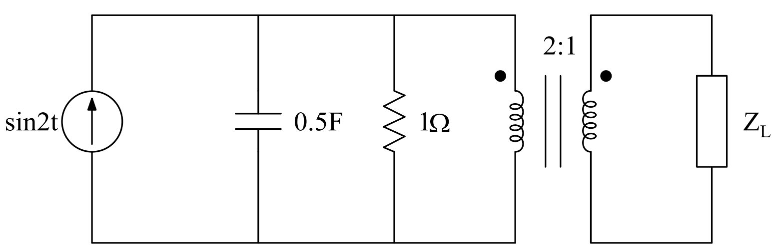
$S_{\text{منبع}} = \frac{-1}{2}(-8-16j)(4j) = -32+16j$

۷) مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است.

الف) Z_L را چنان تعیین کنید که حداکثر توان به آن انتقال یابد.

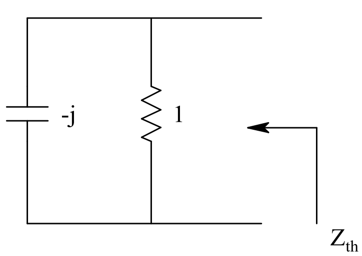
ب) ساده‌ترین ترکیب عناصر تشکیل دهنده Z_L را محاسبه کنید.

ج) توان مختلط منبع را محاسبه نمایید.



الف) رسم مدار در حوزه فازور:

چون مدار منبع وابسته ندارد، منبع مستقل را غیرفعال می‌کنیم:



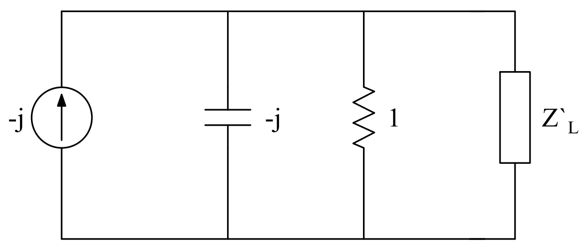
$Z_{th} = (-j)||(1) = \frac{-j}{1-j} = \frac{1-j}{2}$

$\frac{Z_{th}}{Z'_{th}} = 4 \rightarrow Z'_{th} = \frac{1}{4} Z_{th} = \frac{1-j}{8}$

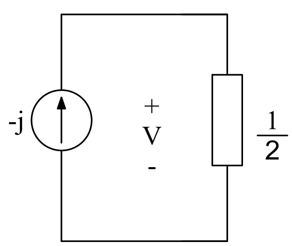
$Z_L = Z^{*}{}'_{th} = \frac{1+j}{8}$

ب) Z_L از یک مقاومت به مقدار $\frac{1}{8}\,\Omega$، سری با یک سلف به مقدار $\frac{1}{16}$ H تشکیل شده است.

ج)



$\frac{Z_L}{Z'_L} = \frac{1}{4} \rightarrow Z'_L = 4Z_L = \frac{1+j}{2}$

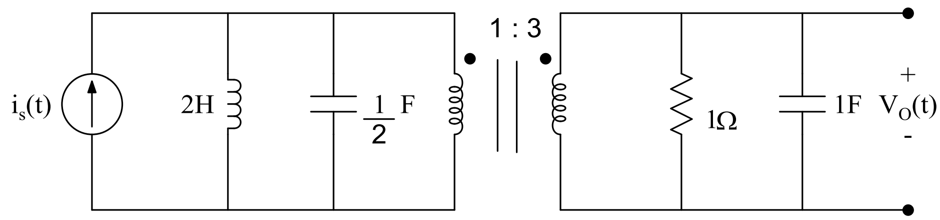


$Z_c \parallel Z'_L \parallel R \rightarrow (-j) \parallel (\frac{1+j}{2}) (1) = \frac{1}{2}$

$V = (-j)(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} j$

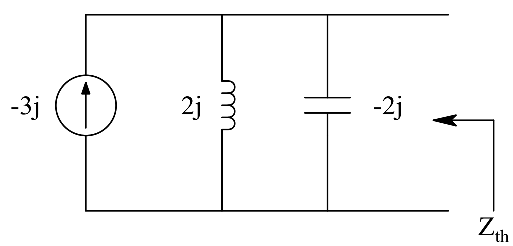
$S_{\text{منبع}} = \frac{1}{2} (-\frac{1}{2} j)(+j) = \frac{1}{4}$

۸) مدار زیر به حالت دائمی (ماندگار) رسیده است. مطلوب است محاسبه ولتاژ $V_O(t)$:

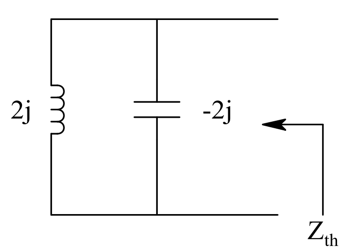


$i_s(t) = 3\sin(t)$ A

رسم مدار در حالت فازور:



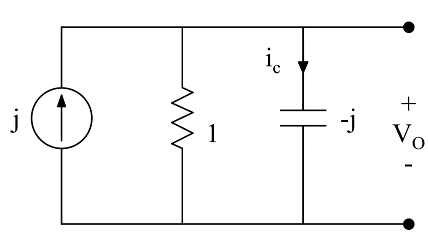
چون منبع وابسته نداریم، منبع مستقل را غیرفعال می‌کنیم:



$Z_{th} = \frac{2j \times(-2j)}{2j-2j} = \infty$

پس فقط منبع جریان به سمت راست منتقل می‌شود:

$\frac{i_s}{i_N} = -n \rightarrow \frac{-3j}{i_N} = -3 \rightarrow i_N = j$



$i_c = \frac{1}{1-j} \times j = \frac{j}{1-j} = \frac{-1+j}{2}$

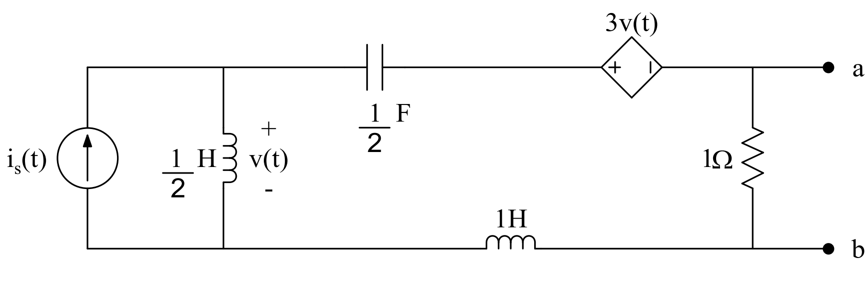
$V_O = -j\left(\frac{-1+j}{2}\right) = \frac{j+1}{2}$

$V_O(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

۹) مدار زیر در حالت دائمی (ماندگار) قرار دارد.

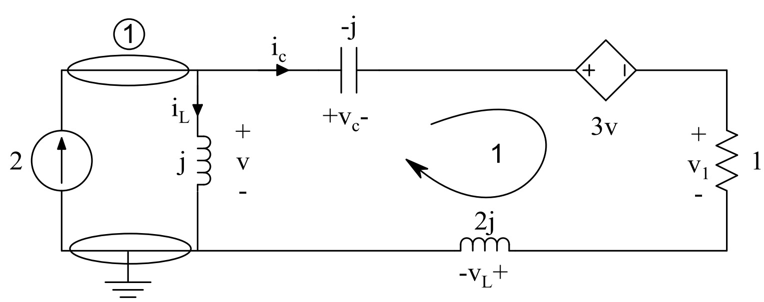
الف) توان متوسط تلف شده در مقاومت یک اهمی را محاسبه نمایید.

ب) اگر به دو سر a,b امپدانس بار Z_L وصل شود، مقدار امپدانس بار را به نحوی تعیین کنید که حداکثر توان متوسط به آن انتقال یابد.



$i_s(t) = 2\cos 2t$ A

الف) رسم مدار در حالت فازور:



Kcl ۱: $2 = i_L + i_c \quad (1)$

Kvl 1: $v_c + 3v + v_1 + v_L - v = 0 \rightarrow -ji_c + 2ji_L + i_c + 2ji_c = 0$

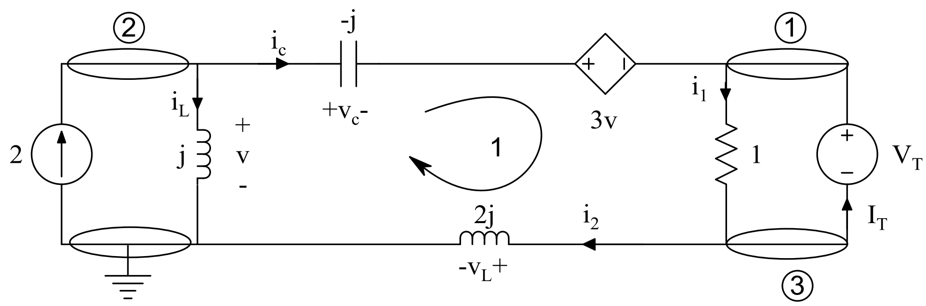
$\rightarrow (j+1)\, i_c + 2ji_L = 0 \quad (2)$

$(1),(2) \;\rightarrow\; i_c = 2-2j$

$V_1 = i_c = 2-2j$

$S_{\text{مقاومت}} = \frac{1}{2}\,(2-2j)(2+2j) = 4 \;\rightarrow\; P_{av} = 4\ w$

ب)



Kcl 1 : $\quad i_c + I_T = i_1 \quad (1)$

Kcl 2: $\quad 2 = i_L + i_c \quad (2)$

Kcl 3: $\quad i_1 = I_T + i_2 \;\rightarrow\; V_T = I_T + i_2 \quad (3)$

Kvl 1: $\quad v_c + 3v + V_T + v_L - v = 0 \;\rightarrow\; -ji_c + 2ji_L + V_T + 2ji_2 = 0 \quad (4)$

$(1),(2),(3),(4) \;\rightarrow V_T = (\,0/5 - 0/5j\,)\, I_T + (\,2 - 2j\,)$

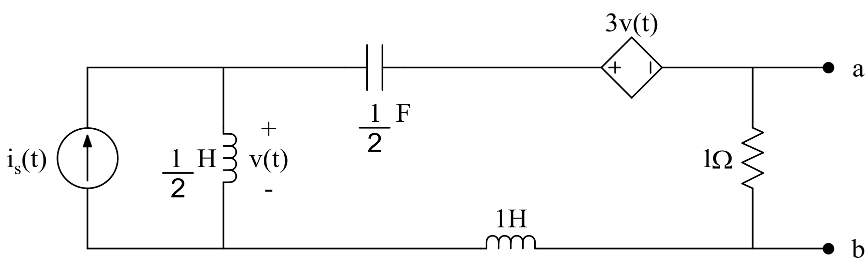
$Z_{th} = 0/5 - 0/5j$

$Z_L = Z^{*}_{th} = 0/5 + 0/5j$

۱۰) مدار زیر در حالت دائمی (ماندگار) قرار دارد.

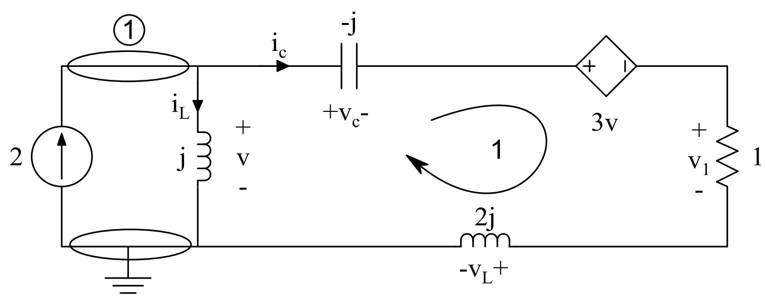
الف) توان متوسط تلف شده در مقاومت یک اهمی را محاسبه نمایید.

ب) اگر به دو سر a,b امپدانس بار Z_L وصل شود، مقدار امپدانس بار را به نحوی تعیین کنید که حداکثر توان متوسط به آن انتقال یابد.



$i_s(t) = 2\cos 2t$ A

الف) رسم مدار در حالت فازور:



Kcl ۱: $2 = i_L + i_c$ (1)

Kvl 1: $v_c + 3v + v_1 + v_L - v = 0 \rightarrow -ji_c + 2ji_L + i_c + 2ji_c = 0$

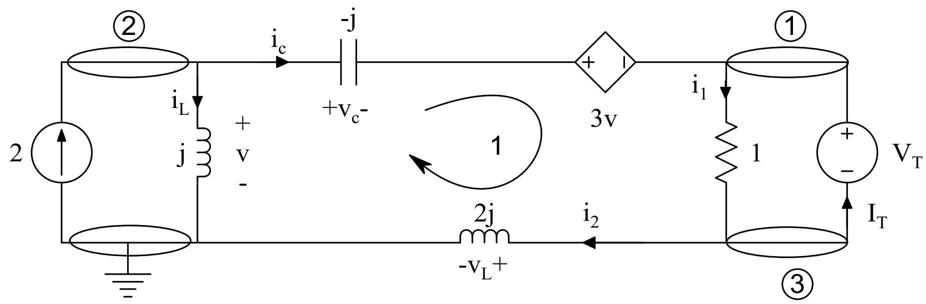
$\rightarrow (j+1)\, i_c + 2ji_L = 0$ (2)

(1),(2) $\rightarrow i_c = 2-2j$

$V_1 = i_c = 2-2j$

$S_{\text{مقاومت}} = \frac{1}{2}(2-2j)(2+2j) = 4 \rightarrow P_{av} = 4$ w

ب)



Kcl 1 : $i_c + I_T = i_1$ (1)

Kcl 2: $2 = i_L + i_c$ (2)

Kcl 3: $i_1 = I_T + i_2 \rightarrow V_T = I_T + i_2$ (3)

Kvl 1: $v_c + 3v + V_T + v_L - v = 0 \rightarrow -ji_c + 2ji_L + V_T + 2ji_2 = 0$ (4)

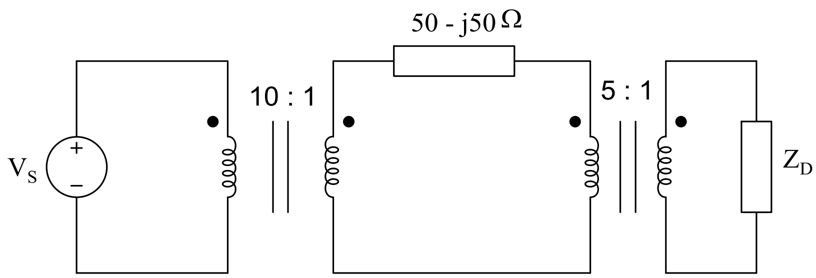
(1),(2),(3),(4) $\rightarrow V_T = (0/5 - 0/5j)\, I_T + (2 - 2j)$

$Z_{th} = 0/5 - 0/5j$

$Z_L = Z^*_{th} = 0/5 + 0/5j$

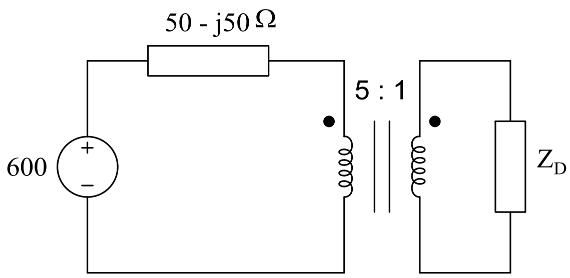
۱۱) مدار در حالت دائم (ماندگار) سینوسی قرار دارد و ترانسفورماتورها ایده‌آل هستند. مقدار موثر ولتاژ منبع عبارتست از: $V_s = 6000\angle 0°$ V(rms)

مطلوب است امپدانس Z_D به گونه‌ای که حداکثر توان حقیقی(اکتیو) را جذب کند. حداکثر توان جذب شده توسط این امپدانس را نیز محاسبه نمایید.



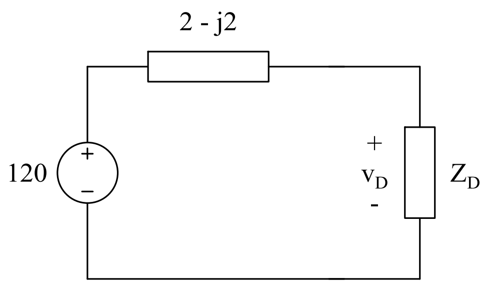
انتقال منبع ولتاژ:

$$\frac{V_{S1}}{V_{S2}} = \frac{10}{1} \rightarrow V_{S2} = \frac{6000}{10} = 600$$



$$\frac{V_{S2}}{V_{S3}} = 5 \rightarrow V_{S3} = \frac{600}{5} = 120$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = 25 \rightarrow Z_2 = \frac{50-50j}{25} = 2 - 2j$$



$$Z_D = z^*_2 \rightarrow Z_D = 2+2j$$

$$v_D = \frac{2+2j}{2+2j+2-2j} \times 120 = \frac{2+2j}{4} \times 120 = 60 + 60j$$

$$i_D = \frac{v_D}{Z_D} = \frac{60+60j}{2+2j} = 30$$

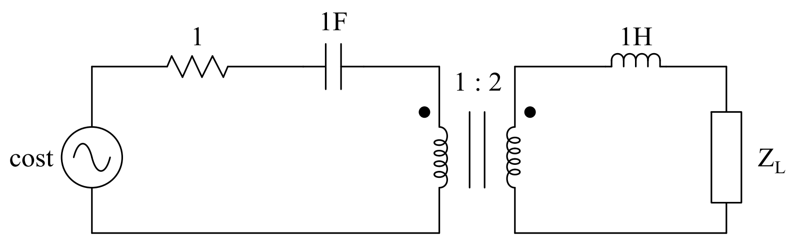
$$S = v_D\, i^*_D = (60 + 60j)(30) = 1800 + 1800\,j$$

$$\rightarrow P = 1800 \text{ w}$$

۱۲) در مدار زیر، Z_L که شامل عناصر اهمی و اکتیو است را به گونه‌ای بیابید که:

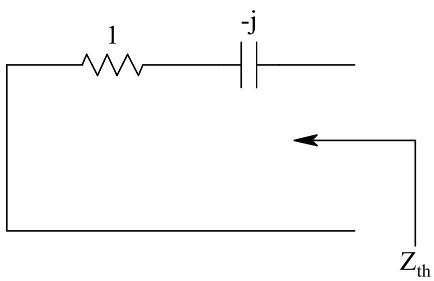
الف) حداکثر توان به بخش اهمی آن انتقال یابد.

ب) تحت حالت الف، توان ظاهری منبع و دو سر مقاومت ۱ اهمی را محاسبه نمایید.



الف) رسم مدار در حوزه فازور:

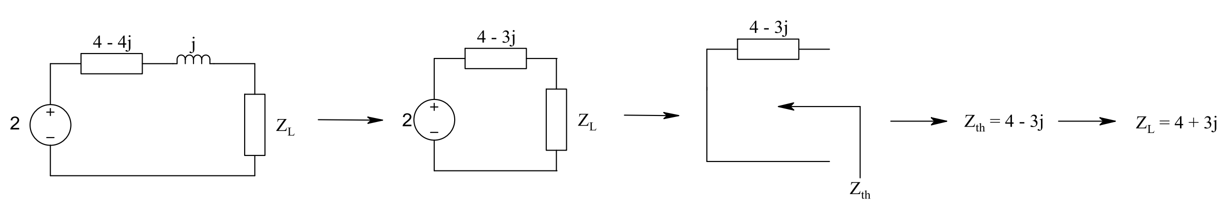
چون منبع وابسته نداریم، منبع مستقل را غیر فعال کرده و معدل تونن سمت چپ ترانس را می‌یابیم.



$Z_{th} = 1 - j \quad , V_{th} = 1$

$\frac{Z_{th}}{Z'_{th}} = \frac{1}{4} \rightarrow Z'_{th} = 4\, Z_{th} = 4 - 4j$

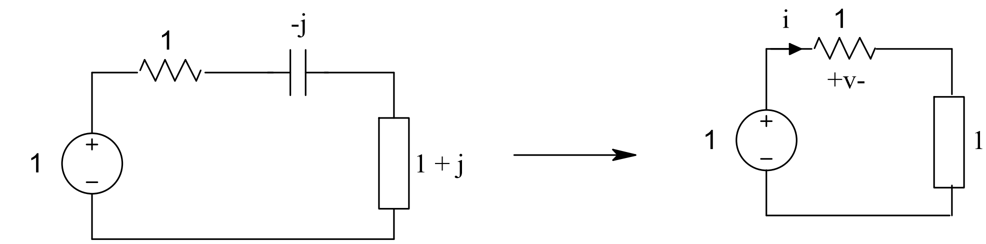
$\frac{V_{th}}{V'_{th}} = \frac{1}{2} \rightarrow V'_{th} = 2\, V_{th} = 2$



ب) امپدانس سمت راست مدار (Z_2) را به سمت چپ انتقال داده و موارد خواسته شده را محاسبه می‌نماییم.

$Z_2 = Z_L + j = 4 + 4j$

$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{4}{1} \rightarrow Z_1 = \frac{4+4j}{4} = 1 + j$



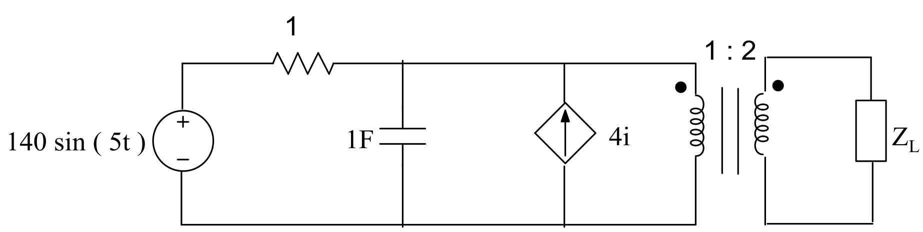
$v = \frac{1}{1+1} \times 1 = \frac{1}{2}$

$i = \frac{v}{1} = \frac{1}{2}$

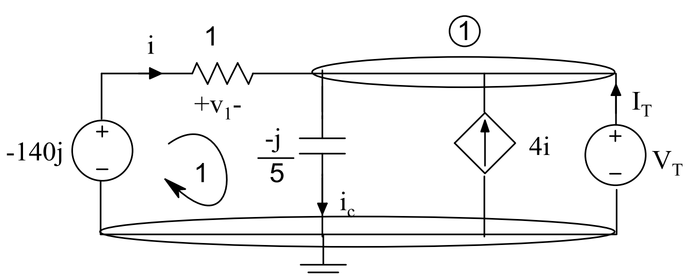
$S_{\text{منبع}} = \frac{-1}{2} (1) (\frac{1}{2}) = \frac{-1}{4}$

$S_{\text{مقاومت}} = \frac{1}{2} (\frac{1}{2}) (\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$

۱۳) مدار زیر در حالت دائمی سینوسی بوده و ترانسفورماتور ایده‌آل است، امپدانس Z_L را به گونه‌ای محاسبه کنید که حداکثر توان به آن انتقال یابد. سپس توان آن را در این حالت محاسبه کنید.



رسم مدار در حوزه فازور و استفاده از منبع تست:



Kcl 1: $i + 4i + I_T = i_c \rightarrow 5i + I_T = i_c$ (1)

$\text{Kvl 1:}\quad v_1 + V_T + 140j = 0 \;\rightarrow\; i + V_T + 140j = 0 \quad (2)$

$i_c = \dfrac{V_T}{\frac{-j}{5}} = \dfrac{-5V_T}{j} \quad (3)$

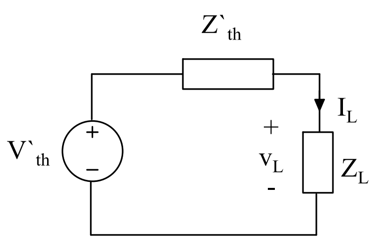
$(1),(2),(3) \;\rightarrow\; V_T = (\,0/1 - 0/1\,j\,)\,I_T + (\,-70 - 70\,j\,)$

$Z_{th} = 0/1 - 0/1\;j \quad , \quad V_{th} = (\,-70 - 70\,j\,)$

$\dfrac{Z_{th}}{Z'_{th}} = \dfrac{1}{4} \;\rightarrow\; Z'_{th} = 4\,Z_{th} = 0/4 - 0/4\,j$

$\rightarrow\; Z_L = 0/4 + 0/4\,j$

$\dfrac{V_{th}}{V'_{th}} = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; V'_{th} = 2\,V_{th} = -140 - 140\,j$

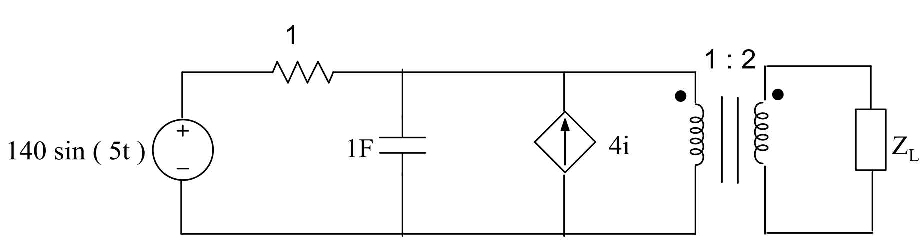


$V_L = \dfrac{0/4 + 0/4\,j}{0/8} \times (\,-140 - 140\,j\,) = -140\,j$

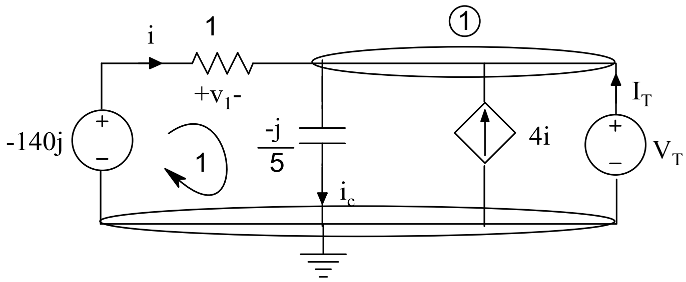
$I_L = \dfrac{V_L}{Z_L} = \dfrac{-140j}{0/4 + 0/4\,j} = -175 - 175\,j$

$S = \dfrac{1}{2}\,V_L I^*_L = \dfrac{1}{2}\,(\,-140\,j\,)\,(\,-175 + 175\,j\,) = 12250 + 12250\,j$

۱۴) مدار زیر در حالت دائمی سینوسی بوده و ترانسفورماتور ایده‌آل است، امپدانس Z_L را به گونه‌ای محاسبه کنید که حداکثر توان به آن انتقال یابد. سپس توان آن را در این حالت محاسبه کنید.



رسم مدار در حوزه فازور و استفاده از منبع تست:



Kcl 1: $i + 4i + I_T = i_c \;\rightarrow\; 5i + I_T = i_c$ (1)

Kvl 1: $v_1 + V_T + 140j = 0 \;\rightarrow\; i + V_T + 140j = 0$ (2)

$i_c = \frac{V_T}{\frac{-j}{5}} = \frac{-5V_T}{j}$ (3)

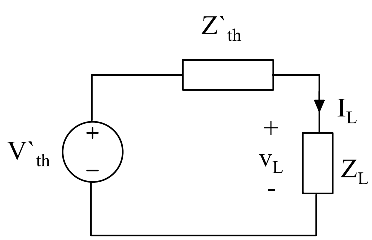
(1),(2),(3) $\rightarrow$ $V_T = (0/1 - 0/1\,j)\,I_T + (-70 - 70\,j)$

$Z_{th} = 0/1 - 0/1\,j \quad , \quad V_{th} = (-70 - 70\,j)$

$\frac{Z_{th}}{Z'_{th}} = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; Z'_{th} = 4\,Z_{th} = 0/4 - 0/4\,j$

$\rightarrow\; Z_L = 0/4 + 0/4\,j$

$\frac{V_{th}}{V'_{th}} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; V'_{th} = 2\,V_{th} = -140 - 140\,j$



$V_L = \frac{0/4 + 0/4\,j}{0/8} \times (-140 - 140\,j) = -140\,j$

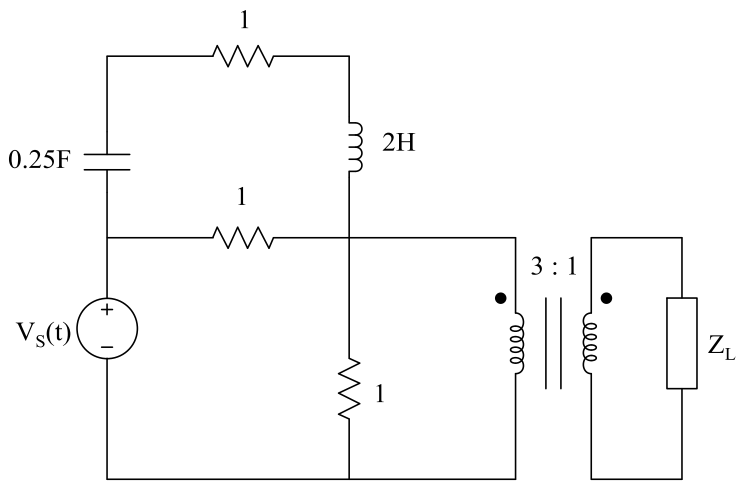
$I_L = \frac{V_L}{Z_L} = \frac{-140j}{0/4 + 0/4\,j} = -175 - 175\,j$

$S = \frac{1}{2} V_L I^*_L = \frac{1}{2}(-140\,j)(-175 + 175\,j) = 12250 + 12250\,j$

۱۵)) در مدار زیر:

الف) مقدار بار Z_L را برای انتقال حداکثر توان به بار حساب کنید.

ب) حداکثر توان انتقالی به بار چه قدر است؟



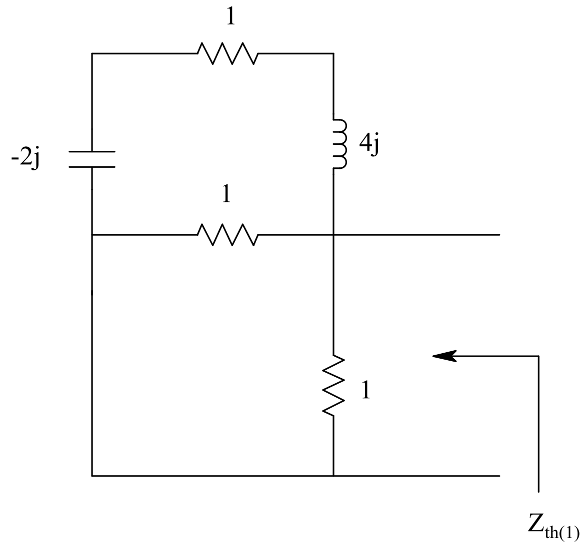
$$V_s(t) = 200\sqrt{2}\ \sin 2t$$

برای سادگی محاسبات مقدار موثر $V_s(t)$ را لحاظ می‌کنیم:

$$V_{s(rms)}(t) = \frac{200\sqrt{2}\ \sin 2t}{\sqrt{2}} = 200\ \sin 2t$$

الف) رسم مدار در حوزه فازور

برای محاسبه Z_L ابتدا Z_{th} سمت چپ ترانس را محاسبه می‌کنیم و سپس آن را به طرف راست ترانس انتقال می‌دهیم. برای محاسبه Z_{th} چون منبع وابسته نداریم منبع مستقل را غیر فعال کرده و آن را می‌یابیم.

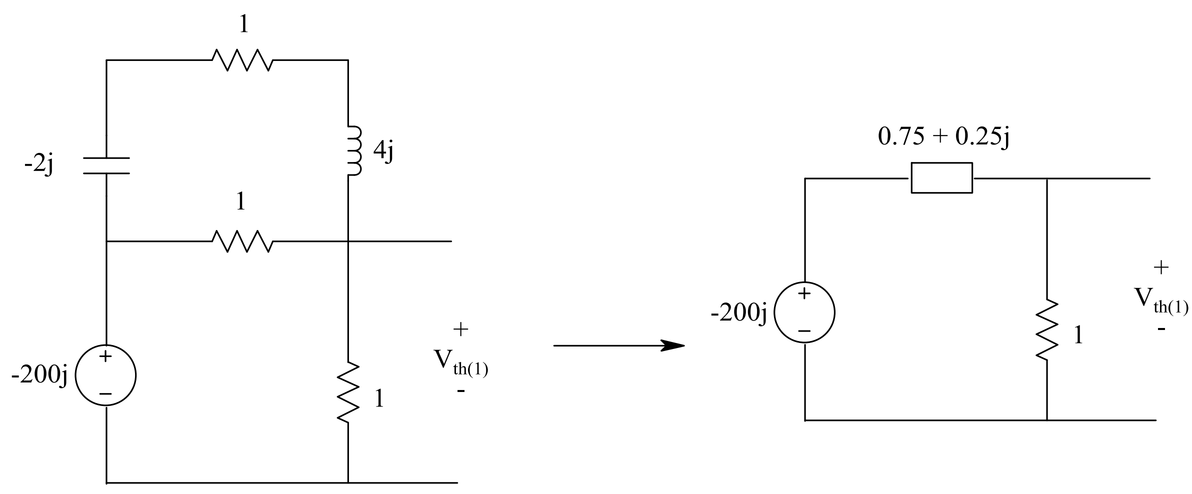


$$Z_{th(1)} = [\,(4j + 1 - 2j) \parallel 1\,] \parallel 1 \;\rightarrow\; Z_{th(1)} = \frac{11+2j}{25}$$

$$\frac{Z_{th(1)}}{Z_{th(2)}} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = 9 \;\rightarrow Z_{th(2)} = \frac{Z_{th(1)}}{9} = \frac{11+2j}{225}$$

$$Z_L = Z^*_{th(2)} = \frac{11-2j}{225}$$

ب) V_{th} سمت چپ ترانس را محاسبه می‌کنیم و معادل تونن سمت چپ ترانس را به سمت دیگر انتقال می‌دهیم.

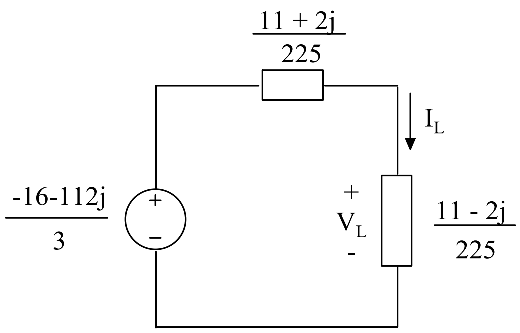


$$V_{th(1)} = \frac{1}{1+0/75+0/25j} \times (-200j) = -16 - 112\,j$$

$$\frac{V_{th(1)}}{V_{th(2)}} = 3 \ \rightarrow \ V_{th(2)} = \frac{-16-112j}{3}$$

از قسمت قبل هم $Z_{th(2)}$ را محاسبه کردیم:

$$Z_{th(2)} = \frac{11+2j}{225}$$



$$\mathrm{V_L} = \frac{\frac{11-2j}{225}}{\frac{11-2j}{225}+\frac{11+2j}{225}} \times \left(\frac{-16-112j}{3}\right) = \frac{\frac{11-2j}{225}}{\frac{22}{225}} \times \left(\frac{-16-112j}{3}\right) = \frac{11-2j}{22} \times \left(\frac{-16-112j}{3}\right) = \frac{-200-600j}{33}$$

$$\mathrm{I_L} = \frac{V_L}{Z_L} = \frac{\frac{-200-600j}{33}}{\frac{11-2j}{225}} = \frac{-45000-135000j}{33-66j} = \frac{15000-15000j}{11}$$

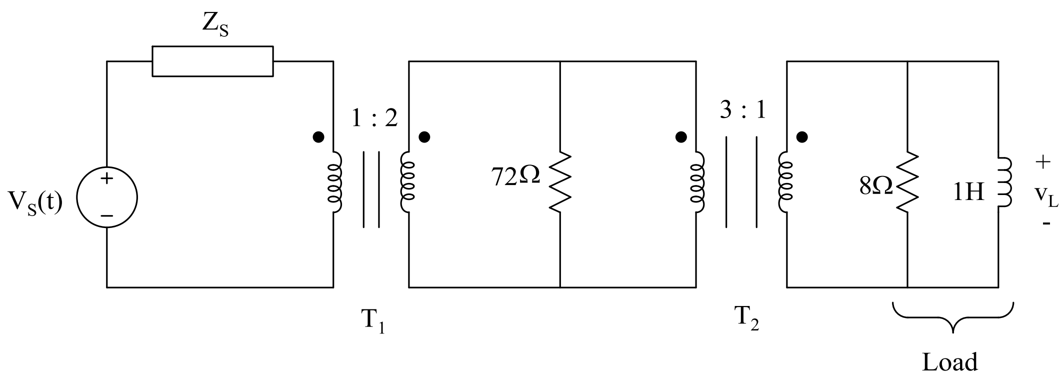
$$\mathrm{S_L} = \mathrm{V_L I^*_L} = \left(\frac{-200-600j}{33}\right)\left(\frac{15000+15000j}{11}\right) = \frac{2000000-4000000j}{121}$$

$\cong 16528/93 - 33057/85j$

۱۶) در مدار زیر مطلوب است:

الف) Z_S را به نحوی مشخص کنید که حداکثر توان به سمت راست ترانس T_1 منتقل شود.

ب) ولتاژ دو سر بار و توان تلفاتی در بار را حساب کنید.



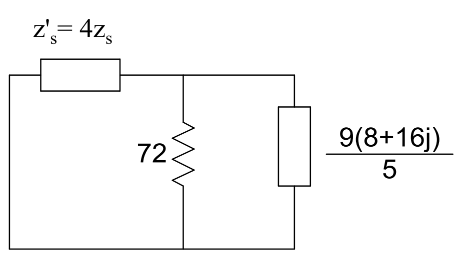
$V_S(t) = 100 \sin(4t + 45°)$

الف) وقتی می‌خواهیم حداکثر توان به سمت راست ترانس T_1 برسد در واقع می‌خواهیم حداکثر توان به دو سر مقاومت ۷۲ اهم برسد. پس امپدانس دیده شده از دوسر سمت راست ترانس T_2 و امپدانس دیده شده از دو سر سمت چپ T_1 را انتقال می‌دهیم.

$$\frac{Z_S}{Z'_S} = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; Z'_S = 4\,Z_S$$

$$Z_{Load} = 8 \parallel 4j = \frac{8+16j}{5}$$

$$\frac{Z_{Load}}{Z'_{Load}} = \frac{1}{9} \rightarrow Z'_{Load} = 9\,Z_{Load} = \frac{9(8+16j)}{5}$$



اکنون امپدانس تونن از دو سر مقاومت ۷۲ اهم را محاسبه می‌کنیم:

$$Z'_S \parallel \frac{9(8+16j)}{5} = \frac{\frac{9(8+16j).4z_S}{5}}{\frac{9(8+16j)+20z_S}{5}} = \frac{4\times 9z_s(8+16j)}{9(8+16j)+20z_s}$$

طبق قضیه حداکثر توان، امپدانس تونن را برابر ۷۲ قرار می‌دهیم:

$$\frac{4\times 9z_s(8+16j)}{9(8+16j)+20z_s} = 72 \rightarrow 4\times 9z_s(8+16j) = 72\times 9(8+16j) + 20z_s$$

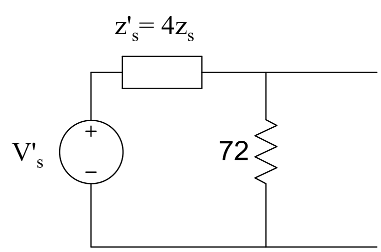
$$\rightarrow z_s = -9j$$

ب) ابتدا سمت چپ ترانس T_1 را به سمت راست آن منتقل می‌کنیم. سپس با احتساب مقاومت ۷۲ اهمی اجزای مدار را به سمت راست ترانس T_2 انتقال می‌دهیم.

$$V_S = -100\, j\, e^{45^\circ} = -100j\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 50\sqrt{2} - 50\sqrt{2}\, j$$

$$V_{S(rms)} = 50 - 50j$$

$$\frac{V_S}{V'_S} = \frac{1}{2} \rightarrow V'_S = 2\, V_S$$



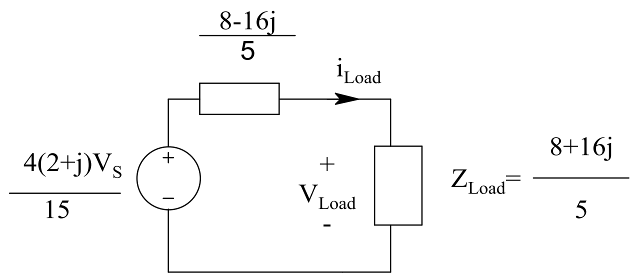
$$Z'_S = 4\, Z_S = -36j$$

$$Z_{th} = 72 \parallel (-36j) = \frac{72-144j}{5}$$

$$V_{th} = \frac{72}{72-36j} \times V'_S = \frac{2}{2-j} \times (2)V_S = \frac{8+4j}{5} V_S$$

$$\frac{Z'_{th}}{Z_{th}} = \frac{1}{9} \rightarrow Z'_{th} = \frac{8-16j}{5}$$

$$\frac{V'_{th}}{V_{th}} = \frac{1}{3} \rightarrow V'_{th} = \frac{4(2+j)}{15} V_s$$



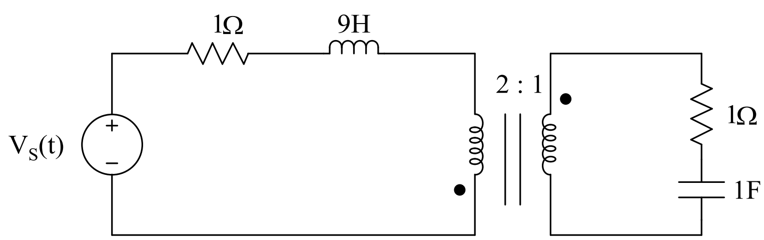
$$V_{Load} = \frac{\frac{8+16j}{5}}{\frac{16}{5}} \times \frac{4}{15}(2+j)V_s = \frac{8(1+2j)}{16} \times \frac{4}{15}(2+j)\,(50-50j) = \frac{100+100j}{3}$$

$$i_{Load} = \frac{v_{Load}}{Z_{Load}} = \frac{\frac{100+100j}{3}}{\frac{8+16j}{5}} = \frac{25}{6}(3-j)$$

$$S = v_{Load}i^*_{Load} = \left(\frac{100+100j}{3}\right)\left(\frac{25}{6}(3+j)\right) = \frac{2500}{9} + \frac{5000}{9}j$$

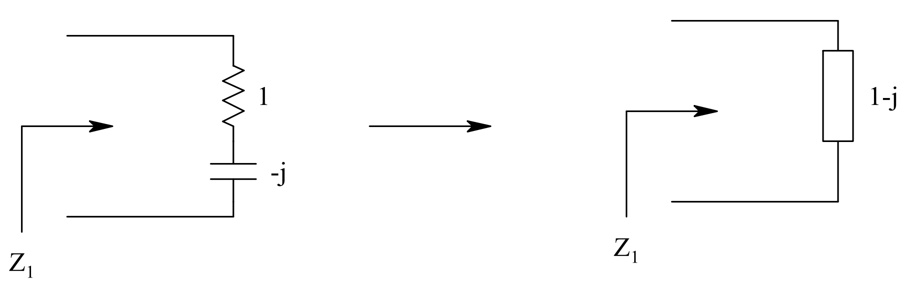
$$P = \frac{2500}{9}\,w$$

۱۷) توان مختلط منبع ولتاژ را محاسبه نمایید.

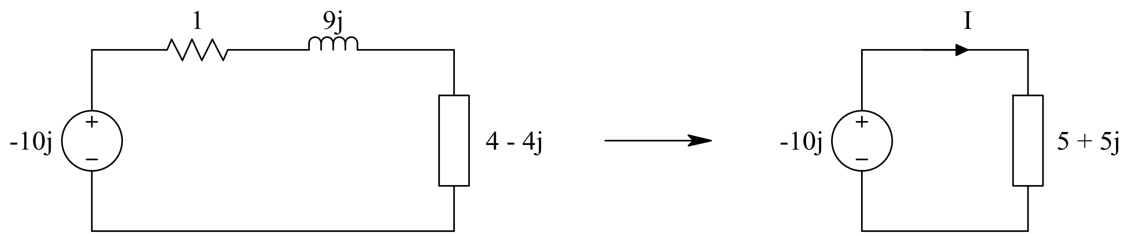


$V_S(t) = 10$ sint

سمت راست ترانس را به سمت چپ آن انتقال می‌دهیم.



$\frac{Z_1}{Z'_1} = \frac{1}{4} \longrightarrow Z'_1 = 4Z_1 = 4 - 4j$



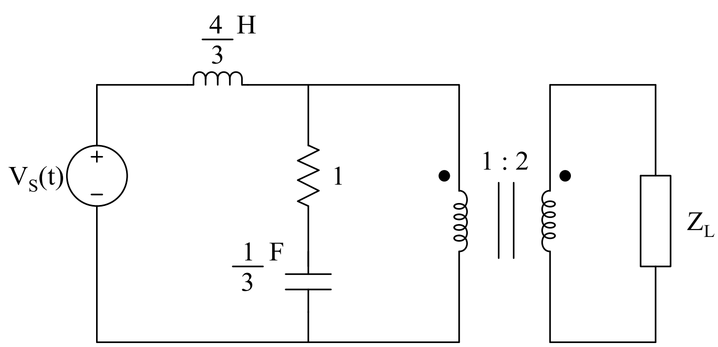
$I = \frac{-10j}{5+5j} = -1 - j$

$S_{\text{منبع}} = \frac{-1}{2}(-10j)(-1+5j) = -5 - 5j$

۱۸) در شکل زیر، موارد زیر را محاسبه کنید:

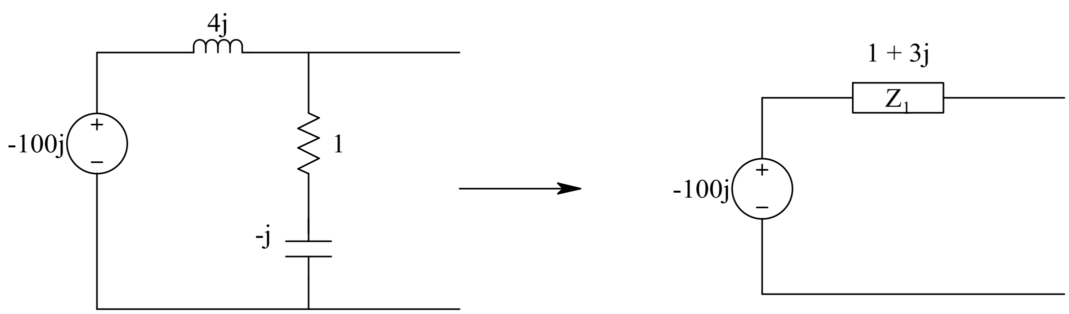
الف) انتخاب Z_L به نحوی که، حداکثر توان به آن منتقل شود.

ب) توان واقعی (اکتیو) و واکنشی (راکتیو) در بار انتخاب شده.



$V_S(t) = 100 \sin(3t)$

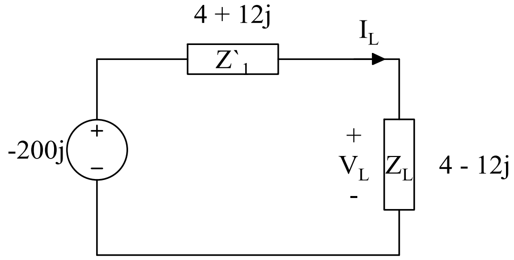
رسم مدار در حوزه فازور و انتقال سمت چپ ترانس به سمت راست آن.



$\frac{Z_1}{Z'_1} = \frac{1}{4} \rightarrow Z'_1 = 4Z_1 = 4 + 12j$

$Z_L = Z'^{*}_1 = 4 - 12j$

$\frac{V_1}{V'_1} = \frac{1}{2} \rightarrow V'_1 = 2V_1 = -200j$



$V_L = \frac{4-12j}{4+12j+4-12j} \times (-200j) = \frac{4-12j}{8} \times (-200j) = -300 - 100j$

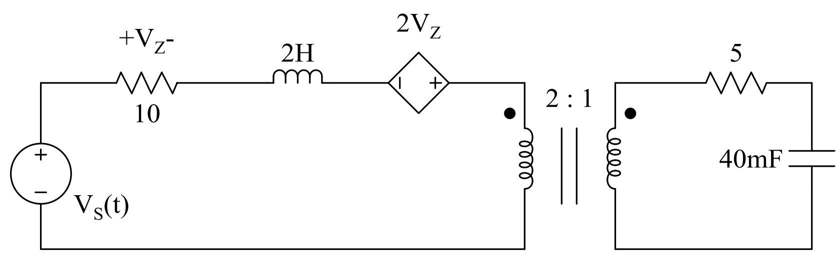
$I_L = \frac{V_L}{Z_L} = \frac{-300-100j}{4-12j} = -25j$

$S_{Load} = \frac{1}{2} V_L I^{*}_L = \frac{1}{2} (-300 - 100j)(25j) = 1250 - 3750j$

$P = 1250$ w

$Q = -3750$ var

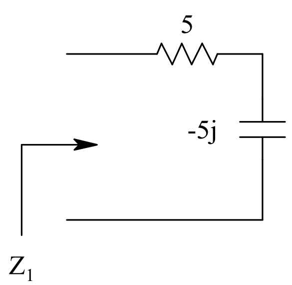
۱۹) توان مختلط منبع ولتاژ را محاسبه کنید.



$V_S(t) = 10\sqrt{2}\cos(5t - 45°)$

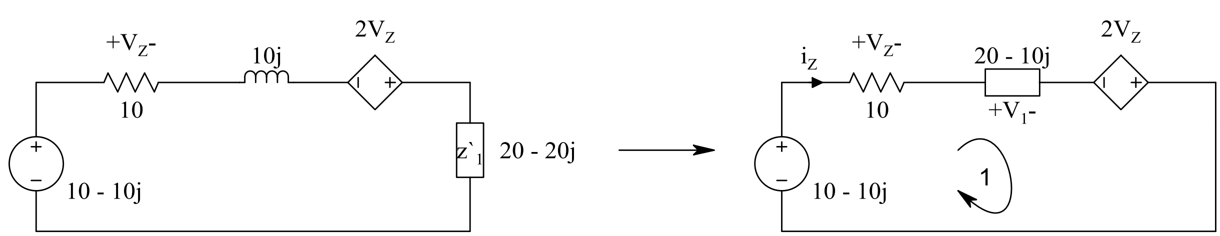
رسم مدار در حوزه فازور:

مقدار امپدانس سمت راست ترانس را به سمت چپ آن انتقال می‌دهیم.



$Z_1 = 5 - 5j$

$\frac{Z_1}{Z'_1} = \frac{1}{4} \rightarrow Z'_1 = 4Z_1 = 20 - 20j$



$V_S = 10\sqrt{2}\, e^{j(-45°)} = 10\sqrt{2}\,(\cos 45° - j\sin 45°) = 10\sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}) = 10 - 10j$

Kvl 1: $V_Z + v_1 - 2V_Z - 10 + 10j = 0 \rightarrow v_1 - V_Z = 10 - 10j \quad (1)$

$i_Z = \frac{V_Z}{10} = \frac{v_1}{20-10j} \rightarrow v_1 = (2 - j)\,V_Z \quad (2)$

$(1),(2) \rightarrow V_Z = 10 \rightarrow i_Z = 1$

$$S_{\text{منبع}} = \frac{-1}{2} (10 - 10j) (1) = - 5 + 5j$$

فصل پنجم:

مدارهای تزویج

فصل پنجم:

مدارهای تزویج

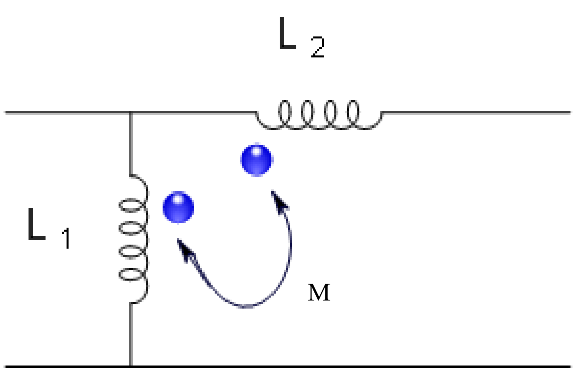
در این فصل با عناصر تزویج و مدارهای تزویج شده آشنا می‌شویم.

تزویج: در اثر عبور جریان الکتریکی متغیر با زمان از یک سیم پیچ (سیم پیچ اولیه) در اطراف آن میدان مغناطیسی به وجود می‌آید. اگر سیم پیچ دیگری (سیم پیچ ثانویه) در این میدان مغناطیسی قرار گیرد روی آن القاء صورت می‌گیرد و در سیم پیچ دوم جریان به وجود می‌آید. این القاء را تزویج می‌نامند.

اگر میزان القای متقابل را از روی تعداد دور سیم پیچ‌ها محاسبه کنیم،مساله ترانس نام دارد که در فصل قبل بررسی کردیم. اما اگر اثر القای متقابل را از مقدار L_1 و L_2 و فاصله بین آن‌ها به دست آوریم، تزویج نام دارد.

مدار تزویج را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

M را اثر القای متقابل گویند و واحد آن هانری است(مثل سلف)و رابطه آن با سلف به صورت زیر است:



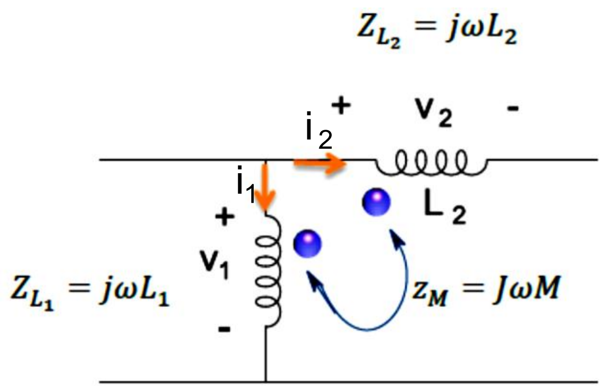
$$\boxed{M = k\sqrt{L_1 L_2}}$$

Kرا ضریب القای متقابل گویند که عددی بین صفر و یک است($0 \leq K \leq 1$) و بدون واحد می‌باشد.

وقتی مدار را به حوزه فازور می‌بریم باید M را نیز با رابطه زیر به حوزه فازور منتقل کنیم:

$$\boxed{z_M = J\omega M(\Omega)}$$

پس مدار فوق در حوزه فازور به صورت زیر می‌باشد.



اثر تزویج فقط در هنگام نوشتن رابطه ولتاژ برای سلف‌های تزویج مشخص می‌شود که برای شکل فوق به صورت زیر است:

$V_1 = Z_{L1}.i_1 \bigcirc Z_M.i_2$

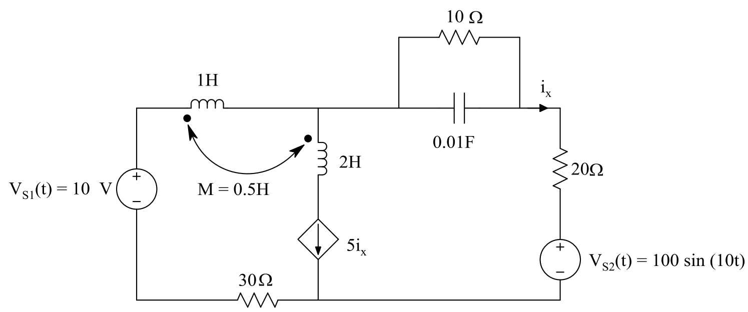
$V_2 = Z_{L2}.i_2 \bigcirc Z_M.i_1$

پس تزویج فقط وفقط روی نوشتن ولتاژ دو سر سلف تزویج شده اثر دارد.

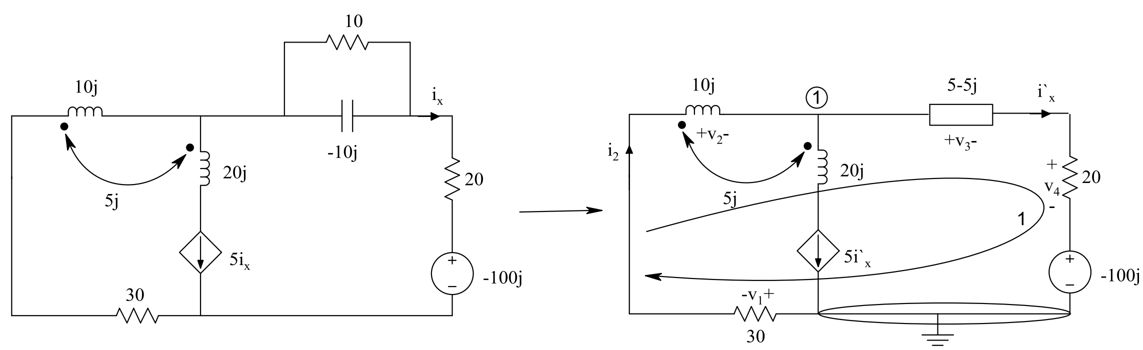
برای تعیین علامت مثبت یا منفی در نوشتن ولتاژ سلف تزویج شده (یعنی علامت داخل دایره)، سرهای نقطه‌دار و جریان‌های دو سر سلف تزویج شده را بررسی می‌کنیم.اگر دو جریان i_1وi_2 از سرهای نقطه‌دار وارد سلف‌ها شوند یا هر دو از سرهای نقطه‌دار از سلف‌ها خارج شوند (جهت‌های متناظر) علامت مثبت است در غیر این صورت علامت منفی است. (جهت‌های نامتناظر)

مثال۱)

در مدار زیر $i_x(t)$ را در حالت ماندگار حساب کنید.



رسم مدار در حوزه فازور با $\omega_1 = 10$



Kcl 1: $i_2 = 5i'_x + i'_x \rightarrow\ i_2 = 6i'_x$ (1)

Kvl 1: $v_2 + v_3 + v_4 - 100j + v_1 = 0$

اکنون با احتساب تزویج، روابط ولتاژ را به جریان تبدیل می‌کنیم.

$\rightarrow\ 10ji_2 + 5j(5i'_x) + (5-5j)(i'_x) + 20i'_x - 100j + 30i_2 = 0$

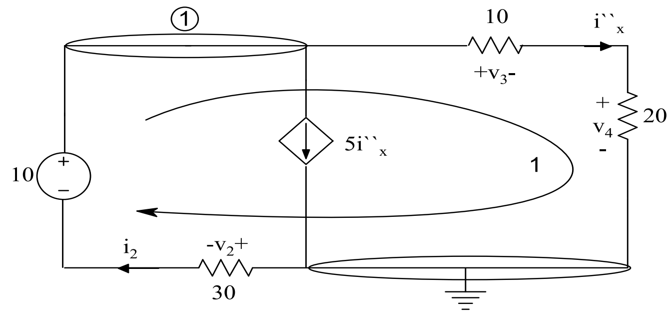
$\rightarrow\ (5 + 4j)i'_x + (6 + 2j)i_2 = 20j$ (2)

(1),(2) $\rightarrow\ (5 + 4j)i'_x + (6 + 2j)(6i'_x) = 20j\ \rightarrow\ (41 + 16j)\, i'_x = 20j$

$\rightarrow\ i'_x = \frac{20j}{41+16j}$

$i'_x(t) = \frac{20}{\sqrt{1937}} \cos\left(10t + \frac{\pi}{2} - tg^{-1}\left(\frac{16}{41}\right)\right)$

رسم مدار در حورزه فازور با $\omega_2 = 0$



Kcl 1: $i_2 = 5i''_x + i''_x \rightarrow i_2 = 6i''_x \quad (1)$

Kvl 1: $v_3 + v_4 + v_2 - 10 = 0 \rightarrow 10i''_x + 20i''_x + 30i_2 - 10 = 0$

$\rightarrow 30i''_x + 30i_2 = 10 \quad (2)$

$(1),(2) \rightarrow 30i''_x + 180i''_x = 10 \rightarrow 210i''_x = 10 \rightarrow i''_x = \frac{1}{21}$

$i_x(t) = i'_x(t) + i''_x(t) = \frac{20}{\sqrt{1937}} \cos\left(10t + \frac{\pi}{2} - tg^{-1}\left(\frac{16}{41}\right)\right) + \frac{1}{21}$

نکته:

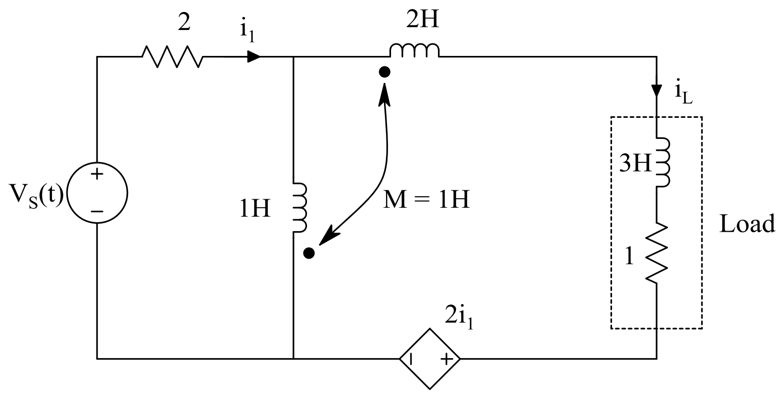
در مدارهای تزویج هیچگاه به جای جریان سلف‌های تزویج شده قانون اهم نمی‌نویسیم.در مدارهای تزویج باید تمامی روابط را بر حسب جریان نوشت حتی اگر خواسته مساله ولتاژ شاخه‌ای از مدار باشد. اگر مجهول ما از جنس ولتاژ باشد باز هم تمامی روابط را برحسب جریان می‌نویسیم و سپس با کمک قانون اهم ولتاژ شاخه مورد نظر را به دست می‌آوریم.

مثال۲)

در مدار زیر:

الف) جریان بار در حالت ماندگار سینوسی را حساب کنید.

ب) توان راکتیو بار را بدست آورید.

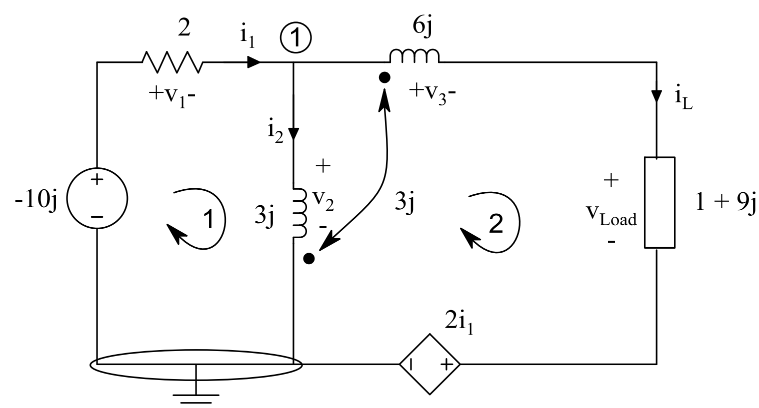


$V_S(t) = 10\sqrt{2}\,\sin(3t)$

برای سادگی محاسبات بهتر است مقدار V_sرا در حوزه فازور بر حسب مقدار موثر به دست آوریم:

$V_s = -j10\sqrt{2} \rightarrow V_{s(rms)} = \frac{v_s}{\sqrt{2}} = -j10$

الف) رسم مدار در حوزه فازور:



Kcl 1: $i_1 = i_L + i_2$ (1)

Kvl 1: $v_1 + v_2 + 10j = 0$

وارد کردن اثر تزویج:

$\rightarrow\ 2i_1 + 3ji_2 - 3ji_L + 10j = 0 \quad (2)$

Kvl 2: $v_3 + v_{Load} + 2i_1 - v_2 = 0$

وارد نمودن اثر تزویج:

$\rightarrow\ 6ji_L - 3ji_2 + (1 + 9j)i_L + 2i_1 - (3ji_2 - 3ji_L) = 0$

$\rightarrow\ (1 + 18j)i_L - 6ji_2 + 2i_1 = 0 \quad (3)$

$(1),(2),(3) \rightarrow i_L = \frac{-19/5 - 111/5j}{128/125}$

$i_L(t) = \frac{\sqrt{12812/5}}{128/125} \cos(3t + tg^{-1}(\frac{111/5}{19/5}))$

ب)

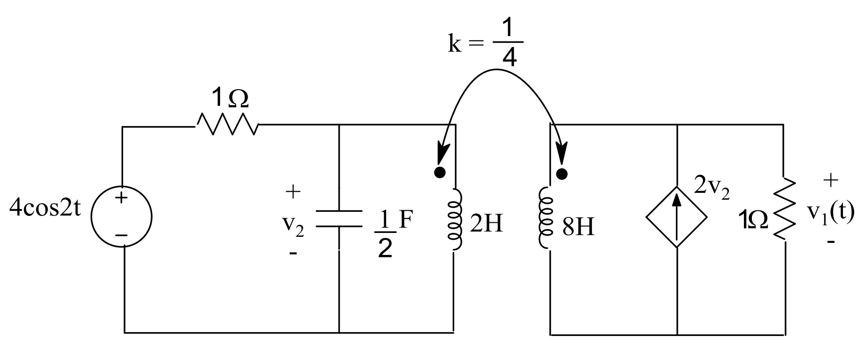
$V_{Load} = i_L Z_{load} = (\frac{-19/5 - 111/5j}{128/125})(1 + 9j) = \frac{984-287j}{128/125} = 7/68 - 2/24j$

$S_{Load} = V_{Load}\, i^*_L = (7/68 - 2/24j)(\frac{-19/5 + 111/5j}{128/125}) = \frac{100+900j}{128/125}$

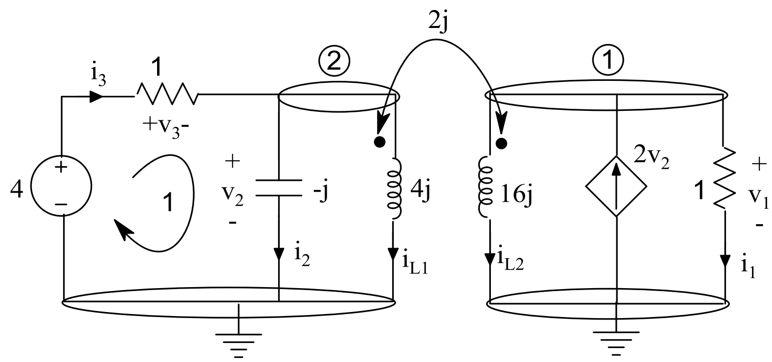
$Q_{Load} = \frac{900}{128/125} \cong 7/02$ var

مثال۳)

برای مدار تزویج داده شده در شکل زیر، ولتاژ $v_1(t)$ را در حالت دائمی سینوسی به دست آورید.



رسم مدار در حوزه فازور:



مشاهده می‌شود در مدار شکل فوق دو مدار، مجزا از هم هستند که روی هم اثر تزویج دارند بنابراین هنگام نوشتن رابطه kcl باید برای هر کدام یک گره مبنا در نظر گرفت.

Kcl 1: $2v_2 = i_1 + i_{L2} \rightarrow -2ji_2 = i_1 + i_{L2}$ (1)

هم‌چنان که گفته شد با این که خواسته مساله از جنس ولتاژ است اما برای جریان سلف تزویج شده قانون اهم نمی‌نویسیم و همه روابط را بر حسب جریان به دست می‌آوریم.

Kcl 2: $i_3 = i_2 + i_{L1}$ (2)

Kvl 1: $v_3 + v_2 - 4 = 0 \rightarrow i_3 - ji_2 - 4 = 0$ (3)

در مدار سمت راست شاخه‌ها موازی‌اند بنابراین v_1 که ولتاژ دو سر مقاومت ۱ اهم است ولتاژ دو سر سلف تزویج شده نیز می‌باشد پس قانون اهم v_1 از هر دو شاخه به دست می‌آید. داریم:

$v_1 = i_1$, $v_1 = 16ji_{L2} + 2ji_{L1}$

همچنین در مدار سمت راست سلف تزویج شده با خازن نیز موازی است پس ولتاژ آنها برابر با v_2 است و v_2 از هر دو شاخه به دست می‌آید. یعنی داریم:

$v_2 = -ji_2$, $v_2 = 4ji_{L1} + 2ji_{L2}$

پس خواهیم داشت:

$v_2 = -ji_2 = 4ji_{L1} + 2ji_{L2}$ (4)

$v_1 = i_1 = 16ji_{L2} + 2ji_{L1}$ (5)

(1),(2),(3),(4),(5) $\rightarrow$ $i_1 = \frac{-480+8j}{57-52j}$

اکنون با استفاده از قانون اهم v_1 به راحتی قابل محاسبه است:

$v_1 = i_1 = \frac{-480+8j}{57-52j}$

$v_1(t) \cong 6/22 \cos (2t + tg^{-1}(\frac{-1}{60}) - tg^{-1}(\frac{-52}{57}))$

بنابراین همیشه در مسائل تزویج ابتدا جریان شاخه مورد نظر را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از جریان آن شاخه ولتاژ مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

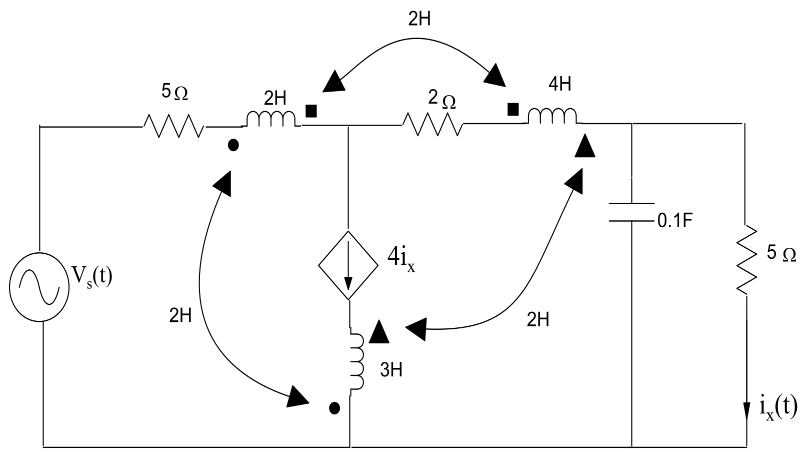
تمرین‌های حل شده

فصل پنجم

۱) برای مدار مقابل پارامترهای زیر را محاسبه کنید.

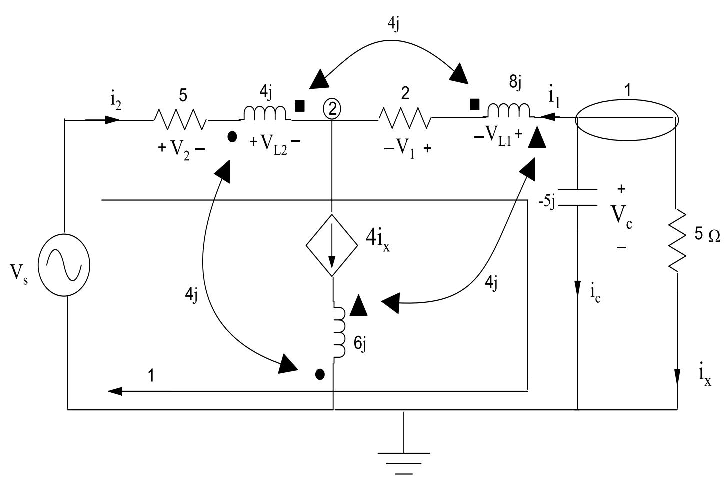
الف) رابطه $i_x(t)$ را برای حالت دائمی محاسبه نمایید.

ب) توان ظاهری (مختلط) منبع مستقل مدار در این حالت چه قدر خواهد بود؟ محاسبه نمایید.



$V_s(t) = 10\sin(2t+30)$

رسم مدار در حوزه فازور:



$V_s = -j\,(10)\, e^{j30^\circ} = -10j(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}) = 5 - 5\sqrt{3}j$

Kcl 1: $\left.\begin{matrix} i_1 + i_c + i_x = 0 \\ 5i_x = -5ji_c \end{matrix}\right\} \rightarrow$ i1 + (1 + j)ix = 0 (1)

$Kcl2: \quad i_1 + i_2 = 4i_x \quad (2)$

$Kvl1: \quad v_2 + v_{L2} - v_1 - v_{L1} + v_c - 5 + 5\sqrt{3}j = 0$

$5i_2 + 4ji_2 + 4ji_1 - 16ji_x - 2i_1 - (8ji_1 + 4ji_2 + 16ji_x) - 5ji_c - 5 + 5\sqrt{3}j = 0$

$5i_2 + (-2-4j)i_1 + (5-32j)i_x = 5-5\sqrt{3}j \quad (3)$

$(1),(2),(3) \rightarrow \; ix = \frac{5-5\sqrt{3}j}{28-21j}$

$i_x(t) = \frac{5}{294} \cos\left(2t - 60^\circ - tg^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right)\right)$

ب) از حل معادلات قسمت الف داریم:

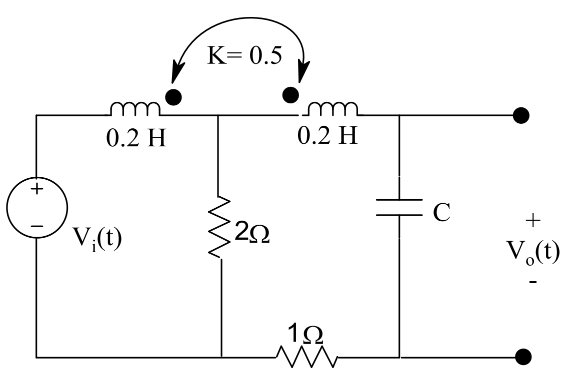
$i_2 = \frac{25+5\sqrt{3}+(-25\sqrt{3}+5)j}{28-21j} \cong 1/43 - 0/3j$

$S_{\text{منبع}} = \frac{-1}{2}(5 - 5\sqrt{3}j)(1/43 + 0/3j) \cong -4/87 + 5/44j$

۲)

الف) پاسخ حالت دائمی $v_o(t)$ را محاسبه کنید.

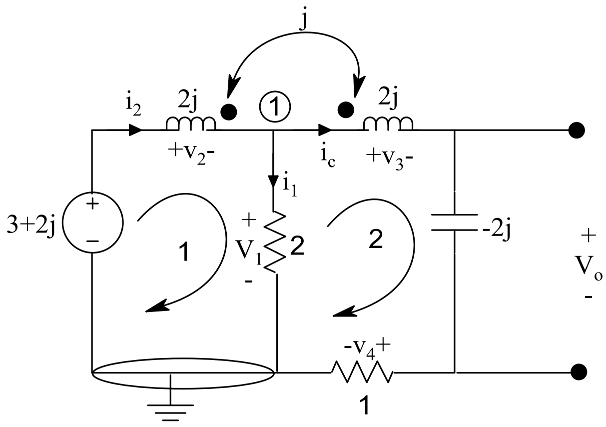
ب) توان ظاهری (مختلط) منبع ولتاژ ورودی را محاسبه نمایید. (حالت دائمی)



$C = \frac{1}{20} F$

$V_i(t) = \sqrt{13} \cos(10t + 33/69^\circ)$

الف) رسم مدار در حوزه فازور



$Z_M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0/5\,\sqrt{0.2\ \times 0.2} = 1$

$V_i = \sqrt{13}\ e^{j\,33/69} = \sqrt{13}\ (\cos 33/69 + j\sin 33/69) \cong 3 + 2j$

Kcl 1: $i_2 = i_1 + i_c$ (1)

Kvl 1: $v_2 + v_1 - 3 - 2j = 0 \rightarrow 2ji_2 - ji_c + 2i_1 - 3 - 2j = 0$ (2)

Kvl 2: $v_3 + v_0 + v_4 - v_1 = 0 \rightarrow 2ji_c - ji_2 - 2ji_c + i_c - 2i_1 = 0 \rightarrow i_c - ji_2 - 2i_1 = 0$ (3)

$(1),(2),(3) \rightarrow i_c = 2 + j$

$V_o = (2 + j)(-2j) = 2 - 4j$

$V_o(t) = 2\sqrt{5}\ (\cos 10t + tg^{-1}(-2))$

ب)

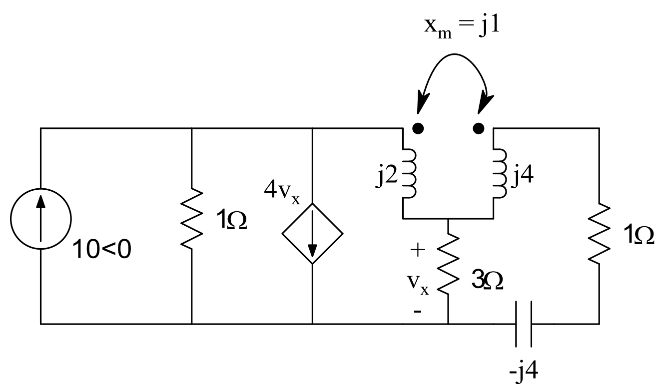
از حل معادلات (۳)، (۲)، (۱) $\rightarrow i_2 = 3$

$S_{\text{منبع}} = \frac{1}{2} V_{\text{منبع}} \times I^*_{\text{منبع}} = \frac{-1}{2}(3 + 2j)(3) = -4/5 - 3j$

۳)

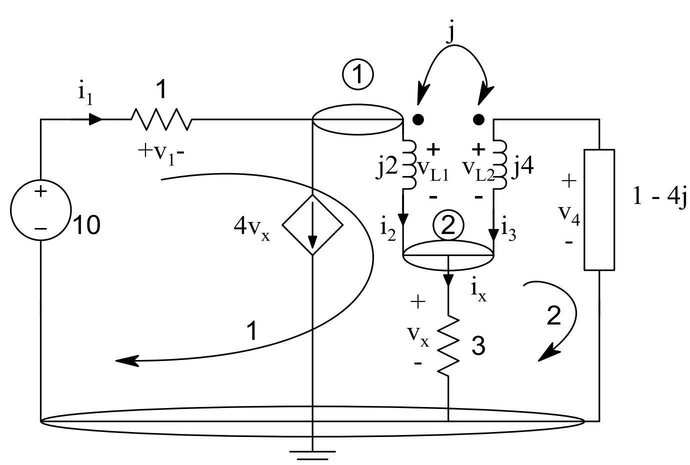
الف) ولتاژ v_x را محاسبه نمایید.

ب) توان مختلط تحویلی توسط منبع چه قدر است؟



الف) برای سهولت محاسبات امپدانس‌های سری را جمع می‌کنیم و معادل آن را جایگزین می‌کنیم. همچنین از تبدیل منابع استفاده می‌کنیم.

نکته: در مدارهای تزویج باید معادلات را بر حسب جریان بنویسید و ابتدا جریان‌ها را بدست آورید. اگر خواسته مساله، ولتاژ شاخه‌ای از مدار بود با دانستن جریان گذرنده از آن شاخه و با کمک روابط مداری، آن ولتاژ به آسانی قابل محاسبه است.



Kcl 1: $i_1 = 4v_x + i_2 \rightarrow i_1 = 12i_x + i_2 \quad (1)$

Kcl 2: $i_x = i_2 + i_3$ (2)

Kvl 1: $v_1 + v_{L1} + v_x - 10 = 0 \rightarrow i_1 + 2ji_2 + ji_3 + 3i_x - 10 = 0$ (3)

Kvl 2: $- v_{L2} + v_4 - v_x = 0 \rightarrow -(4ji_3 + ji_2) + (1-4j)(-i_3) - 3i_x = 0$

$\rightarrow -ji_2 - i_3 - 3i_x = 0$ (4)

(1),(2),(3),(4) (چهار معادله، چهار مجهول) $\rightarrow i_x = \frac{5(1-j)}{2(1-3j)}$

$v_x = 3i_x = \frac{15(1-j)}{2(1-3j)}$

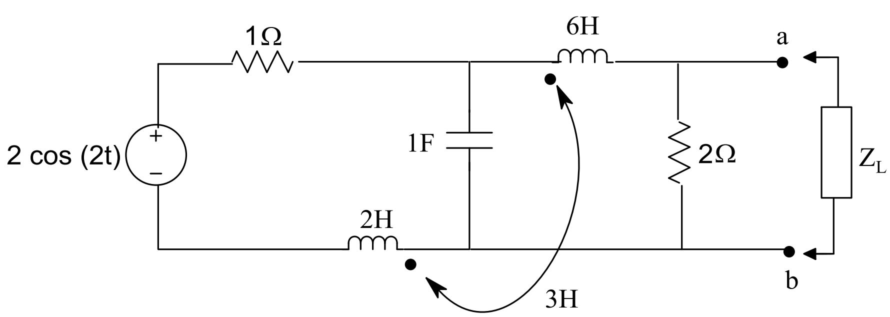
ب)

از حل معادلات قسمت الف $\rightarrow i_1 = 13 + 9j$

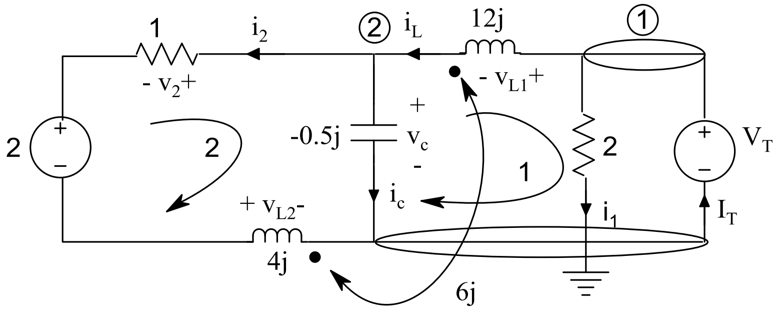
$S_{\text{منبع}} = \frac{-1}{2}(10)(13 - 9j) = -65 + 45j$

۴) الف) در مدار مقابل امپدانس Z_L را به نحوی محاسبه کنید که حداکثر توان به آن انتقال یابد.

ب) توان ظاهری (مختلط) را برای Z_L مذکور محاسبه نمایید.



الف) رسم مدار در حوزه فازور و استفاده از منبع تست برای به دست آوردن معادل تونن:



Kcl 1: $I_T = i_1 + i_L \rightarrow I_T = \frac{V_T}{2} + i_L$ (1)

Kcl 2: $i_2 + i_c = i_L$ (2)

Kvl 1: $-vL_1 + v_T - v_c = 0 \rightarrow -(12ji_L + 6ji_2) + v_T + \frac{1}{2}ji_c = 0$ (3)

Kvl2 : $-v_2 + v_c - v_{L2} - 2 = 0 \rightarrow -i_2 - \frac{1}{2}ji_c - 2 - (4ji_2 + 6ji_L) = 0$ (4)

$(1),(2),(3),(4) \rightarrow V_T = \left(\frac{2+\frac{23}{2}j}{2+\frac{19}{2}j}\right) I_T - \frac{13j}{2+\frac{19}{2}j}$

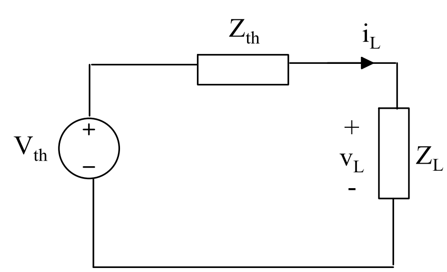
$\rightarrow Z_{th} = \frac{2+\frac{23}{2}j}{2+\frac{19}{2}j} \cong 1/20 - 0/04\, j \rightarrow Z_L = 1/20 + 0/04\, j$

ب) از روش منبع تست در قسمت الف ولتاژ تونن نیز قابل محاسبه است. آن را حساب می‌کنیم و به جای مدار معادل تونن آن را قرار می‌دهیم:

$V_{th} = -\frac{13j}{2+\frac{19}{2}j} \cong -1/31 - 0/28\, j$

$V_L = \frac{Z_L}{Z_L + Z_{th}} \times V_{th} = \frac{1/20 + 0/04\, j}{2/4} \times (-1/31 - 0/28\, j)$

$\cong -0/65 - 0/16\, j$



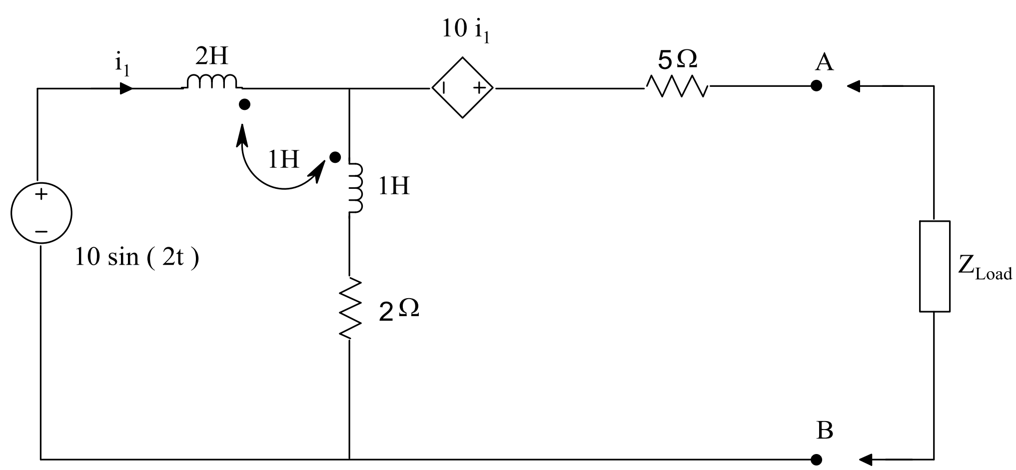
$i_L = \frac{V_L}{Z_L} = \frac{-0/65 - 0/16\,j}{1/20 + 0/04\,j} \cong -0/55 - 0/11\,j$

$S_L = \frac{1}{2}(-0/65 - 0/16\,j)(-0/55 + 0/11\,j) = 0/18755 + 0/00825\,j$

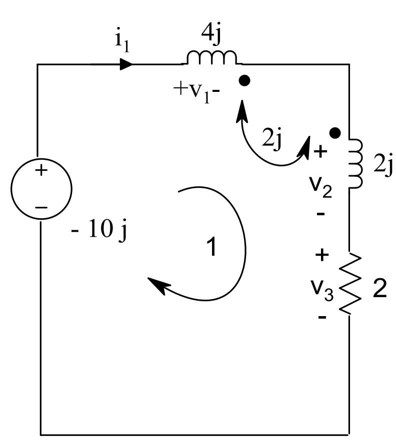
۵) در مدار شکل زیر مطلوب است:

الف) توان مختلط (ظاهری) منبع ولتاژ مستقل را به‌دست آورید. (بار Z_{Load} وصل نیست.)

ب) اگر به دو سر A و B امپدانس بار Z_{Load} وصل شود، مقدار امپدانس بار را به نحوی تعیین کنید که توان حداکثر به آن انتقال یابد. Z_{Load} از چه اجزایی تشکیل شده است؟



الف) رسم مدار در حوزه فازور



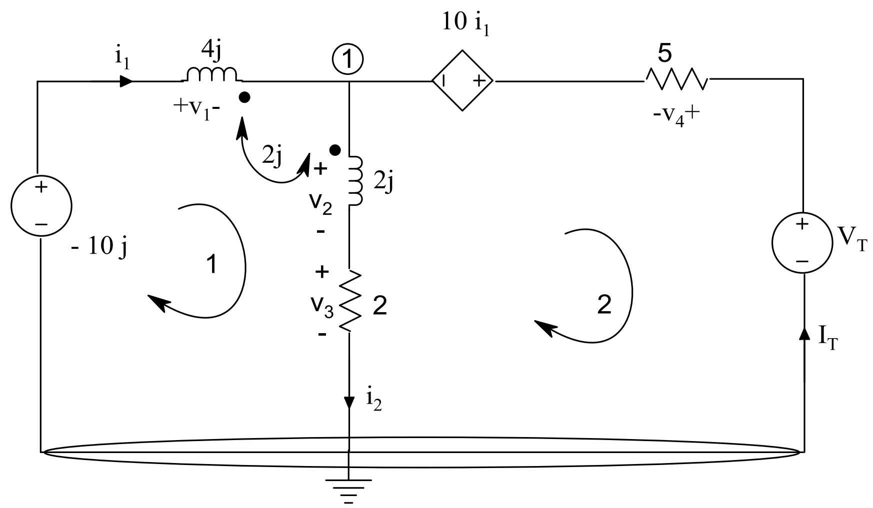
Kvl 1: $v_1 + v_2 + v_3 + 10j = 0$

$\rightarrow 4ji_1 - 2ji_1 + 2ji_1 - 2ji_1 + 2i_1 + 10j = 0$

$\rightarrow (2 + 2j)\, i_1 = -10j \;\rightarrow\; i_1 = \frac{-10j}{2+2j} = \frac{-5-5j}{2}$

$S_{منبع} = \frac{-1}{2}(-10j)\left(\frac{-5-5j}{2}\right) = 12/5 - 12/5\,j$

ب) استفاده از منبع تست



Kcl 1: $i_1 + I_T = i_2$ (1)

Kvl 1: $v_1 + v_2 + v_3 + 10j = 0 \rightarrow 4ji_1 - 2ji_2 + 2ji_2 - 2ji_1 + 2i_2 + 10j = 0$

$\rightarrow 2ji_1 + 2i_2 + 10j = 0$ (2)

Kvl 2: $-10i_1 - v_4 + v_T - v_3 - v_2 = 0 \rightarrow -10i_1 - 5I_T + v_T - 2i_2 - (2ji_2 - 2ji_1) = 0$

$\rightarrow (-10 + 2j)\, i_1 + (-2 - 2j)\, i_2 + v_T - 5I_T = 0$ (3)

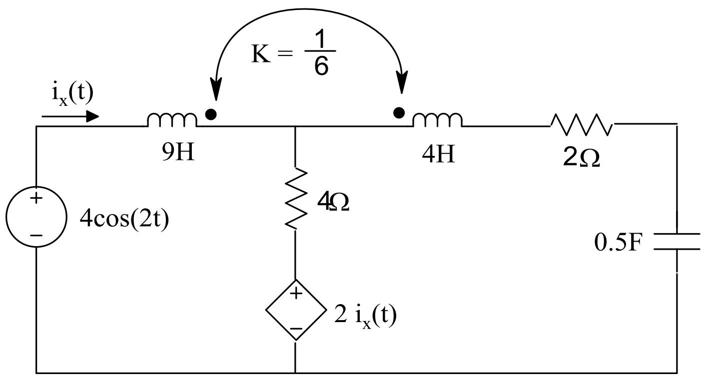
(1),(2),(3) $\rightarrow v_T = (11 + 8j)\, I_T + (-30 - 30j)$

$Z_{th} = 11 + 8j \rightarrow Z_{Load} = Z^{*}_{th} = 11 - 8j$

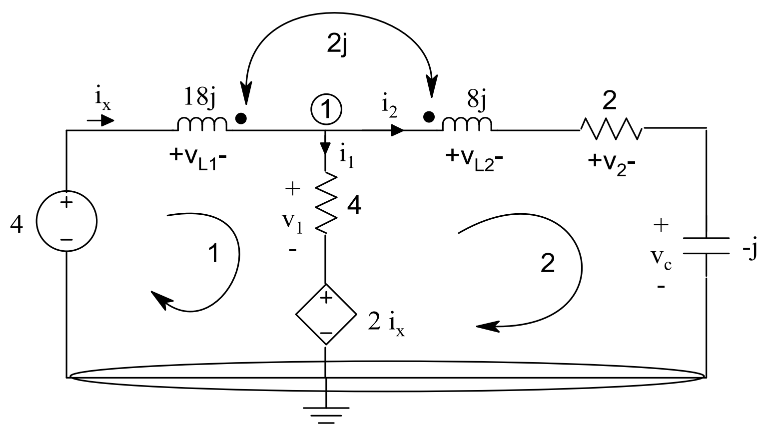
$-8j = \frac{-j}{\omega C} \rightarrow -8j = \frac{-j}{2C} \rightarrow C = \frac{1}{16}$ F

Z_{Load} از یک مقاومت به مقدار ۱۱ اهم سری با یک خازن به مقدار $\frac{1}{16}$ فاراد تشکیل شده است.

۶) برای مدار تزویج داده شده در شکل زیر، جریان $i_x(t)$ را در حالت دائمی سینوسی به دست آورید.



رسم مدار در حوزه فازور:



Kcl 1: $i_x = i_1 + i_2$ (1)

Kvl 1: $v_{L1} + v_1 + 2i_x - 4 = 0 \rightarrow 18ji_x - 2ji_2 + 4i_1 + 2i_x - 4 = 0$

$\rightarrow (18j + 2)\, i_x + 4i_1 - 2ji_2 - 4 = 0$ (2)

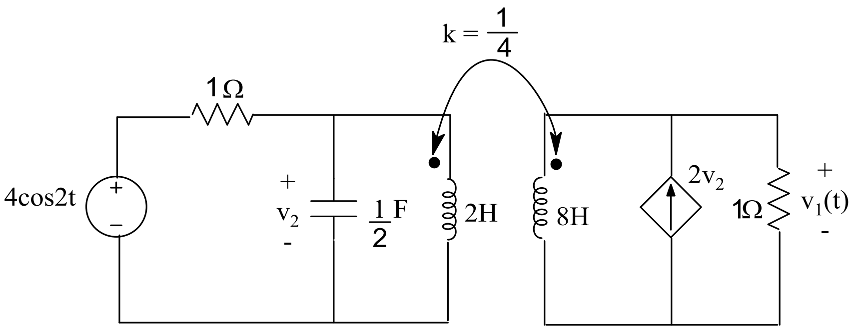
Kvl 2: $v_{L2} + v_2 + v_c - 2i_x - v_1 = 0 \rightarrow 8ji_2 - 2ji_x + 2i_2 - ji_2 - 2i_x - 4i_1 = 0$

$\rightarrow (7j + 2)\, i_2 - (2j + 2)\, i_x - 4i_1 = 0$ (3)

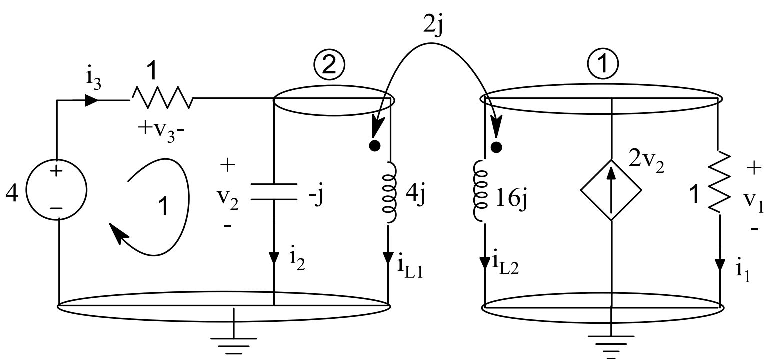
(1),(2),(3) $\rightarrow i_x = \frac{24+28j}{-110+130j}$

$i_x(t) = \frac{2\sqrt{85}}{5\sqrt{290}} \cos\left(2t + tg^{-1}\left(\frac{7}{6}\right) - tg^{-1}\left(\frac{-13}{11}\right)\right)$

۷) برای مدار تزویج داده شده در شکل زیر، ولتاژ $v_1(t)$ را در حالت دائمی سینوسی به دست آورید.



رسم مدار در حوزه فازور:



Kcl 1: $2v_2 = i_1 + i_{L2} \rightarrow -2ji_2 = i_1 + i_{L2}$ (1)

Kcl 2: $i_3 = i_2 + i_{L1}$ (2)

Kvl 1: $v_3 + v_2 - 4 = 0 \rightarrow i_3 - ji_2 - 4 = 0$ (3)

$v_2 = -ji_2 = 4ji_{L1} + 2ji_{L2}$ (4)

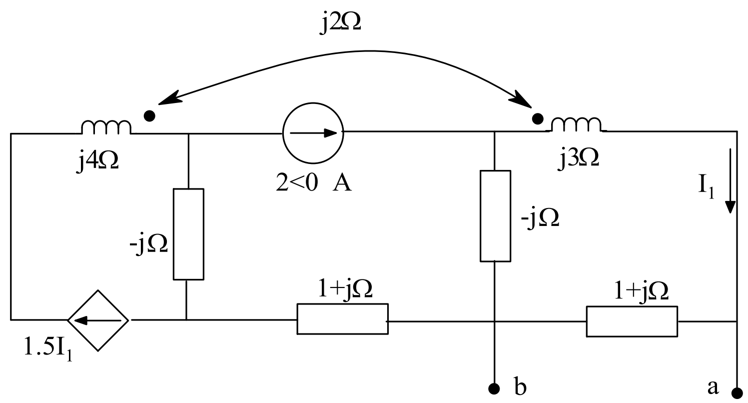
$v_1 = i_1 = 16ji_{L2} + 2ji_{L1}$ (5)

(1),(2),(3),(4),(5) $\rightarrow i_1 = \frac{-480+8j}{57-52j}$

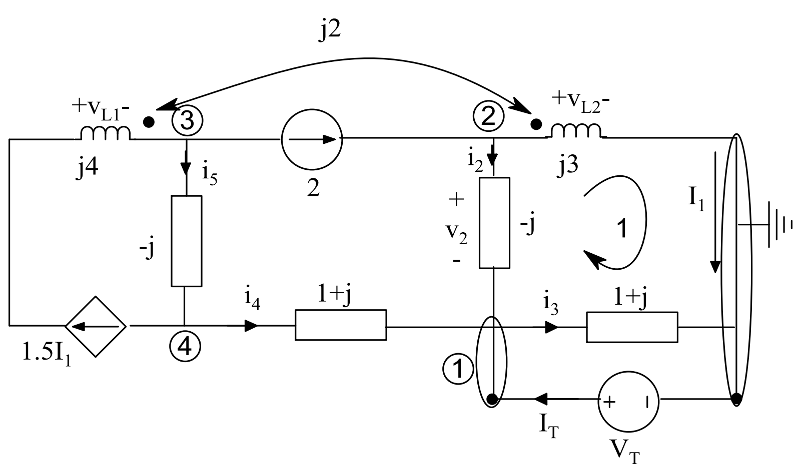
$v_1 = i_1 = \frac{-480+8j}{57-52j}$

$v_1(t) \cong 6/22 \cos\left(2t + tg^{-1}\left(\frac{-1}{60} \right) - tg^{-1}\left(\frac{-52}{57} \right) \right)$

۸) چه امپدانسی بین سرهای a و b قرار گیرد که حداکثر توان متوسط (حقیقی یا اکتیو) را جذب کند؟



منبع تست را به مدار می‌افزاییم، داریم:



Kvl 1: $v_{L2} - v_T - v_2 = 0 \rightarrow 3ji_1 - 2j\,(1/5i_1) - v_T + ji_2 = 0 \rightarrow i_2 = -jv_T$ (1)

Kcl 1: $i_2 + i_4 + I_T = i_3$ (2)

Kcl 2: $2 = i_2 + i_1$ (3)

Kcl 3: $1/5 i_1 = i_5 + 2$ (4)

Kcl 4: $i_5 = 1/5 i_1 + i_4 \rightarrow 1/5 j v_T + 1 = 3 + 1/5 j v_T + i_4 \rightarrow i_4 = -2$

$-jv_T - 2 + I_T = \frac{vT}{1+j} = \frac{1}{2} v_T (1 - j) = \frac{1}{2} v_T - \frac{1}{2} j v_T$

$I_T - 2 = (\frac{1}{2} j + \frac{1}{2}) v_T$

$v_T = (1 - j) I_T + (-2 + 2j)$

$z_{th} = 1 - j$

$z_L = z^*_{th} = 1 + j$

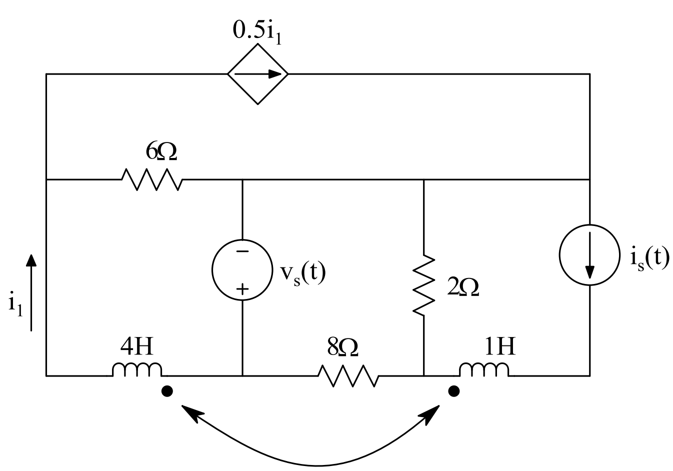
۹) مدار در حالت دائم (ماندگار) قرار دارد و اطلاعات زیر برای آن داده شده است:

(ضریب تزویج) $K = 0/5$

$v_s(t) = 8\sqrt{2} \sin t$ V

$i_s(t) = 3\sqrt{2} \cos t$ A

توان مختلطی که منبع ولتاژ تحویل می‌دهد را محاسبه کنید.

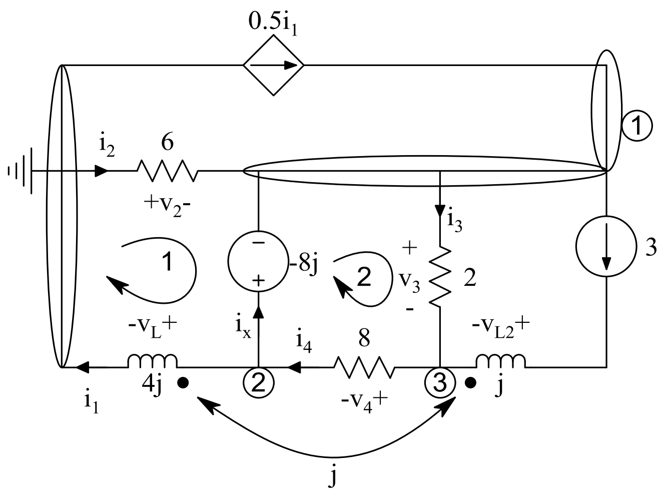


رسم مدار در حوزه فازور:

نکته: برای ساده شدن محاسبات مقادیر موثر (rms) منابع را قرار می‌دهیم.

$v_s(t) = 8\sqrt{2}\ \sin t \;\rightarrow\; V_{s(rms)}(t) = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\ \sin t = 8\ \sin t$

$i_s(t) = 3\sqrt{2}\ \cos t \;\rightarrow\; i_{s(rms)}(t) = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cos t = 3\cos t$



Kcl 1: $0/5i_1 + i_2 + i_x = i_3 + 3 \quad (1)$

Kcl 2: $i_4 = i_x + i_1 \quad (2)$

Kcl 3: $3 + i_3 = i_4 \quad (3)$

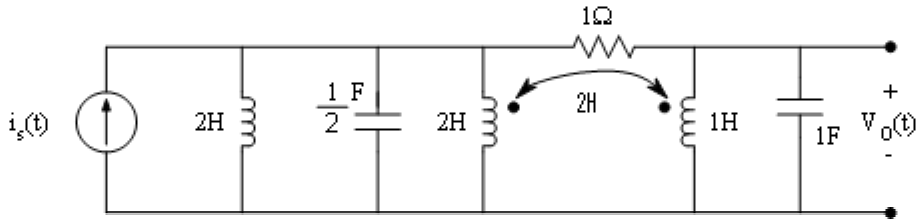
Kvl 1: $v_2 + 8j + 4ji_1 - 3j = 0 \;\rightarrow\; 6i_2 + 4ji_1 + 5j = 0 \quad (4)$

Kvl 2: $v_3 + v_4 - 8j = 0 \;\rightarrow\; 2i_3 + 8i_4 - 8j = 0 \quad (5)$

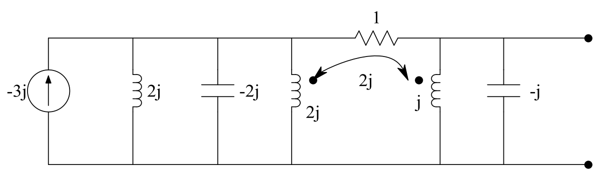
$(1),(2),(3),(4),(5) \;\rightarrow\; i_x = \frac{7}{5} + \frac{7}{5}j$

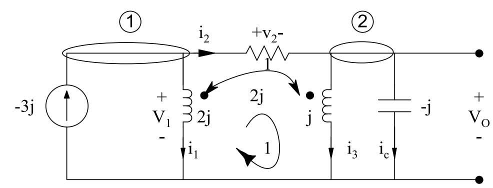
$S_{\text{منبع ولتاژ}} = \frac{1}{2}\,(-8j)\,\left(\frac{7}{5} - \frac{7}{5}j\right) = -5/6 - 5/6\,j$

۱۰) مدار زیر به حالت دائمی (ماندگار) رسیده است. مطلوب است محاسبه ولتاژ $V_O(t)$:



رسم مدار در حوزه فازور:





Kcl 1: $-3j = i_1 + i_2$ (1)

Kcl 2: $i_2 = i_3 + i_c$ (2)

Kvl 1: $v_2 + v_o - v_1 = 0 \;\rightarrow\; i_2 + ji_3 + 2ji_1 - (2ji_1 + 2ji_3) = 0 \;\rightarrow\; i_2 = ji_3$ (3)

$ji_3 + 2ji_1 = -ji_c$ (4)

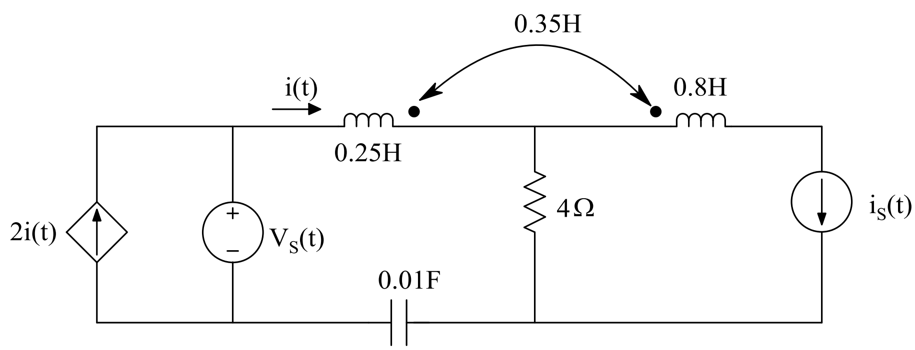
(1),(2),(3),(4) $\rightarrow\; i_c = 6 - 6j \;\rightarrow\; V_O = -ji_c = -6 - 6j$

$\rightarrow\; V_O(t) = 6\sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

۱۱) با فرض این‌که منابع به صورت زیر باشند، توان مختلط جذب شده توسط منبع جریان وابسته را محاسبه کنید:

$V_s(t)= 4\sqrt{2}\ \sin(20t)$ V

$i_s(t)= \sqrt{2}\cos(20t)$ A

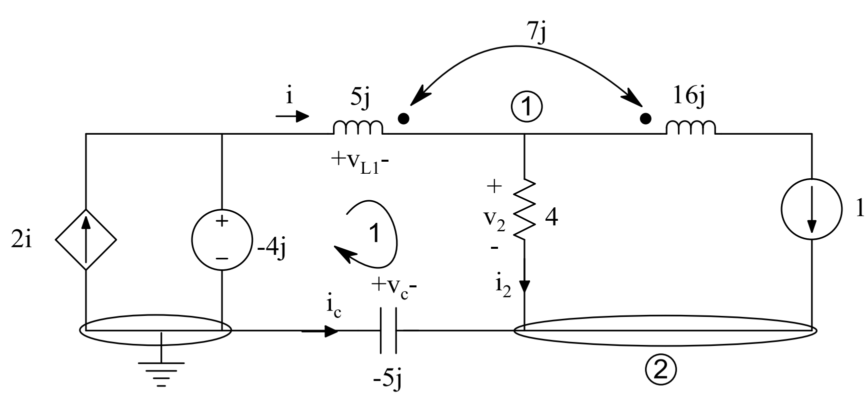


رسم مدار درحالت فازور:

نکته: برای ساده شدن محاسبات مقادیر موثر (rms) منابع را قرار می‌دهیم.

$$v_s(t) = 4\sqrt{2}\ \sin(20t) \quad \rightarrow\ V_{s(rms)}(t) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\ \sin(20t) = 4\ \sin(20t)$$

$$i_s(t) = \sqrt{2}\ \cos(20t) \ \rightarrow\ i_{s(rms)}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cos t = \cos(20t)$$



Kcl 1: $\quad i = i_2 + 1 \quad (1)$

Kcl 2: $\quad i_c + i_2 + 1 = 0 \quad (2)$

Kvl 1: $\quad v_{L1} + v_2 - v_c + 4j = 0 \ \rightarrow\ 5ji - 7j + 4i_2 + 5ji_c + 4j = 0 \quad (3)$

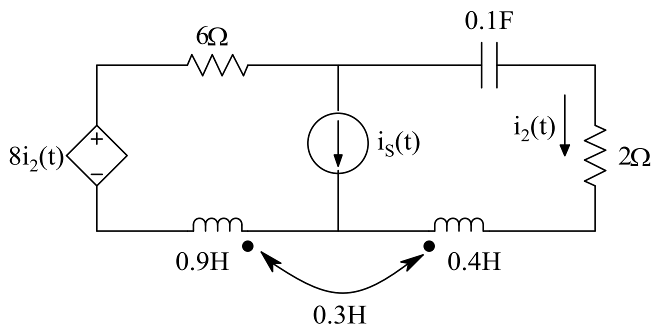
$(1),(2),(3) \rightarrow i = 1 + \frac{3}{4}j \rightarrow 2i = 2 + \frac{3}{2}j$

$S_{\text{منبع وابسته}} = -(-4j)(2 - \frac{3}{2}j) = 6 + 8j$

۱۲) مدار در حالت دائم (ماندگار) سینوسی قرار دارد و منبع جریان به صورت زیر است:

$i_S(t) = 5\sqrt{2}\cos(10t)$ A

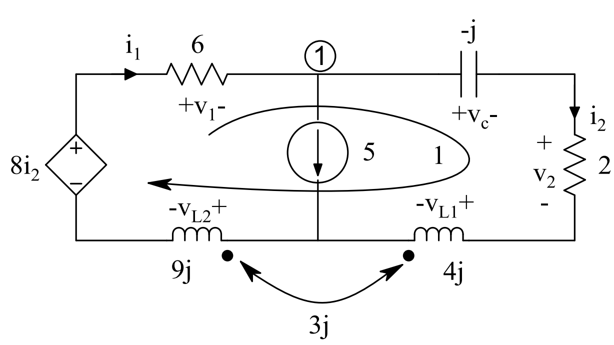
مطلوب است توان مختلطی که منبع ولتاژ وابسته تحویل می‌دهد.



رسم مدار در حوزه فازور:

نکته: ابتدا برای سادگی محاسبات مقدار موثر منبع را جایگزین مقدار داده شده، می‌کنیم.

$i_{S(rms)}(t) = \frac{5\sqrt{2}\cos(10t)}{\sqrt{2}} = 5\cos(10t)$



Kcl 1: $i_1 = 5 + i_2$ (1)

Kvl 1: $v_1 + v_c + v_2 + v_{L1} + v_{L2} - 8i_2 = 0$

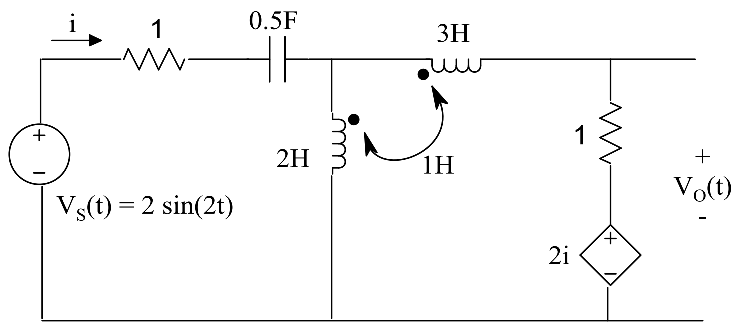
$\rightarrow \; 6i_1 + (-ji_2) + 2i_2 + 4ji_2 - 3ji_1 + 9ji_1 - 3ji_2 - 8i_2 = 0$

$\rightarrow \; (6 + 6j) \, i_1 - 6i_2 = 0 \quad (2)$

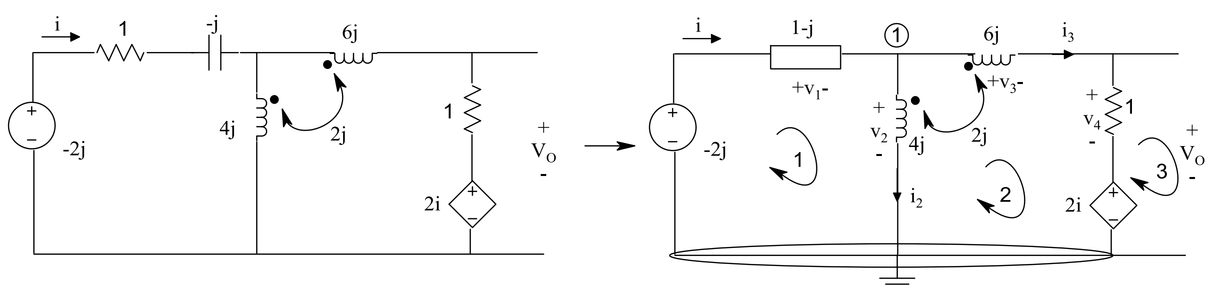
$$(1),(2) \rightarrow \begin{cases} i_1 = 5j \\ i_2 = -5 + 5j \end{cases}$$

$S_{\text{منبع ولتاژ}} = - 8i_2 (i^*_1) = - 8 (- 5 + 5j) (- 5j) = - 200 - 200j$

۱۳) مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی قرار دارد. ولتاژ $V_O(t)$ را محاسبه کنید.



رسم مدار در حوزه فازور:



Kcl 1: $i = i_2 + i_3 \quad (1)$

Kvl 1: $v_1 + v_2 + 2j = 0 \;\rightarrow\; (1 - j)i + 4ji_2 + 2ji_3 + 2j = 0 \quad (2)$

Kvl 2: $v_3 + v_4 + 2i - v_2 = 0 \;\rightarrow\; 6ji_3 + 2ji_2 + i_3 + 2i - (4ji_2 + 2ji_3) = 0$

$\rightarrow \; (1 + 4j)i_3 - 2ji_2 + 2i = 0 \quad (3)$

$$(1),(2),(3) \rightarrow \begin{cases} i_3 = \frac{-4}{13} j \\ i = \frac{-7}{13} - \frac{5}{13} j \end{cases}$$

Kvl 3: $V_O - 2i - v_4 = 0 \rightarrow V_O = 2i + v_4 = 2i + i_3$

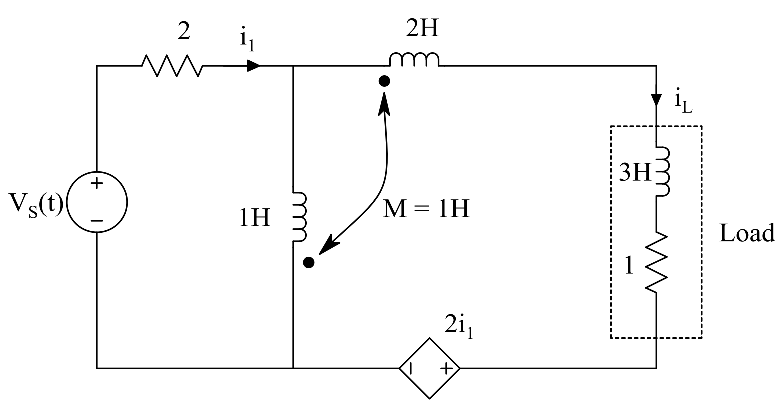
$V_O = 2\left(\frac{-7}{13} - \frac{5}{13} j\right) + \left(\frac{-4}{13} j\right) = \frac{-14}{13} - \frac{14}{13} j$

$V_O(t) = \frac{14}{13}\sqrt{2}\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$

۱۴) در مدار زیر:

الف) جریان بار در حالت ماندگار را حساب کنید.

ب) توان راکتیو بار را بدست آورید.

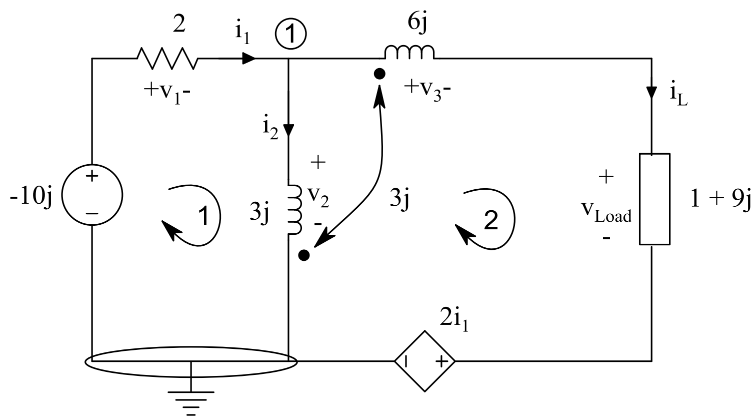


$V_S(t) = 10\sqrt{2}\sin(3t)$

برای سادگی محاسبات بهتر است مقدار موثر $V_s(t)$ را لحاظ کنیم:

$V_{S(rms)}(t) = \frac{10\sqrt{2}\sin(3t)}{\sqrt{2}} = 10\sin(3t)$

الف) رسم مدار در حوزه فازور:



Kcl 1: $i_1 = i_L + i_2$ (1)

Kvl 1: $v_1 + v_2 + 10j = 0 \rightarrow 2i_1 + 3ji_2 - 3ji_L + 10j = 0$ (2)

Kvl 2: $v_3 + v_{Load} + 2i_1 - v_2 = 0 \rightarrow 6ji_L - 3ji_2 + (1 + 9j)i_L + 2i_1 - (3ji_2 - 3ji_L) = 0$

$\rightarrow (1 + 18j)i_L - 6ji_2 + 2i_1 = 0$ (3)

(1),(2),(3) $\rightarrow i_L = \frac{-19/5 - 111/5j}{128/125}$

$i_L(t) = \frac{\sqrt{12812/5}}{128/125}\cos(3t + tg^{-1}(\frac{111/5}{19/5}))$

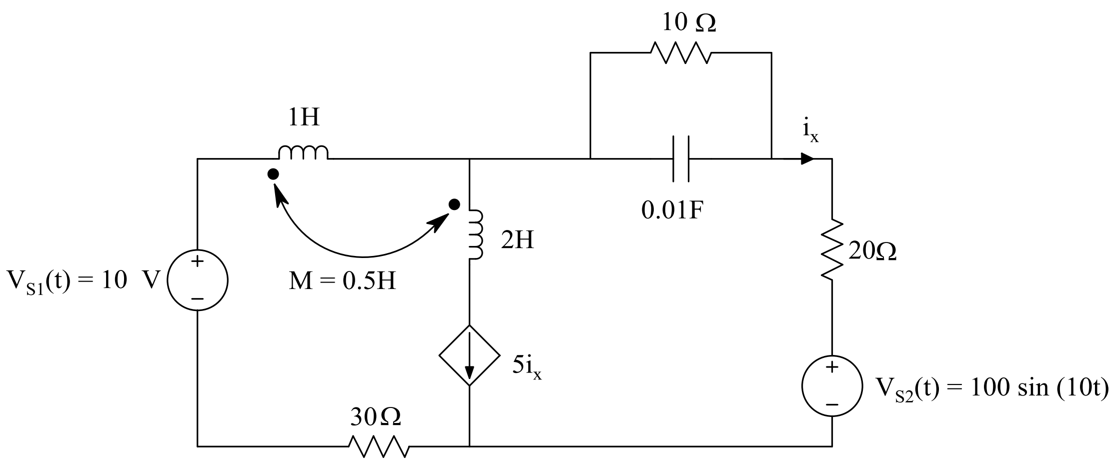
ب)

$V_{Load} = i_L Z_{load} = (\frac{-19/5 - 111/5j}{128/125})(1 + 9j) = \frac{984-287j}{128/125} = 7/68 - 2/24j$

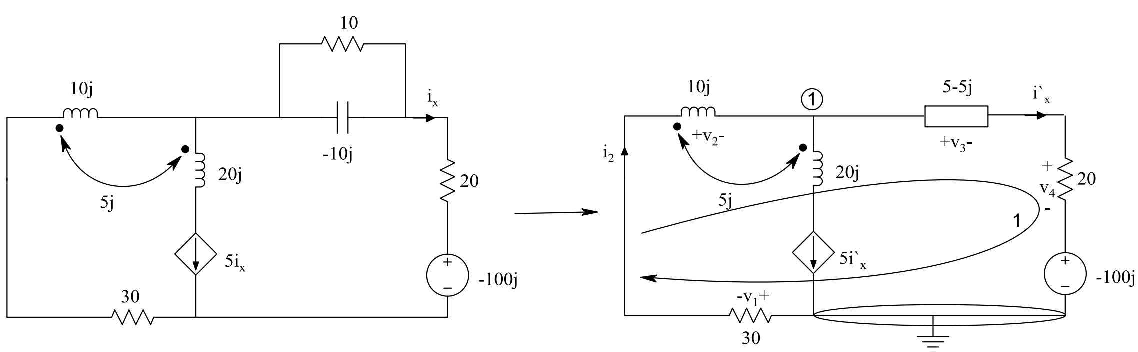
$S_{Load} = V_{Load}\, i^*_L = (7/68 - 2/24j)(\frac{-19/5 + 111/5j}{128/125}) = \frac{100+900j}{128/125}$

$Q_{Load} = \frac{900}{128/125} \cong 7/02$ var

۱۵) در مدار زیر $i_x(t)$ را در حالت ماندگار حساب کنید.



رسم مدار در حوزه فازور با $\omega_1 = 10$



Kcl 1: $i_2 = 5i'_x + i'_x \rightarrow i_2 = 6i'_x \quad (1)$

Kvl 1: $v_2 + v_3 + v_4 - 100j + v_1 = 0$

$\rightarrow 10ji_2 + 5j\,(5i'_x) + (5-5j)(i'_x) + 20i'_x - 100j + 30i_2 = 0$

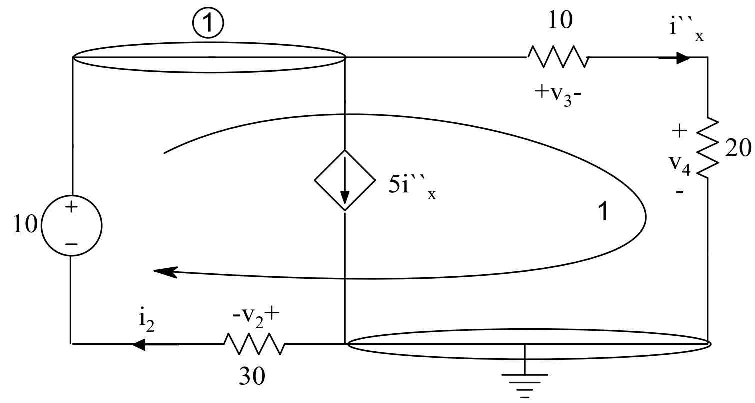
$\rightarrow (5 + 4j)\, i'_x + (6 + 2j)\, i_2 = 20j \quad (2)$

(1),(2) $\rightarrow (5 + 4j)\, i'_x + (6 + 2j)(6i'_x) = 20j \rightarrow (41 + 16j)\, i'_x = 20j$

$\rightarrow i'_x = \frac{20j}{41+16j}$

$i'_x(t) = \frac{20}{\sqrt{1937}} \cos\left(10t + \frac{\pi}{2} - tg^{-1}\left(\frac{16}{41}\right)\right)$

رسم مدار در حوزه فازور با $\omega_2 = 0$



Kcl 1: $i_2 = 5i''_x + i''_x \rightarrow i_2 = 6i''_x$ (1)

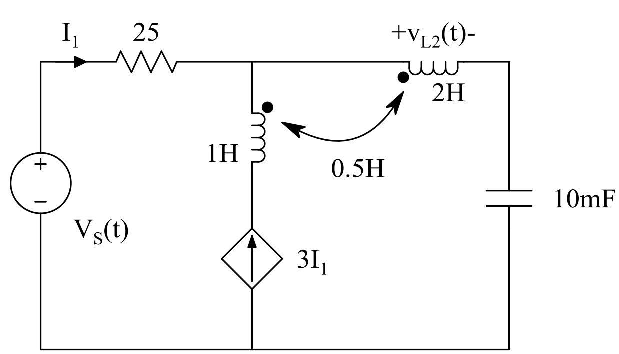
Kvl 1: $v_3 + v_4 + v_2 - 10 = 0 \rightarrow 10i''_x + 20i''_x + 30i_2 - 10 = 0$

$\rightarrow 30i''_x + 30i_2 = 10$ (2)

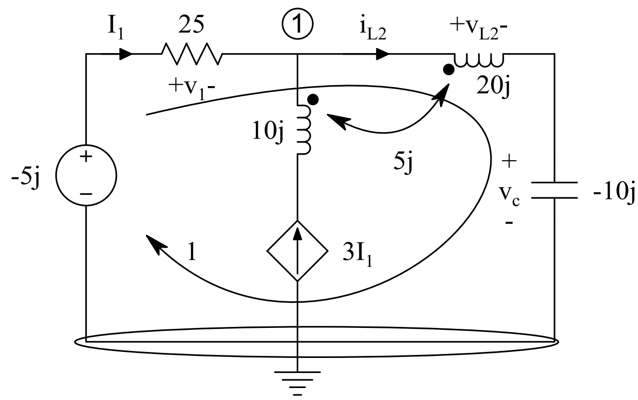
(1),(2) $\rightarrow 30i''_x + 180i''_x = 10 \rightarrow 210i''_x = 10 \rightarrow i''_x = \frac{1}{21}$

$i_x(t) = i'_x(t) + i''_x(t) = \frac{20}{\sqrt{1937}} \cos\left(10t + \frac{\pi}{2} - tg^{-1}\left(\frac{16}{41}\right)\right) + \frac{1}{21}$

۱۶) مقدار $v_{L2}(t)$ را در حالت دائمی (ماندگار) محاسبه کنید.



$V_S(t) = 5 \sin(10t)$



Kcl 1: $I_1 + 3I_1 = iL_2 \rightarrow 4I_1 = i_{L2}$ (1)

Kvl 1: $v_1 + v_{L2} + v_c + 5j = 0 \rightarrow 25I_1 + 20ji_{L2} - 15jI_1 - 10ji_{L2} + 5j = 0$

$\rightarrow (25 - 15j)\, I1 + 10ji_{L2} + 5j = 0$ (2)

(1),(2) $\rightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{-1-j}{10} \\ i_{L2} = \frac{-2-2j}{5} \end{cases}$

$v_{L2} = 20ji_{L2} - 5j\,(3I_1) = 20j\left(\frac{-2-2j}{5}\right) - 15j\left(\frac{-1-j}{10}\right) = \frac{-13-13j}{2}$

$v_{L2}(t) = \frac{13\sqrt{2}}{2}\cos\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)$

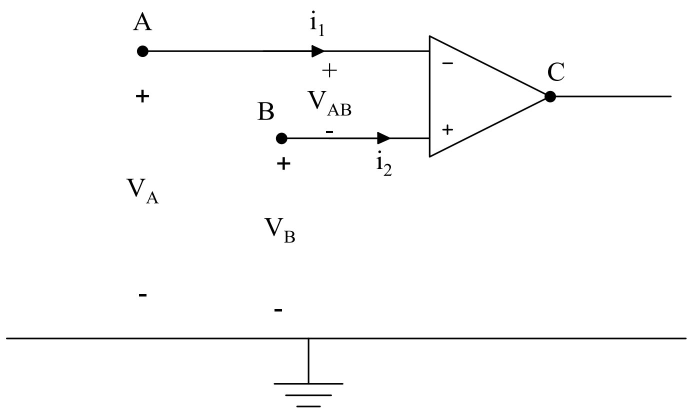
فصل ششم:

تقویت کننده‌های عملیاتی (Op-Amp)

فصل ششم:

تقویت کننده‌های عملیاتی (Op-Amp)

Op-Ampها یک نوع IC هستند. مشخصه الکتریکی این عنصر به صورت زیر است.



Op-Amp یک نوع IC است و از قطعات الکترونیکی است. از آن‌جا که حل مسائل دارای Op-Amp بسیار ساده است و این قطعه کاربرد زیادی دارد، روش حل مدارهای شامل op-Amp در درس مدارهای الکتریکی I ارائه می‌شود.

روابط Op-Amp ایده آل به صورت زیر است:

$$i_1 = i_2 = 0 \ , \ V_A = V_B \rightarrow V_{AB} = V_A - V_B = 0$$

هنگام حل مسائل در مدارهای دارای Op-Ampلازم است به نکات زیر دقت شود:

Kvl و kvl2 ممنوع است.

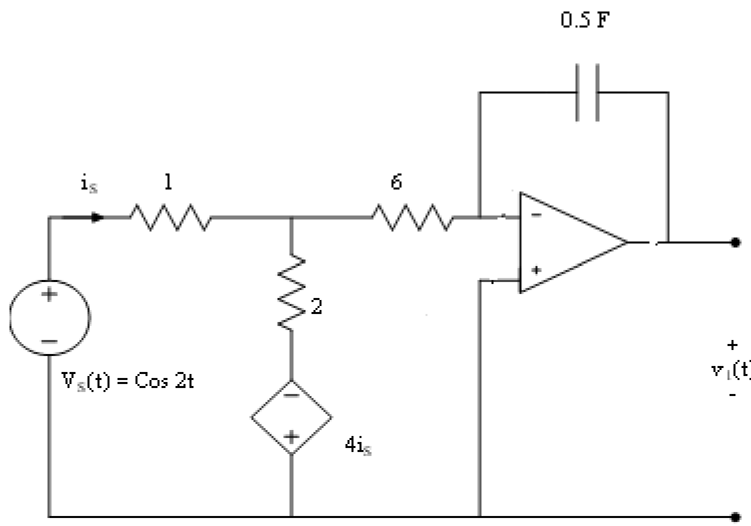
در نقطه خروجی Op-Amp، kcl نمی نویسیم. (نقطه C)

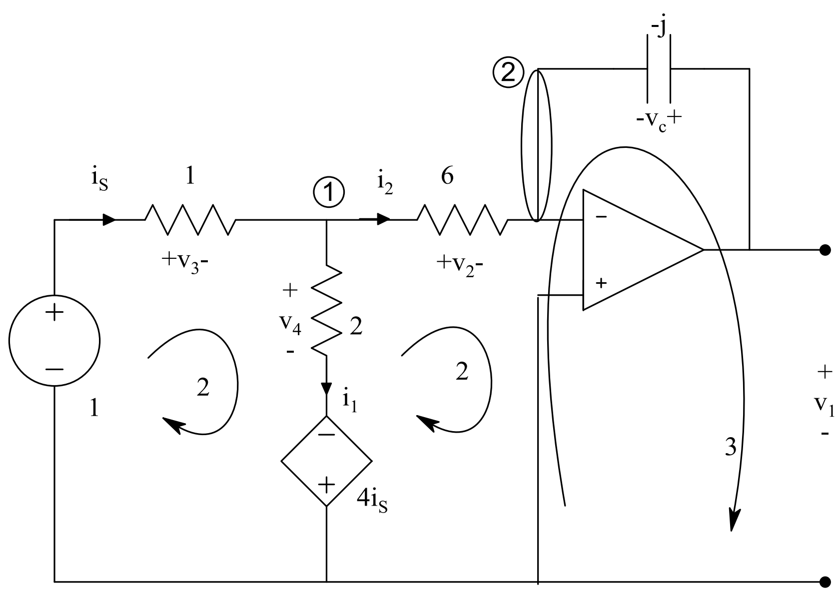
بهترین راه حل مسائل Op-Amp این است که در نقاط A یا B ، kcl بنویسیم.

با ذکر مثالی به شرح تقویت کننده‌های عملیاتی Op-Amp (Operational Amplifier) می‌پردازیم.

مثال۱)

در مدار شکل زیر پاسخ حالت دائمی سینوسی $v_1(t)$ را به دست آورید.





Kcl 1: $i_s = i_1 + i_2 \rightarrow\ v_3 = \frac{v_4}{2} + \frac{v_2}{6}$ (1)

توجه داشته باشید که برای گره ۲ ، kcl نمی‌نویسیم زیرا سری است. چون جریان ورودی به Op-Amp صفر است.

Kvl 1: $v_3 + v_4 - 4i_s - 1 = 0 \rightarrow v_3 + v_4 - 4v_3 - 1 = 0 \rightarrow v_4 - 3v_3 - 1 = 0$ (2)

Kvl 2: $v_2 + 4i_s - v_4 = 0 \rightarrow v_2 + 4v_3 - v_4 = 0$ (3)

Kvl 3: $v_1 - v_c = 0 \rightarrow v_1 = v_c$ (4)

$i_2 = \frac{v_2}{6} = \frac{-v_c}{-j} \rightarrow v_2 = -6jv_c$ (5)

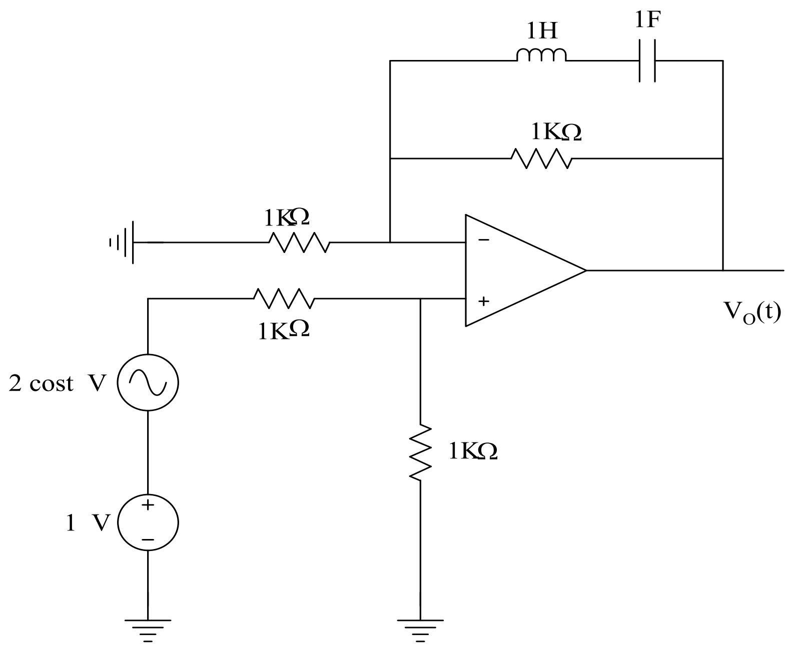
(1),(2),(3),(5) $\rightarrow v_c = 0/5j$

(4) $\rightarrow v_1 = v_c = 0/5j$

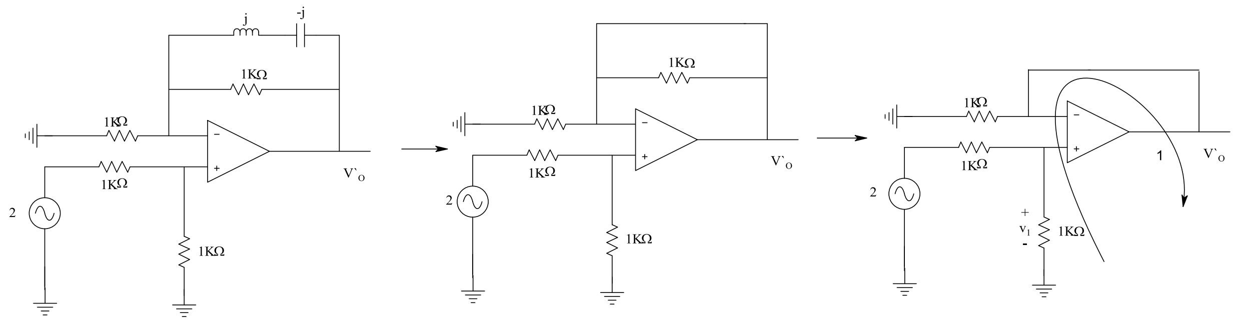
$v_1(t) = 0/5 \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$

مثال۲)

در مدار زیر پاسخ نهایی $V_o(t)$ را بیابید.



رسم مدار در حوزه فازور با $\omega_1 = 1$



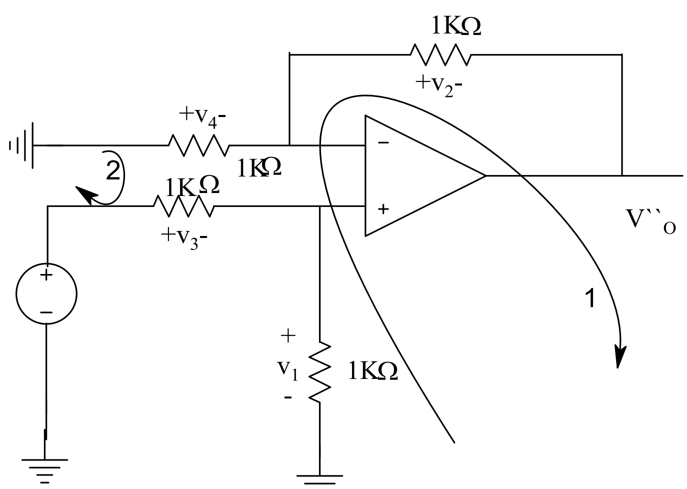
نکته: مقاومت موازی با اتصال کوتاه از مدار حذف می‌شود.

Kvl 1: $V'_O - v_1 = 0$ (1)

$v_1 = \frac{1}{1+1} \times 2 = 1$ (2)

(1),(2) $\rightarrow V'_O = 1 \rightarrow V'_O(t) = \cos t$

رسم مدار در حوزه فازور با $\omega_2 = 0$



Kvl 1: $v_2 + V''_O - v_1 = 0$ (1)

$v_1 = v_3 = \frac{1}{1+1} \times 1 = \frac{1}{2}$ (2)

Kvl 2: $v_4 - v_3 + 1 = 0 \rightarrow v_4 = \frac{-1}{2}$

$\frac{v_4}{1} = \frac{v_2}{1} \rightarrow v_2 = \frac{-1}{2}$ (3)

(1),(2),(3) $\rightarrow V''_O = 1 \rightarrow V''_O(t) = 1$

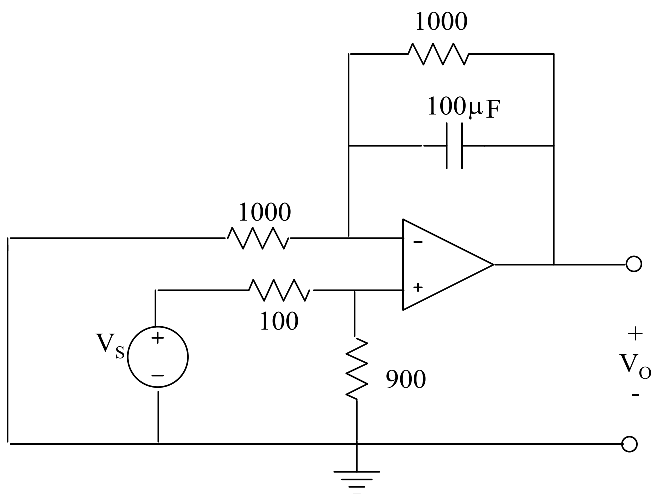
در نهایت از جمع آثار داریم:

$V_O(t) = V'_O(t) + V''_O(t) = 1 + \cos t$

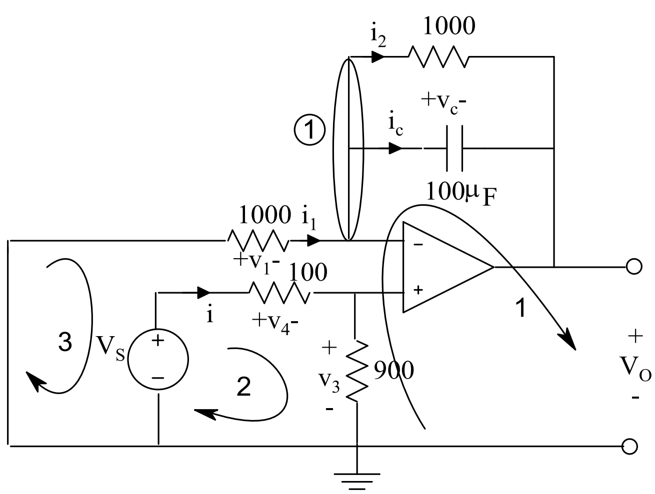
تمرین‌های حل شده

فصل ششم

۱) در مدار شکل زیر معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده بین V_O و V_S را بیابید.



(مقاومت‌ها بر حسب اهم)



Kcl 1: $i_1 = i_2 + i_c \rightarrow \frac{v_1}{1000} = \frac{v_c}{1000} + 10^{-4}\frac{dv_c}{dt} \rightarrow v_1 = v_c + 0/1\frac{dv_c}{dt}$ (1)

Kvl 1: $v_c + V_O - v_3 = 0$ (2)

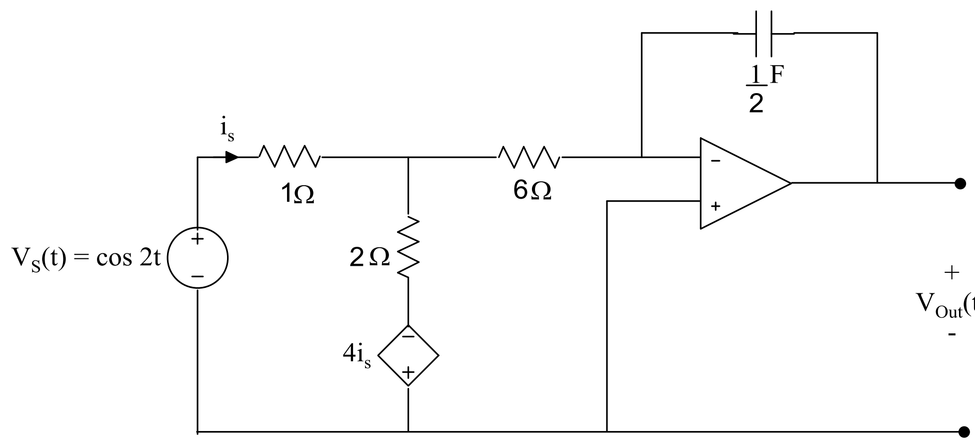
$$\left.\begin{array}{l} kvl\ 2: v_4 + v_3 - V_S = 0 \\ i = \frac{v_4}{100} = \frac{v_3}{900} \rightarrow v_4 = \frac{v_3}{9} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{10}{9} v_3 = V_S \rightarrow v_3 = \frac{9}{10} V_S \quad (3)$$

Kvl 3: $v_1 - v_4 + V_S = 0 \rightarrow v_1 - \frac{v_3}{9} + V_S = 0 \rightarrow v_1 - \frac{1}{10} V_S + V_S = 0$

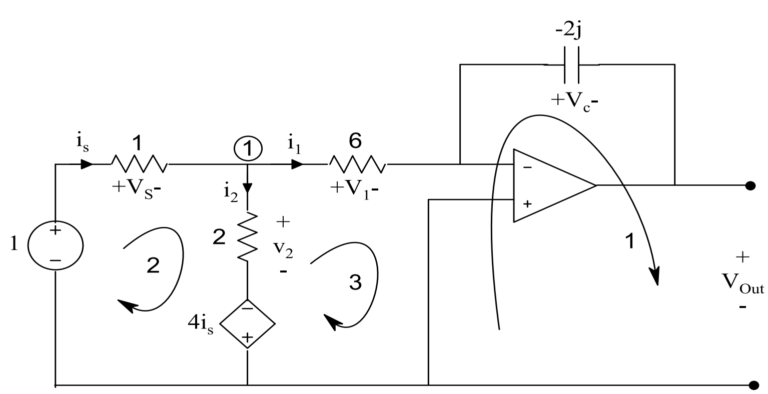
$\rightarrow\ v_1 = \frac{-9}{10} V_S \quad (4)$

$(1),(2),(3),(4) \rightarrow \frac{dV_O}{dt} + 10V_O = 18V_S$

۲) در مدار شکل زیر پاسخ حالت دائمی سینوسی $V_{Out}(t)$ را به دست آورید.



رسم مدار در حوزه فازور:



Kvl 1: $v_c + V_{Out} = 0 \rightarrow V_{Out} = -v_c \quad (1)$

Kcl 1: $i_s = i_1 + i_2 \quad (2)$

Kvl 2: $v_S + v_2 - 4i_s - 1 = 0 \rightarrow i_s + 2i_2 - 4i_s - 1 = 0$

$\rightarrow$ $-3i_s + 2i_2 - 1 = 0$ (3)

Kvl 3: $v_1 + 4i_s - v_2 = 0 \rightarrow 6i_1 + 4i_s - 2i_2 = 0$ (4)

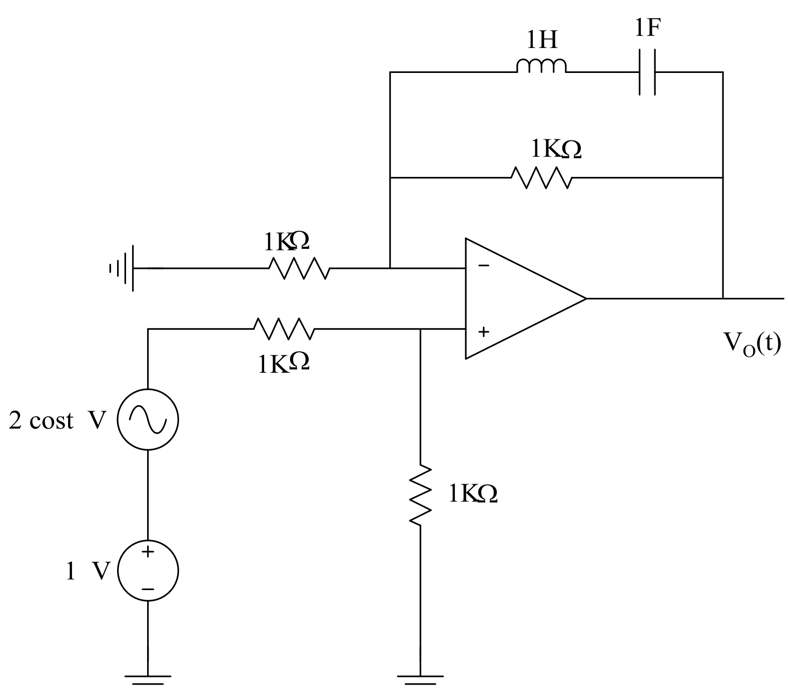
(2),(3),(4) $\rightarrow$ $i_1 = \frac{1}{2}$

$v_c = i_1 (-2j) = \frac{1}{2} (-2j) = -j$

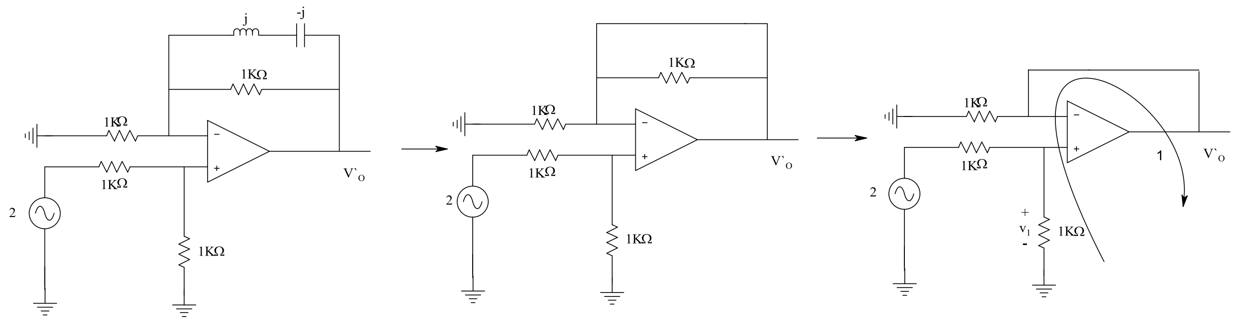
(1) $\rightarrow$ $V_{Out} = -v_c = j$

$V_{Out}(t) = \cos (2t + \frac{\pi}{2})$

۳) در مدار زیر پاسخ نهایی $V_o(t)$ را بیابید.



رسم مدار در حوزه فازور با $\omega_1 = 1$



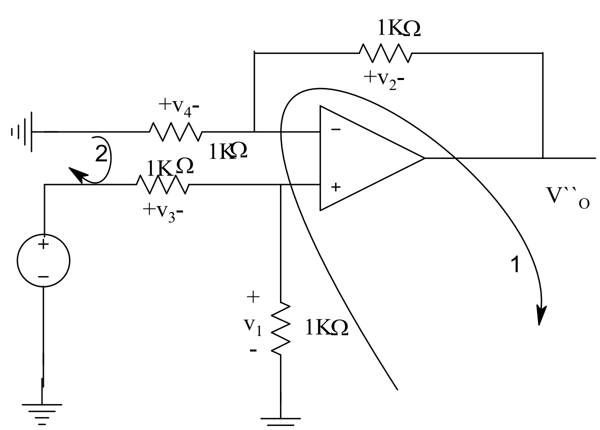
نکته: مقاومت موازی با اتصال کوتاه از مدار حذف می‌شود.

Kvl 1: $V'_O - v_1 = 0 \quad (1)$

$v_1 = \frac{1}{1+1} \times 2 = 1 \quad (2)$

$(1),(2) \rightarrow V'_O = 1 \rightarrow V'_O(t) = cost$

رسم مدار در حوزه فازور با $\omega_2 = 0$



Kvl 1: $v_2 + V''_O - v_1 = 0 \quad (1)$

$$v_1 = v_3 = \frac{1}{1+1} \times 1 = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\text{Kvl 2:} \quad v_4 - v_3 + 1 = 0 \ \rightarrow \ v_4 = \frac{-1}{2}$$

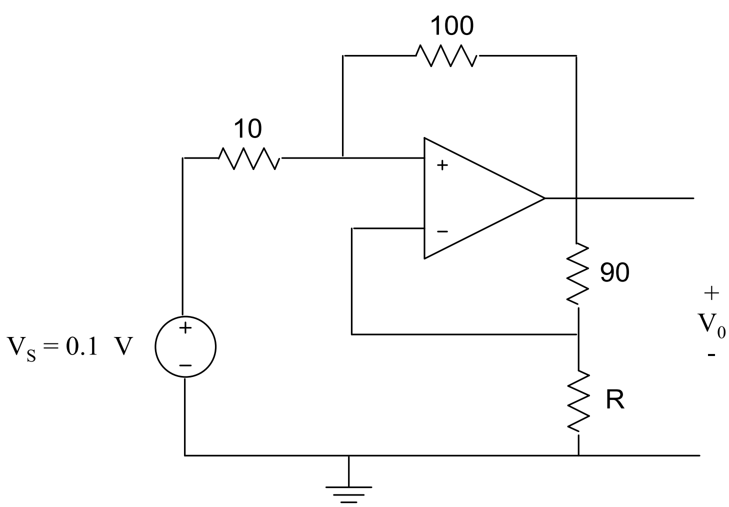
$$\frac{v_4}{1} = \frac{v_2}{1} \ \rightarrow \ v_2 = \frac{-1}{2} \quad (3)$$

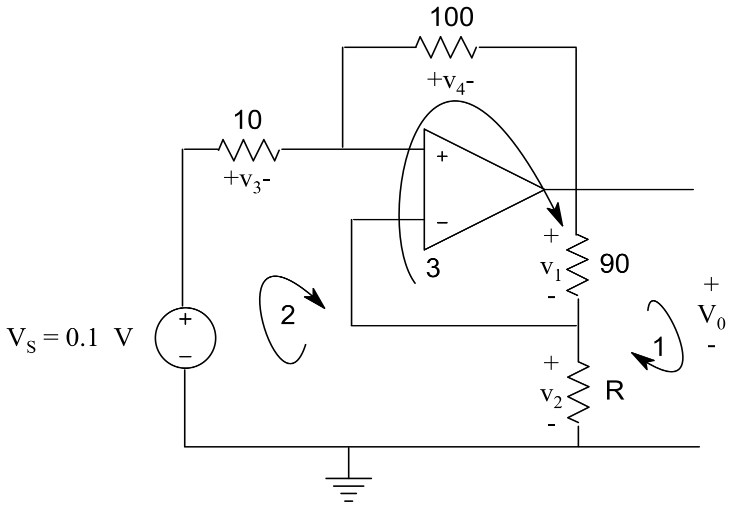
$$(1),(2),(3) \ \rightarrow V''_O = 1$$

در نهایت از جمع آثار داریم:

$$V_O(t) = V'_O(t) + V''_O(t) = 1 + \cos t$$

۴) در مدار زیر ولتاژ V_O را محاسبه کنید. سپس مقدار مقاومت R را به گونه‌ای انتخاب کنید که مقدار V_O=20v شود.





Kvl 1: $V_0 - v_2 - v_1 = 0 \rightarrow V_0 = v_2 + v_1$ (1)

Kvl 2: $v_2 - 0/1 + v_3 = 0$ (2)

Kvl 3: $v_4 + v_1 = 0$ (3)

$i = \frac{v_3}{10} = \frac{v_4}{10}$ (4)

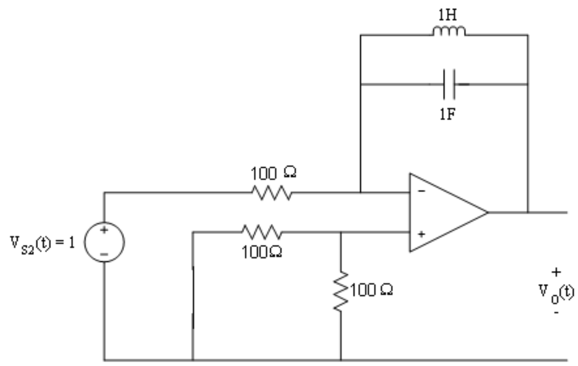
$i_2 = \frac{v_1}{90} = \frac{v_2}{R} \rightarrow v_1 = \frac{90}{R} v_2$ (5)

(1),(2),(3),(4),(5) $\rightarrow V_O = \frac{R+90}{10\,(R-90)}$

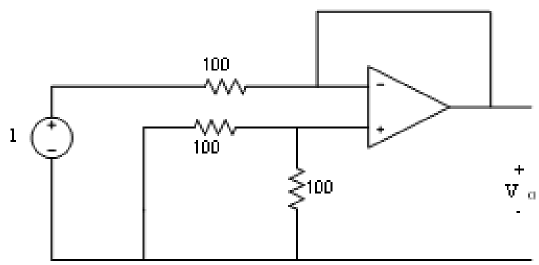
if $V_O = 20 \rightarrow 20 = \frac{R+90}{10\,(R-90)} \rightarrow 200R - 18000 = R + 90 \rightarrow 199R = 18090$

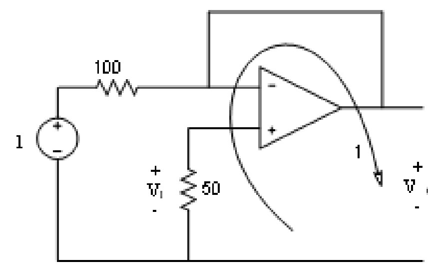
$\rightarrow R \cong 90/9$

۵) پاسخ حالت دائمی سینوسی $V_O(t)$ را بدست آورید.



رسم مدار در حوزه فازور با $\omega = 0$





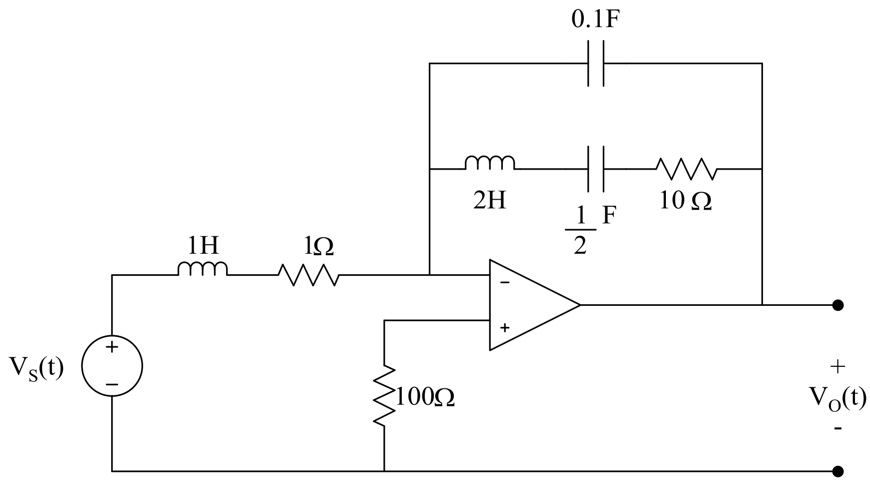
Kvl 1: $V_O - v_1 = 0 \rightarrow V_O = v_1$ (1)

$v_1 = 0$ (2)

(1),(2) $\rightarrow V_O = 0$

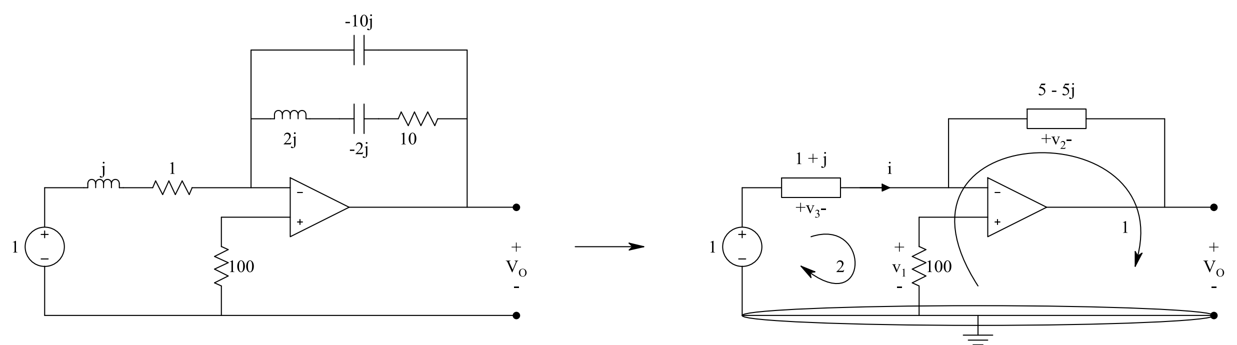
$V_O(t) = 0$

۶) ولتاژ $V_O(t)$ را در حالت دائمی، حساب کنید.



$V_S(t) = \cos(t)$

رسم مدار در حوزه فازور:



Kvl 1: $v_2 + V_O - v_1 = 0$ (1)

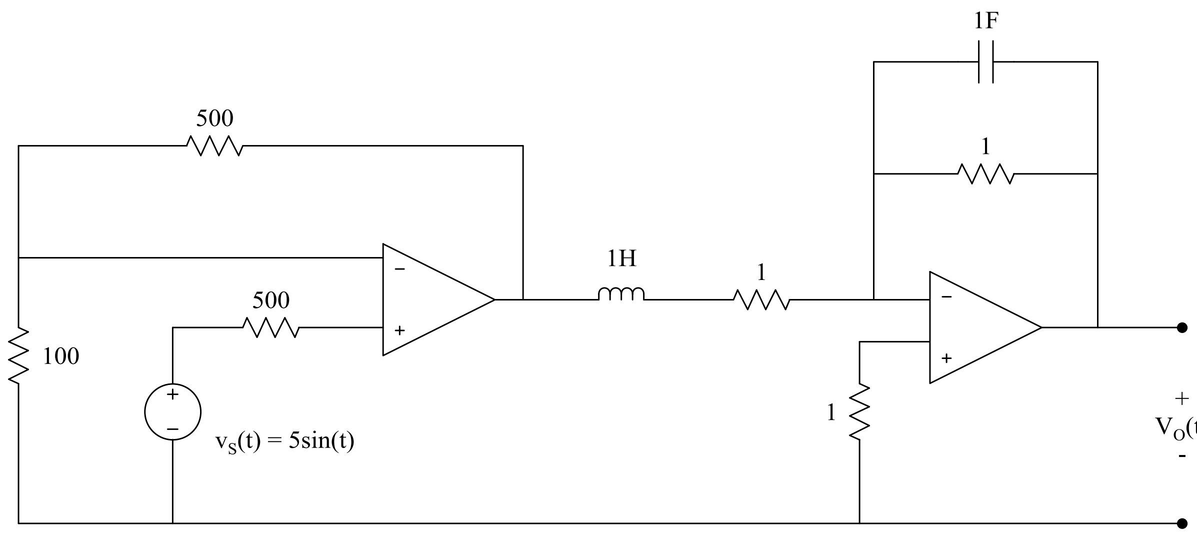
Kvl 2: $v_3 + v_1 - 1 = 0$ (2)

$i = \frac{v_3}{1+j} = \frac{v_2}{5-5j} \rightarrow v_3 = \frac{j}{5} v_2$ (3)

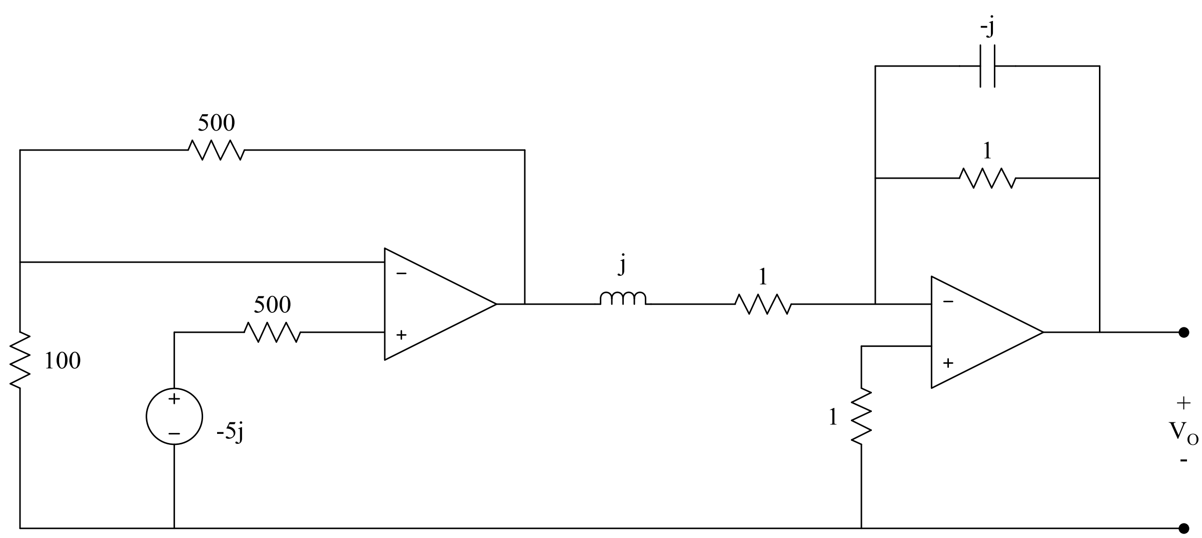
$v_1 = 0$ (4)

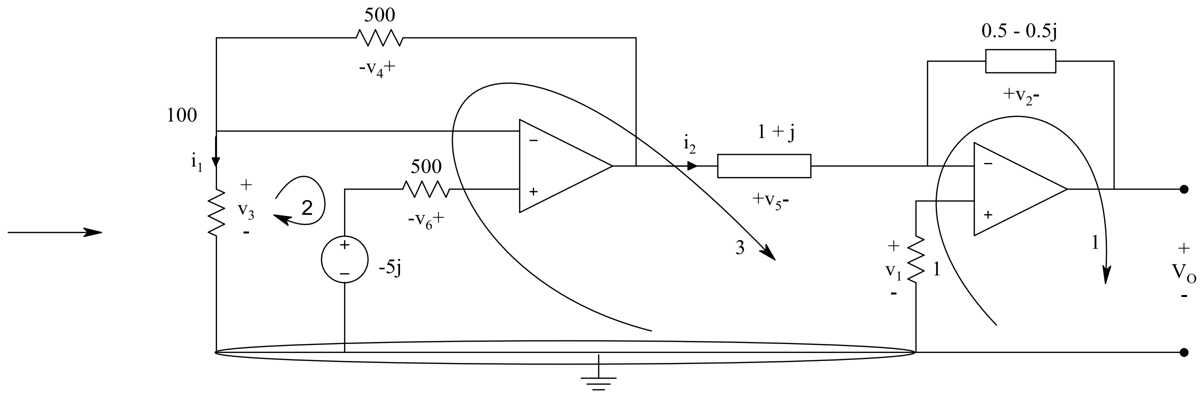
(1),(2),(3),(4) $\rightarrow V_O = 5j \rightarrow V_O(t) = 5\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$

۷) برای مدار زیر، ولتاژ $V_O(t)$ را محاسبه کنید. توان مختلط منبع مستقل، چه قدر است؟



رسم مدار در حوزه فازور





$$kvl\ 1:\ \left.\begin{aligned} v_2 + V_O - v_1 &= 0 \\ v_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow\ V_O = -\,v_2 \quad (1)$$

$$kvl\ 2:\ \left.\begin{aligned} v_6 - 5j - v_3 &= 0 \\ v_6 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow\ v_3 = -5j$$

$i_1 = \frac{v_4}{500} = \frac{v_3}{100} \ \rightarrow\ v_4 = 5v_3 = -25j$

Kvl 3: $v_5 + v_1 + 5j - v_6 - v_4 = 0 \ \rightarrow\ v_5 + 5j + 25j = 0 \ \rightarrow\ v_5 = -\,30j$

$i_2 = \frac{v_5}{1+j} = \frac{v_2}{0.5-0.5j} \ \rightarrow\ v_2 = (\,0/5 - 0/5\,j\,)\,(\,\frac{-30j}{1+j}\,) = -\,15$

$(1)\ \rightarrow V_O = -v_2 = 15$

$V_O(t) = 15 \cos(\,t\,)$

$S_{\text{منبع}} = \frac{1}{2}\,(\,-\,5j\,)\,(\,0\,) = 0$