تمرین‌های ترکیبیات

جلسه‌ی یکم و دوم ـ ترکیبیات شمارشی مقدماتی و ابزارهای معمول ترکیبیاتی

توجه:

- مطابق قوانین درس، با تقلّب در تمرین‌ها به شدّت برخورد خواهد شد. با توجه به سخت‌گیری کم در تصحیح تمرینات، نوشتن راه حل نادرست حاصل از تلاش، بسیار معقول‌تر از تقلّب است.
- تمرینات باید در برگه‌ی $A۴$ نوشته شوند.
- تمرین تحویلی سری ۱: سوال شماره ۲ (مهلت تحویل: ۲ مرداد)
- تمرین تحویلی سری ۲: سوال ۳ (مهلت تحویل: ۲ مرداد)

۱. به چند طریق می‌توان یک مهره‌ی اسب سفید و یک مهره‌ی اسب سیاه را در یک تخته شترنج ۸×۸ قرار داد؛ طوری که یک‌دیگر را تهدید کنند؟

۲. می‌دانیم عدد طبیعی n، $۲^{n-۱}$ افراز ترتیب‌دار به اعداد طبیعی دارد. به ازای هر افراز ترتیب‌دار این‌چنینی مانند $n = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_k$، مقدار $a_۱ a_۲ \ldots a_k$ را حساب کرده و این مقادیر را جمع کنید. حاصل را بر حسب جملات دنباله‌ی فیبوناچی بیابید.

۳. یک جدول $n \times n$ داریم. می‌خواهیم هر یک از خانه‌های جدول را با یکی از k رنگ موجود، رنگ کنیم؛ طوری که از هر رنگ دست کم یک بار استفاده شود. کمینه‌ی k را بیابید؛ طوری که به ازای هر رنگ‌آمیزی ممکن، دو سطر و دو ستون یافت شوند که رنگ چهار خانه‌ی تلاقی آن‌ها دوبه‌دو متفاوت باشد.

۴. n خط در صفحه کشیده شده است؛ طوری که هیچ دو خطی موازی و هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. ثابت کنید می‌توان در هر یک از ناحیه‌های ایجاد شده یک عدد ناصفر با قدر مطلق حداکثر n نوشت؛ طوری که مجموع اعداد هر طرف هر یک از خطها برابر با ۰ باشد.

۵. یک گراف $۲n + ۱$ رأسی داریم. به ازای هر n رأس، رأسی خارج از آن n رأس وجود دارد که به همه‌ی آن‌ها وصل باشد. ثابت کنید $\Delta = ۲n$ است.

۶. در ابتدا چندجمله‌ای درجه دوم $x^۲ + ۴x + ۳$ را داریم. در هر مرحله می‌توانیم چندجمله‌ای $f(x)$ را به $x^۲ f(۱ + \frac{۱}{x})$ یا $(x-۱)^۲ f(\frac{۱}{x-۱})$ تبدیل کنیم. آیا می‌توانیم با تعدادی مرحله به چندجمله‌ای $x^۲ + ۱۰x + ۹$ برسیم؟

۷. دیروز ببعی و گاوی پس از چریدن طولانی خسته شدند و تصمیم گرفتند یک بازی انجام دهند. در این بازی ۳ دایره وجود دارد که هر یک به ۳n قطاع برابر تقسیم شده‌اند. ابتدا ببعی هر یک از قطاع‌های دایره‌ی شماره‌ی ۱ را با یکی از رنگ‌های زرد، نارنجی و بنفش رنگ می‌کند. گاوی پس از دیدن رنگ‌آمیزی ببعی، هر یک از قطاع‌های دایره‌ی شماره‌ی ۲ را با یکی از همین سه‌رنگ، رنگ می‌کند. ببعی نیز پس از دیدن رنگ‌آمیزی گاوی، دایره‌ی شماره‌ی ۲ را روی دایره‌ی شماره‌ی ۱ می‌گذارد و آن را به هر مقداری که می‌خواهد، می‌چرخاند به طوری‌که هر قطاع آن بر قطاعی از دایره‌ی شماره‌ی ۱ منطبق شود. حال دایره‌ی شماره‌ی ۳ روی دو دایره‌ی دیگر گذاشته می‌شود، طوری که هر قطاع آن بر قطاعی از دایره‌های زیرین منطبق شود. پس از این کار هر قطاع دایره‌ی شماره‌ی ۳به صورت زیر رنگ می‌شود:

- اگر رنگ دو قطاع زیرین دایره‌های شماره‌ی ۱ و ۲ یکسان بود، این قطاع را نیز به همان رنگ درمی‌آوریم.
- اگر رنگ دو قطاع زیرین یکسان نبود، رنگ این قطاع را به رنگ سوم (رنگی که در دو قطاع زیرین نیامده است) درمی‌آوریم.

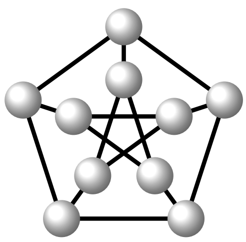
گاوی اصلیتی هلندی دارد و به همین دلیل به رنگ نارنجی بسیار علاقه‌مند است و می‌خواهد تا حد ممکن تعداد قطاع‌های نارنجی دایره‌ی شماره‌ی ۳ زیاد شود؛ در حالی که ببعی می‌خواهد از این کار جلوگیری کند.

آ) ثابت کنید گاوی می‌تواند طوری بازی کند که دایره‌ی شماره‌ی ۳ در انتها حداقل n قطاع نارنجی داشته‌باشد.

ب) ثابت کنید ببعی می‌تواند طوری بازی کند که دایره‌ی شماره‌ی ۳ در انتها حداکثر n قطاع نارنجی داشته‌باشد.

(مرحله‌ی دوم المپیاد کامپیوتر ـ روز دوم ـ ۱۳۹۳)

۸. آ) فرض کنید شکل زیر، یک شیء در صفحه باشد. به چند طریق می‌توان هر یک از توپ‌های این شکل را با یکی از سه رنگ آبی، قرمز و سبز، رنگ کرد؛ طوری که هر دو توپ متصل، ناهم‌رنگ باشند؟ توجه کنید دو شکل را که با دوران در صفحه به یک‌دیگر تبدیل شوند، یک‌سان در نظر می‌گیریم.



(مرحله‌ی یکم المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۹۴)

ب) مسئله‌ی قسمت (آ) را حل کنید؛ با این تفاوت که شیء در فضاست و چرخش و دوران در فضا شیء جدیدی ایجاد نمی‌کند.

۹. روزبه پس از طرح سوال دو مرحله دوم، با تصمیم قاضی به سرزمینی دور تبعید شد. این سرزمین مانند یک صفحه‌ی مختصات است. روزبه در نقطه‌ی $(۰, ۰)$ این سرزمین سکونت دارد. هوا به تازگی در این نقطه بسیار گرم شده است و روزبه از هوای گرم متنفر است؛ پس تصمیم دارد به نقطه‌ی (n,k) برود که شنیده است نقطه‌ی نسبتن سردی است! روزبه در هر مرحله می‌تواند از یکی از وسایل نقلیه‌ی این سرزمین (شتر، گاو، خر و قاطر) استفاده کند. این وسایل نقلیه به شکل زیر کار می‌کنند:

- اگر روزبه در نقطه‌ی (i, j) باشد، شتر او را به نقطه‌ی $(i+۱, j-۱)$ می‌برد.
- اگر روزبه در نقطه‌ی (i, j) باشد، گاو او را به نقطه‌ی $(i+۱, j+۱)$ می‌برد.
- اگر روزبه در نقطه‌ی (i, j) باشد، خر او را به نقطه‌ی $(i+۱, j)$ می‌برد.
- قاطر نیز مانند خر عمل می‌کند.

واضح است که کار روزبه در دقیقن n مرحله انجام می‌شود. این سرزمین از نظر حمل و نقل قوی است؛ پس در هر مرحله تمام وسایل نقلیه در دست‌رس هستند!

دو روش برای رسیدن به نقطه‌ی (n,k) را متفاوت گوییم؛ هرگاه حداقل یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

- مرحله‌ای مانند L وجود داشته باشد که مکان روزبه پس از آن مرحله در دو روش، متفاوت باشد.
- مرحله‌ای مانند L وجود داشته باشد که وسیله‌ی نقلیه‌ی مورد استفاده‌ی روزبه در آن مرحله در دو روش، متفاوت باشد.

ثابت کنید تعداد روش‌های متفاوت رسیدن روزبه به نقطه‌ی (n,k) برابر $\binom{۲n}{n-k}$ است. (آزمون ترکیبیات دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد کامپیوتر ـ ۱۳۹۴)

۱۰. پس از آن که سلطان مشاهده کرد اکثر دانش‌مندان مانند آووگادرو، کاتالان، رمزی و ... برای خود عددی دست و پا کرده‌اند ،(!) تصمیم گرفت او نیز عدد خودش را معرفی کند. به ازای هر عدد طبیعی n، عدد سلطانی نوع اول که با $S_{۱,n}$ نشان داده می‌شود، برابر با تعداد روش‌های قرار دادن اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ در یک جدول $۲ \times n$ است؛ طوری که هر عدد دست کم یک بار بیاید و هر عدد، بیش‌تر یا مساوی اعداد سمت چپ و پایینش (در صورت وجود) باشد.

آ) اگر عدد کاتالان nام را با C_n نشان دهیم، ثابت کنید: $S_{۱,n} \geq C_n$

ب) به ازای هر عدد طبیعی n، عدد سلطانی نوع دوم که با $S_{۲,n}$ نشان داده می‌شود، برابر با تعداد روش‌های قرار دادن اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ در یک جدول $۲ \times n$ است؛ طوری که هر عدد دقیقن ۲ بار بیاید و هر عدد، بیش‌تر یا مساوی اعداد سمت چپ و پایین‌ش (در صورت وجود) باشد. اگر عدد کاتالان nام را با C_n نشان دهیم، ثابت کنید: $S_{۲,n} \leq C_n$

(آزمون ترکیبیات دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد کامپیوتر ـ ۱۳۹۳)

۱۱. در ابتدا جایگشت $< ۱, ۲, \ldots, n >$ را داریم. در هر مرحله می‌توان یک عنصر را دو واحد به راست منتقل کرد. در واقع جایگشت

$$< \square, \square, \ldots, \square, a, b, c, \square, \ldots, \square >$$

به

$$< \square, \square, \ldots, \square, b, c, a, \square, \ldots, \square >$$

تبدیل می‌شود. به ازای چه nـ‌هایی می‌توانیم به جایگشت $< n, n-۱, \ldots, ۱ >$ برسیم؟ برای مثال این کار برای $n = ۴$ به شکل زیر قابل انجام است:

$$< ۱, ۲, ۳, ۴ > \rightarrow < ۲, ۳, ۱, ۴ > \rightarrow < ۲, ۱, ۴, ۳ > \rightarrow < ۲, ۴, ۳, ۱ > \rightarrow < ۴, ۳, ۲, ۱ >$$

(آزمون ترکیبیات دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد کامپیوتر ـ ۱۳۹۴)