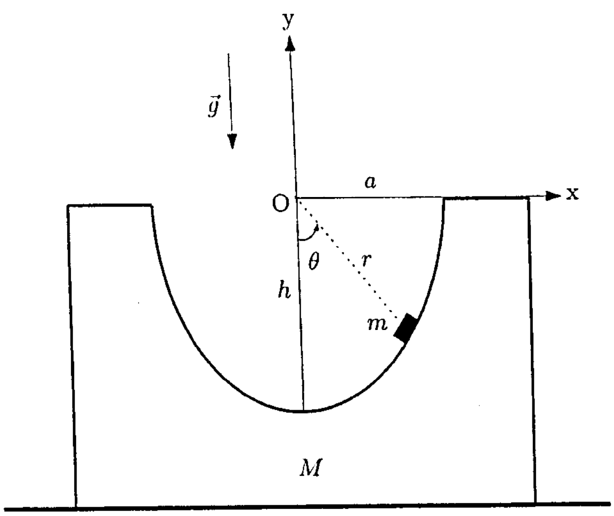
بنام خدا

مدت آزمون: ۲۴۰

تاریخ: ۹۳/۵/۱۶

امتحان نخست دوره تابستانی المپیاد فیزیک ۹۳

مسئله‌ی 1)



در دستگاه شکل مقابل جرم کوچک m از حال سکون در زاویه $\theta = \pi/2$ رها می‌شود و در صفحه‌ی قائم داخل کاسه‌ای به جرم M سر می‌خورد. زاویه θ به سمت راست امتداد قائم مثبت و به سمت چپ آن منفی است. سطح اتکای کاسه با میزی که روی آن قرار دارد، افقی است و کلیه سطوح بدون اصطکاک هستند. سطح ظرف طوری تراش خورده است که طول r نشان داده شده در شکل تابع معین $r(\theta)$ است که $r(0) = a$، $r(\pi/2) = h$ و $r(\theta)$ تابعی زوج است. فرض کنید T_m، T_M و T به ترتیب انرژی جنبشی جرم m، انرژی جنبشی جرم M و انرژی جنبشی کل دستگاه باشد و داشته باشیم $T = \frac{1}{2} m f(\theta) \dot{\theta}^2$.

a) نسبت T_m/T_M را بر حسب θ، r و $r' \equiv \dfrac{dr}{d\theta}$ به دست آورید. (۳/۵ نمره)

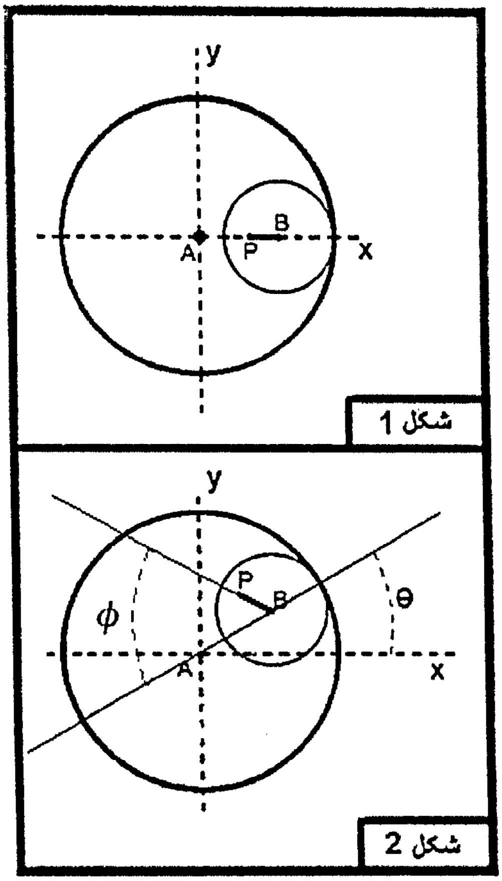
b) تابع $f(\theta)$ را بر حسب θ، r و $r' \equiv \dfrac{dr}{d\theta}$ به دست آورید. (۱/۵ نمره)

c) نیروی عمودی سطح $N(\theta)$ بین m و M را بر حسب θ، r، $r' \equiv \dfrac{dr}{d\theta}$، r''، f و $f' \equiv \dfrac{df}{d\theta}$ به دست آورید. (۵ نمره)

طرح از دکتر شیرزاد

لطفاً توجه کنید که مسئله دو صفحه است.

مسئله ی 2)



یک دایره به شعاعِ r مطابقِ شکل درونِ دایره‌ای بزرگ‌تر به شعاعِ $R = \alpha r$ قرار دارد، که α ثابتی مثبت و بزرگ‌تر از 1 است. دایره‌ی کوچک شروع به غلتشِ محض در داخلِ دایره‌ی بزرگ می‌کند. مبدأ مختصات منطبق بر مرکزِ دایره‌ی بزرگ است. دایره‌ی بزرگ ثابت است و نمی‌چرخد.

یک میله مانند پره‌ی چرخ به دایره‌ی کوچک وصل شده است. میله در ابتدا در حالتِ افقی قرار دارد. مرکزِ دایره‌ی بزرگ را با A، مرکزِ دایره‌ی کوچک را با B و نقطه‌ی انتهایی میله را با P نشان می‌دهیم. مختصات P در ابتدا $R - r - \beta r$ در راستای x است، که β ثابت است. β می‌تواند مثبت یا منفی باشد (شکل با فرضِ β مثبت است). در هر لحظه، زاویه‌ای را که خطِ واصلِ نقاطِ A و B با افق می‌سازد با θ نشان می‌دهیم. زاویه‌ای که امتدادِ میله (یعنی خطِ واصلِ B و P) با خطِ واصلِ A و B در جهتِ ساعتگرد می‌سازد، با ϕ نشان می‌دهیم. در ابتدا (شکل 1)، هم $\theta = 0$ و هم $\phi = 0$ است. در همه‌ی قسمت‌های مسئله، پاسخ را تا حدِ امکان ساده کنید.

از این به بعد منظور از ثوابت مسئله، مجموعه‌ی r، α و β است.

الف) (0.5 نمره) وقتی دو جسم (یا دو منحنی) روی هم غلتشِ محض می‌کنند، در هر لحظه، طولِ قسمتی از هر کدام از خمها که با خمِ دیگر تا آن لحظه در تماس بوده است با هم برابرند. با استفاده از این نکته (یا از هر روش دیگری)، ϕ را بر حسبِ θ و ثوابت بنویسید.

ب) (2.5 نمره) مختصاتِ x و y نقطه‌ی P را به صورتِ تابعی از θ و ثوابت بیابید. همچنین فاصله‌ی نقطه‌ی P از نقطه‌ی A را به صورتِ تابعی از θ و ثوابت بیابید.

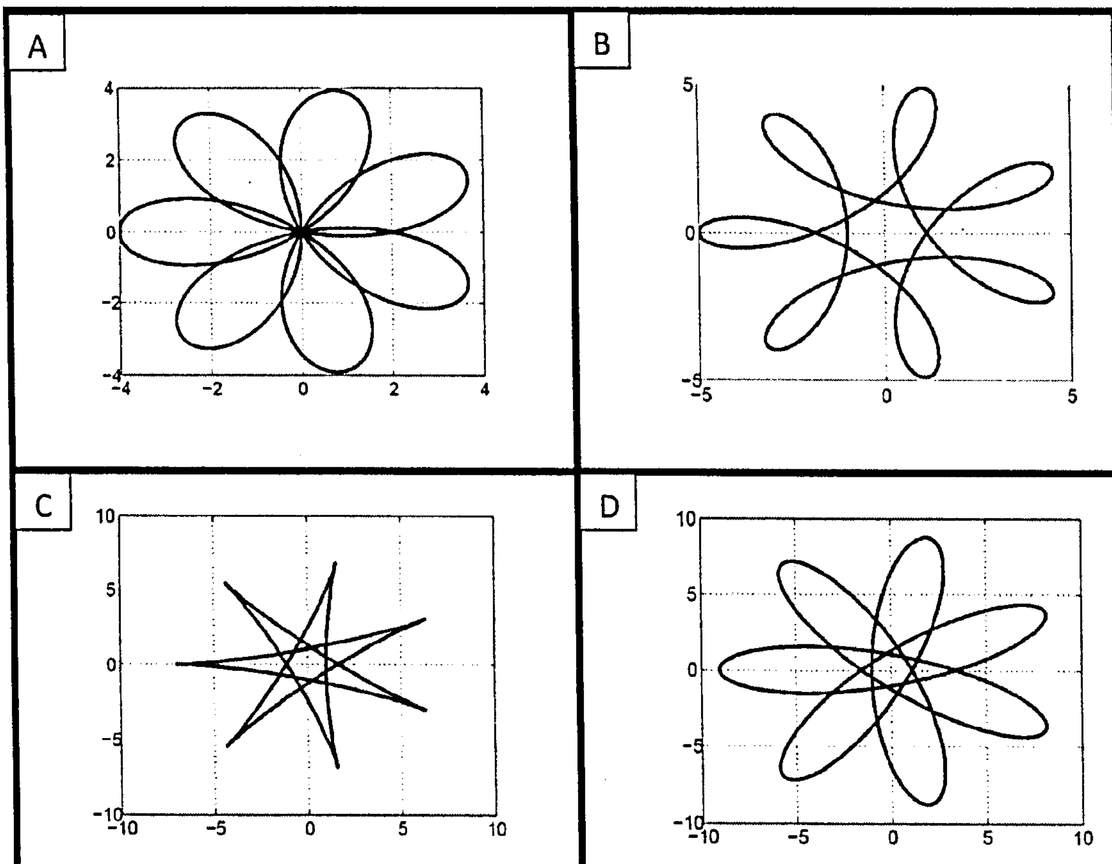
پ) (1.5 نمره) اگر θ با آهنگِ ثابت افزایش یابد، یعنی داشته باشیم $\dot{\theta} = \omega$ که در آن ω ثابتی مثبت است، بردارِ سرعتِ نقطه‌ی P و بزرگی آن را بر حسبِ θ، ω و ثوابت مسئله بیابید.

ت) (1.5 نمره) اگر داشته باشیم $\alpha = 2$ و $\beta = -1$، بردارِ سرعت و بزرگی سرعتِ نقطه‌ی P را بر حسبِ θ، ω و r بیابید. مسافتِ کلِ طی شده توسطِ نقطه‌ی P را در یک تناوبِ کاملِ θ بر حسب r بنویسید.

ث) (1 نمره)اگر داشته باشیم $\alpha = 2$ و $\beta \neq -1,1$، مسیرِ نقطه‌ی P چه شکلِ هندسی‌ای است؟ دلیل ارائه کنید.

ج) (1 نمره)اگر داشته باشیم $\alpha = 3$ و $\beta = 1$، طول مسیری را که P در یک تناوبِ کاملِ θ طی می‌کند بر حسب r بنویسید.

چ) (2 نمره) هر کدام از چهار شکلِ زیر، مربوط به یکی از مجموعه پارامترهایی است که در جدول داده شده است. مشخص کنید کدام مسیر مربوط به کدام مجموعه است. دلیل ارائه کنید.



مجموعه‌های پارامترها	
$r = 3, \alpha = \frac{7}{3}, \beta = 1$	$r = 3, \alpha = \frac{7}{3}, \beta = \frac{5}{3}$
$r = 5, \alpha = \frac{7}{5}, \beta = \frac{3}{5}$	$r = 5, \alpha = \frac{7}{5}, \beta = \frac{2}{5}$

طرح از آقای فتوحی

مسئله‌ی 3)

تابع توزیع سرعت ذرات یک گاز ایده‌آل در دمای T

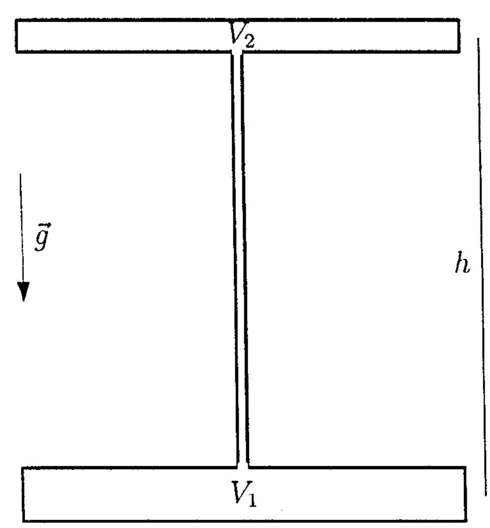
$$P(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-mv^2/2kT}$$

است که m جرم یک ذره و $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ است. احتمال این که مؤلفه‌های سرعت یک ذره بین v_x و $v_x + dv_x$، v_y و $v_y + dv_y$، v_z و $v_z + dv_z$ باشد برابر است با $P(\vec{v})dv_x dv_y dv_z$ و $\int_{v_z=-\infty}^{+\infty}\int_{v_y=-\infty}^{+\infty}\int_{v_x=-\infty}^{+\infty} P(\vec{v})dv_x dv_y dv_z = 1$.

اگر ذرات گاز آزاد نباشند و انرژی پتانسیل برهم‌کنش هر ذره در یک میدان خارجی $U(\vec{r})$ باشد که $\vec{r}$ بردار مکان ذره نسبت به یک مبدأ مختصات است، آنگاه تابع توزیع ذرات به صورت زیر تعمیم داده می‌شود

$$P(\vec{r},\vec{v}) = C\ \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-[mv^2/2+U(\vec{r})]/kT}$$

و $P(\vec{r},\vec{v})dxdydzdv_x dv_y dv_z$ احتمال وجود یک ذره در عنصر حجم $dxdydz$ حول مکان $\vec{r}$ با مؤلفه‌های سرعتی بین v_x و $v_x + dv_x$، v_y و $v_y + dv_y$، v_z و $v_z + dv_z$ است.



ظرفی مطابق شکل شامل دو قسمت به حجم V_1 و V_2 است که توسط مجرایی به هم وصل شده‌اند و روی هم رفته N ذره گاز هر یک به جرم m در آن‌ها در دمای T و در حال تعادل قرار دارد. حجم مجرایی که دو ظرف را به هم متصل کرده در مقایسه با حجم دو قسمت ظرف آنقدر کوچک است که از ذرات گازی که در آن قرار دارند می‌توان صرفنظر کرد. ذرات گاز با هم برهم‌کنش ندارند فقط انرژی پتانسیل گرانشی هر یک از ذراتی که در حجم V_2 هستند نسبت به هر یک ذراتی که در حجم V_1 هستند به اندازه‌ی mgh بیشتر است.

آ) ثابت C را به دست آورید. (۲ نمره)

ب) تعداد ذرات و فشار در حجم V_1 و V_2 را به دست آورید. (۳ نمره)

پ) انرژی داخلی گاز و ظرفیت گرمایی گاز در حجم ثابت را به دست آورید. (۳ نمره)

ت) در دماهای خیلی پایین $mgh/kT \gg 1$ و در دماهای خیلی بالا $mgh/kT \ll 1$ کمیت‌های خواسته شده در قسمت ب) و پ) را به دست آورید. (۲ نمره)

طرح از دکتر سعادت

مسئله ۴)

دو قسمت این مسئله از هم مستقل اند.

آ) چه کسری از ملکول‌های H_2 و N_2 در سطح زمین و ماه سرعت‌شان (در راستای شعاعی از مرکز به سمت بیرون) از سرعت فرار در سطح زمین و ماه بیشتر است؟ دما در سطح زمین و ماه را $300\ \mathrm{K}$ در نظر بگیرید. (۵ نمره)

ب) انرژی بستگی الکترون اتم هیدرون به هسته در حالت عادی $13.6\ \mathrm{eV}$ است. در دمای اتاق تعداد کمی از اتم‌های هیدروژن یونیزه هستند. در آزمایشگاه اگر بخواهیم تعداد زیادی یون هیدروژن تولید کنیم گاز را در محفظه‌ای که دارای یک آند و کاتد است قرار می‌دهیم و با برقراری اختلاف پتانسیل زیاد باعث ایجاد تخلیه الکتریکی در گاز می‌شویم. فرض کنید در اثر تخلیه الکتریکی الکترون‌هایی تولید می‌شوند که تندی آن‌ها از تابع توزیع ماکسول در دمای $20000\ \mathrm{K}$ تبعیت می‌کند. هر کدام از این الکترون‌ها که انرژی جنبشی‌شان مساوی یا بیشتر از انرژی بستگی الکترون به هسته باشد در برخورد به هر اتم هیدروژن آن را یونیزه می‌کنند. حساب کنید چند درصد این الکترون‌ها باعث یونیزه شدن اتم‌های هیدروژن می‌شوند. فرض کنید همه‌ی الکترون‌هایی که انرژی جنبشی کافی دارند در فرایند یونیزه کردن شرکت می‌کنند. (۵ نمره)

کمیت‌های عددی و یا روابط زیر ممکن است سودمند باشند:

جرم زمین: $5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$

شعاع زمین: $6.37 \times 10^{6}\ \mathrm{m}$

جرم ماه: $7.36 \times 10^{22}\ \mathrm{kg}$

شعاع ماه: $1.74 \times 10^{6}\ \mathrm{m}$

ثابت گرانش $6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/s^2 \cdot kg}$، ثابت بولتزمن $1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$ و عدد آووگادرو 6.02×10^{23} است.

جرم یک مول H_2 را $2\ \mathrm{g}$ و جرم یک مول N_2 را $28\ \mathrm{g}$ بگیرید.

$1\ \mathrm{eV} = 1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$

$$x^2 \mathrm{e}^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x^2} - \frac{1}{2\alpha}\frac{d}{dx}(x\mathrm{e}^{-\alpha x^2})$$

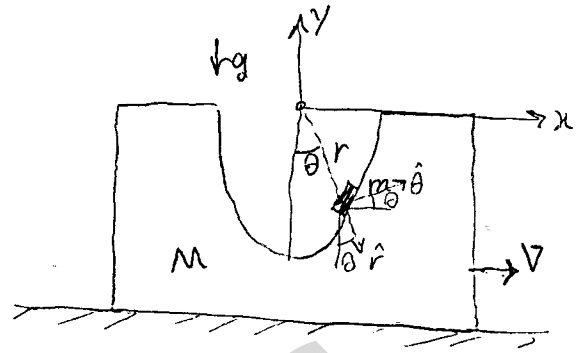
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_0} \mathrm{e}^{-x^2}dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}}(x_0 - x_0^3/3 + \cdots) & x_0 \ll 1 \\ 1 - \frac{\mathrm{e}^{-x_0^2}}{x_0\sqrt{\pi}}(1 - 1/2x_0^2 + \cdots) & x_0 \gg 1 \end{cases}$$

طرح از دکتر سعادت

$$\vec{v}_m^{rel} = \dot r\hat r + r\dot\theta\hat\theta = r'\dot\theta(\sin\theta\hat x - \cos\theta\hat y) + r\dot\theta(\cos\theta\hat x + \sin\theta\hat y)$$

مسئله ۱ - تکلیف ۵ (1)

a)



پایستگی تکانه در راستای x :
$$MV + m[V + \dot\theta(r'\sin\theta + r\cos\theta)] = 0$$

$$\Rightarrow (m+M)V + m\dot\theta(r'\sin\theta + r\cos\theta) = 0$$

$$\Rightarrow V = \frac{-m}{m+M}(r'\sin\theta + r\cos\theta)\dot\theta \qquad (1)$$

پایستگی انرژی :
$$0 = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m\left[(r\sin\theta - r'\cos\theta)^2\dot\theta^2 + \left(V + (r'\sin\theta + r\cos\theta)\dot\theta\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow 2mgr\cos\theta = (m+M)V^2 + 2mV\dot\theta(r'\sin\theta + r\cos\theta) + m\dot\theta^2(r^2 + r'^2)$$

$$(1) \Rightarrow 2mgr\cos\theta = \frac{m^2}{m+M}\dot\theta^2(r'\sin\theta + r\cos\theta)^2 - 2\frac{m^2}{m+M}\dot\theta^2(r'\sin\theta + r\cos\theta)^2 + m(r^2 + r'^2)\dot\theta^2$$

$$\Rightarrow 2gr\cos\theta = (r^2 + r'^2)\dot\theta^2 - \frac{m}{m+M}(r'\sin\theta + r\cos\theta)^2\dot\theta^2 \Rightarrow \dot\theta^2 = \frac{2gr\cos\theta}{r^2 + r'^2 - \frac{m}{m+M}(r\cos\theta + r'\sin\theta)^2} \qquad (2)$$

$$T_m = \frac{1}{2}m\left[(r\sin\theta - r'\cos\theta)^2\dot\theta^2 + \left(V + (r'\sin\theta + r\cos\theta)\dot\theta\right)^2\right] = \frac{1}{2}m\dot\theta^2\left[(r\sin\theta - r'\cos\theta)^2 + \frac{M^2}{(m+M)^2}(r'\sin\theta + r\cos\theta)^2\right]$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}m\left[(r^2 + r'^2)\dot\theta^2 + V^2 + 2V\dot\theta(r'\sin\theta + r\cos\theta)\right] =}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}m\dot\theta^2\left[r^2 + r'^2 + \frac{m^2}{(m+M)^2}(r'\sin\theta + r\cos\theta)^2 - \frac{2m}{m+M}(r'\sin\theta + r\cos\theta)^2\right] = \frac{1}{2}m\dot\theta^2\left[r^2 + r'^2 - \frac{m^2 + 2mM}{(m+M)^2}(r'\sin\theta + r\cos\theta)\right]}$$

$$T_M = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m\dot\theta^2\left[\frac{mM}{(m+M)^2}(r'\sin\theta + r\cos\theta)^2\right]$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{T_m}{T_M} = \frac{m}{M} - 2\frac{m+M}{M} + \frac{r^2 + r'^2}{\frac{mM}{(m+M)^2}(r'\sin\theta + r\cos\theta)^2} =}$$

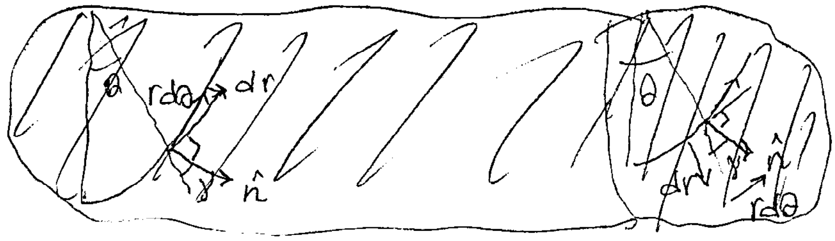
$$\Rightarrow \boxed{\frac{T_m}{T_M} = \frac{M}{m} + \frac{(m+M)^2}{mM}\cdot\left(\frac{r\sin\theta - r'\cos\theta}{r\cos\theta + r'\sin\theta}\right)^2}$$

b) $$T = T_m + T_M = T_M\left(1 + \frac{T_m}{T_M}\right) \Rightarrow f(\theta) = \frac{T_M}{\frac{1}{2}m\dot\theta^2}\left(1 + \frac{T_m}{T_M}\right)$$

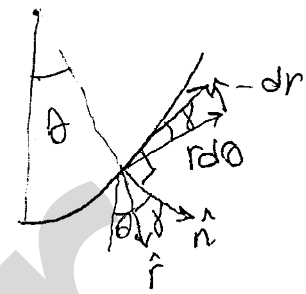
$$\Rightarrow \boxed{f(\theta) = (r\sin\theta - r'\cos\theta)^2 + \left(\frac{M}{m+M}\right)^2(r'\sin\theta + r\cos\theta)^2}$$

$$mgr\cos\theta = \frac{1}{2}mf(\theta)\dot\theta^2 \Rightarrow \dot\theta^2 = \frac{2gr\cos\theta}{f(\theta)}$$

c)



$$\tan\gamma = \frac{-dr}{r\,d\theta} = \frac{-r'}{r}$$



$$F_x = N\sin(\theta+\gamma) = N(\sin\theta\cos\gamma + \cos\theta\sin\gamma)$$

$$= N\cos\gamma\left(\sin\theta - \frac{r'}{r}\cos\theta\right) = M a_x$$

$$\circ\!<\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\gamma}} = \frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}$$

$$\Rightarrow N = \frac{\sqrt{r^2+r'^2}}{r\sin\theta - r'\cos\theta}\, M a_x$$

$$a_x = \frac{dV}{dt} = \frac{-m}{m+M}(r'\sin\theta + r\cos\theta)\ddot\theta - \frac{m}{m+M}(r'\cos\theta - r\sin\theta)\dot\theta^2 - \frac{m}{m+M}(r'\cos\theta + r''\sin\theta)\dot\theta^2$$

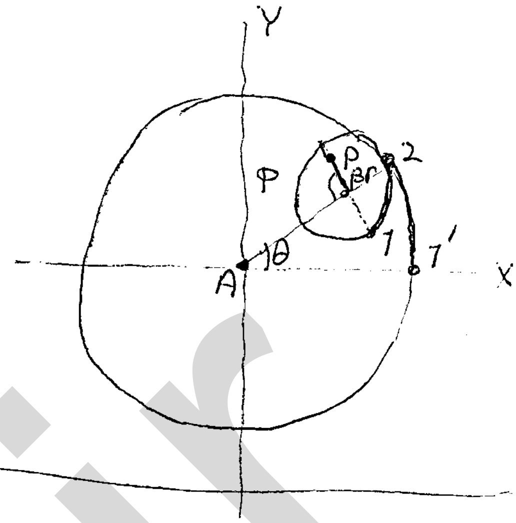
$$\dot\theta^2 = \frac{2gr\cos\theta}{f(\theta)} \Rightarrow \ddot\theta = \frac{d\dot\theta^2}{2d\theta} = g\,\frac{(r'\cos\theta - r\sin\theta)f(\theta) - r\cos\theta f'(\theta)}{f^2(\theta)}$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{-m}{m+M}(r\cos\theta + r'\sin\theta)\,g\,\frac{(r'\cos\theta - r\sin\theta)f(\theta) - r\cos\theta f'(\theta)}{f^2(\theta)} - \frac{m}{m+M}(r''\sin\theta + 2r'\cos\theta - r\sin\theta)\frac{2gr\cos\theta}{f(\theta)}$$

$$\Rightarrow N(\theta) = \frac{mMg}{m+M}\sqrt{r^2+r'^2}\left\{\frac{(r\cos\theta + r'\sin\theta)}{f(\theta)} - \frac{r\cos\theta(r\cos\theta + r'\sin\theta)f'(\theta)}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)f^2(\theta)} + \frac{2r\cos\theta(r''\sin\theta + 2r'\cos\theta - r s}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)f(\theta}\right.$$

الف) $\widehat{1'2} = \widehat{12}$

$\Rightarrow R\theta = r\varphi \Rightarrow \boxed{\varphi = \alpha\theta}$



ب)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R-r)\cos\theta - \beta r \cos(\varphi-\theta) \\ (R-r)\sin\theta + \beta r \sin(\varphi-\theta) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= r\begin{pmatrix} (\alpha-1)\cos\theta - \beta\cos[(\alpha-1)\theta] \\ (\alpha-1)\sin\theta + \beta\sin[(\alpha-1)\theta] \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow |PA| = \cancel{r\sqrt{(\alpha-1)^2+\beta^2}} = \boxed{r\sqrt{\beta^2+(\alpha-1)^2 - 2\beta(\alpha-1)\cos(\alpha\theta)}}$$

پ) $\dot\theta = \omega$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} = \boxed{r(\alpha-1)\,\omega\begin{pmatrix} -\sin\theta + \beta\sin[(\alpha-1)\theta] \\ \cos\theta + \beta\cos[(\alpha-1)\theta] \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \cancel{r\omega(\alpha-1)\sqrt{1+\beta^2}} \quad \boxed{r\omega(\alpha-1)\sqrt{1+\beta^2+2\beta\cos(\alpha\theta)}}$$

ت) $\alpha=2,\ \beta=-1 \Rightarrow \boxed{\vec{v} = -2r\omega\sin\theta\ \hat{x}} \Rightarrow |\vec{v}| = \boxed{2r\omega|\sin\theta|}$

$$|\vec{v}| = 2r\omega|\sin\omega t| \Rightarrow S = \int_0^T v\,dt = 2r\omega\int_0^{2\pi/\omega}|\sin\omega t|\,dt = 4r\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = 8r\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta = \boxed{8r}$$

ث) $\alpha=2,\ \beta\neq 1,-1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta - \beta\cos\theta \\ \sin\theta + \beta\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\beta)\cos\theta \\ (1+\beta)\sin\theta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{r(1-\beta)}\right)^2 + \left(\frac{y}{r(1+\beta)}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$ **بیضی است**

ج) $\alpha = 3$, $\beta = 1$

$$\Rightarrow v = 2r\omega\sqrt{2+2\cos(3\theta)} = 4r\omega\left|\cos\frac{3\theta}{2}\right| \Rightarrow S = \int_{\theta=0}^{2\pi} 4r\omega\left|\cos\frac{3\theta}{2}\right| dt = \frac{8r}{3}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left|\cos\frac{3\theta}{2}\right| d\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{8r}{3}\int_0^{3\pi}|\cos\gamma|\,d\gamma = 6\times\frac{8r}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\gamma\,d\gamma = \boxed{16r}$$

ج)

$\boxed{r=3 ,\ \alpha = 7/3 ,\ \beta = 5/3}$

$$\Rightarrow \vec{r}_p = 3\begin{pmatrix} \frac{4}{3}\cos\theta - \frac{5}{3}\cos(\frac{4}{3}\theta) \\ \frac{4}{3}\sin\theta + \frac{5}{3}\sin(\frac{4}{3}\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos\theta - 5\cos\frac{4}{3}\theta \\ 4\sin\theta + 5\sin(\frac{4}{3}\theta)\end{pmatrix}$$

$$|r_{max}| = \sqrt{\beta^2+(\alpha-1)^2+2\beta(\alpha-1)}\ r = |\beta+\alpha-1|\,r$$

$$= 3r = 9 \Rightarrow \boxed{D \text{ شکل}}$$

$\boxed{r=3 ,\ \alpha = 7/3 ,\ \beta = 1}$

$$r_{max} = 7/3\, r = 7 \Rightarrow \boxed{C \text{ شکل}}$$

$$|v| = r\omega(\alpha-1)\times 2\cos\frac{\alpha\theta}{2} \Rightarrow v(\theta = \frac{\pi}{\alpha}) = 0$$

✓ شکل تیزی

$\boxed{r=5 ,\ \alpha = 7/5 ,\ \beta = 2/5}$

$$r_{max} = 4/5\, r = 4 \Rightarrow \boxed{A \text{ شکل}}$$

$\boxed{r=5 ,\ \alpha = 7/5 ,\ \beta = 3/5}$

$$\Rightarrow r_{max} = r = 5 \Rightarrow \boxed{B \text{ شکل}}$$

مسئله ③ امتحان اول

آ) * مبدأ پتانسیل را ظرف 1 می‌گیریم

$$P(\vec{r},\vec{v}) = C\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} e^{\frac{-mv^2}{2KT}} \times e^{\frac{-U(\vec{r})}{KT}}$$

$$\int_{\varphi,\theta} dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv \quad \Rightarrow \int P(\vec{r},\vec{v})\, dv_x dv_y dv_z = P(\vec{r}) = Ce^{\frac{-U(\vec{r})}{KT}}$$

$$\int P(\vec{r})\, dxdydz = 1 \Rightarrow \int_{V_1} Ce^{\frac{-U(\vec{r})}{KT}} dxdydz + \int_{V_2} Ce^{\frac{-U(\vec{r})}{KT}} dxdydz = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} = V_1 + V_2 e^{\frac{-mgh}{KT}} \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{V_1 + V_2 e^{\frac{-mgh}{KT}}}} \Rightarrow P(\vec{r}) = \frac{e^{\frac{-U(\vec{r})}{KT}}}{V_1 + V_2 e^{\frac{-mgh}{KT}}}$$

ب) $dN_v = NP(\vec{r},\vec{v})\, d^3r\, d^3v \Rightarrow dN = NP(\vec{r})\, d^3r$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_1 = N\int_{V_1} P(\vec{r})\, d^3r = \dfrac{N}{V_1 + V_2 e^{\frac{-mgh}{KT}}} \displaystyle\int_{V_1} d^3r = \boxed{\dfrac{V_1}{V_1 + V_2 e^{\frac{-mgh}{KT}}} N} \\ N_2 = N\int_{V_2} P(\vec{r})\, d^3r = \boxed{\dfrac{V_2 e^{\frac{-mgh}{KT}}}{V_1 + V_2 e^{\frac{-mgh}{KT}}} N} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1 = \dfrac{N_1 KT}{V_1} = \boxed{\dfrac{NKT}{V_1 + V_2 e^{\frac{-mgh}{KT}}}} \\ P_2 = \dfrac{N_2 KT}{V_2} = \boxed{\dfrac{NKT\, e^{\frac{-mgh}{KT}}}{V_1 + V_2 e^{\frac{-mgh}{KT}}}} \end{cases}$$

ج) $E_{in} = N_2 mgh + \frac{3}{2}N_1 KT + \frac{3}{2}N_2 KT = \boxed{\frac{3}{2}NKT + \frac{V_2 e^{\frac{-mgh}{KT}}}{V_1 + V_2 e^{\frac{-mgh}{KT}}} Nmgh}$

$$C_V = \left(\frac{\partial E_{in}}{\partial T}\right)_{V_1,V_2} = \boxed{\frac{3}{2}NK + \frac{V_1 V_2\, Nmgh}{\left(V_1 + V_2 e^{\frac{-mgh}{KT}}\right)^2} \times \left(\frac{mgh}{KT^2}\right) e^{\frac{-mgh}{KT}}} =$$

$$= NK\left[\frac{3}{2} + \frac{V_1 V_2 e^{\frac{-mgh}{KT}}}{\left(V_1 + V_2 e^{\frac{-mgh}{KT}}\right)^2} \times \left(\frac{mgh}{KT}\right)^2\right]$$

ت)

I) $\frac{mgh}{KT} \gg 1 \Rightarrow \begin{cases} N_1 \simeq N \quad , \quad N_2 = 0 \\ P_1 = \frac{NKT}{V_1} \quad , \quad P_2 = 0 \\ E_{in} = \frac{3}{2}NKT \quad , \quad C_V = \frac{3}{2}NK \end{cases}$

مرتبه صفرم :

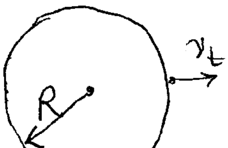
(اولین مرتبه غیرصفر)

II) $\frac{mgh}{KT} \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} N_1 \doteq \frac{V_1}{V_1+V_2}N \quad , \quad N_2 = \frac{V_2}{V_1+V_2}N \\ P_1 = P_2 = \frac{NKT}{V_1+V_2} \\ E_{in} = NKT\left[\frac{3}{2} + \frac{V_2 e^{-\frac{mgh}{KT}}}{V_1+V_2 e^{-\frac{mgh}{KT}}} \times \frac{mgh}{KT}\right] \doteq \frac{3}{2}NKT \quad , \quad C_V = \frac{3}{2}NK \end{cases}$

مسئله 4 آزمون [illegible]:

آ) $p(v_r)\,dv_r=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\;e^{-\frac{mv_r^2}{2kT}}\,dv_r$

$$\xrightarrow{(\text{کل})}\ \alpha=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\int_{v_t}^{\infty}e^{-\frac{mv_r^2}{2kT}}\,dv_r=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\frac{mv_t^2}{2kT}}}^{\infty}e^{-u^2}\,du=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{mv_t^2}{2kT}}}e^{-u^2}\,du$$



سرعت فرار: $\frac{1}{2}v_t^2=\frac{GM}{R}\Rightarrow v_t=\sqrt{\frac{2GM}{R}}\Rightarrow\begin{cases}v_t^{\text{ماه}}\simeq 2{,}37\ \text{km/s}\\ v_t^{\text{زمین}}\simeq 11{,}2\ \text{km/s}\end{cases}$

$\cancel{(x_0\ll 1)\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(x_0-\frac{x_0^3}{3}\right)}$

$x_{0\,\text{ماه}}^{H_2}=\sqrt{\frac{2\times10^{-26}}{2\times6.02}\times\frac{2{,}37^2\times10^6}{1.38\times10^{-23}\times300}}\approx 1.5\quad,\quad x_{0\,\text{ماه}}^{N_2}\simeq 5.62$

$x_{0\,\text{زمین}}^{H_2}=7.1\quad,\quad x_{0\,\text{زمین}}^{N_2}\approx 26.5$

تقریب: $(x_0\gg1)$ $\quad\alpha\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{e^{-x_0^2}}{x_0\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{x_0^2}{2}+\dots\right)\right]=\frac{e^{-x_0^2}}{2x_0\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{x_0^2}{2}+\dots\right)\approx\frac{e^{-x_0^2}}{2x_0\sqrt{\pi}}$

$\Rightarrow\boxed{\alpha_{\text{ماه}}^{H_2}\approx 0{,}02}\;,\;\boxed{\alpha_{\text{ماه}}^{N_2}\approx 9{,}6\times10^{-16}}\;,\;\boxed{\alpha_{\text{زمین}}^{H_2}\approx 5.1\times10^{-24}}\;,\;\boxed{\alpha_{\text{زمین}}^{N_2}\approx 0\ !}$

ب)

$$P(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{\frac{-mv^2}{2kT}} dv \quad \Rightarrow \eta = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_{v_m}^{\infty} v^2 e^{\frac{-mv^2}{2kT}} dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\frac{mv_m^2}{2kT}}}^{\infty} u^2 e^{-u^2} du$$

$$K_{max} = 13.6\,eV = \frac{1}{2} m_e V_m^2 \Rightarrow V_m^2 = \frac{2\times 13.6 \times 1.6\times 10^{-19}}{m_e}$$

$$\Rightarrow m_e V^2 = 4.352\times 10^{-18}\ J$$

$$\Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{m_e V^2}{2kT}} = \sqrt{\frac{4.352\times 10^{-18}}{2\times 1.38\times 10^{-23}\times 2\times 10^{4}}} \simeq 2.81 \gg 1$$

$$\eta = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_{x_0}^{\infty} u^2 e^{-u^2} du = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_{x_0}^{\infty}\left[\frac{1}{2}e^{-u^2} - \frac{1}{2}\frac{d}{du}(ue^{-u^2})\right]du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x_0}^{\infty} e^{-u^2}du - \frac{2}{\sqrt{\pi}} ue^{-u^2}\Big|_{x_0}^{\infty}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x_0}^{\infty} e^{-u^2}du - \frac{2}{\sqrt{\pi}}x_0 e^{-x_0^2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_0} e^{-u^2}du - \frac{2}{\sqrt{\pi}}x_0 e^{-x_0^2}$$

$$\Rightarrow \eta \approx 1 - \left[1 - \frac{e^{-x_0^2}}{x_0\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{x_0^2}{2} + \cdots\right)\right] - \frac{2x_0 e^{-x_0^2}}{\sqrt{\pi}} \approx \frac{e^{-x_0^2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{x_0} - 2x_0 - \frac{x_0}{2} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow \eta \approx \frac{e^{-x_0^2}}{x_0\sqrt{\pi}} = 7/47\times 10^{-5} \boxed{= 0.007\,\%}$$