۱-۲ تعریف اصولی جبر بول

در سال ۱۸۵۴ جورج بول روش اصولی برای منطق معرفی نمود و بدین طریق یک سیستم جبری را پایه ریزی کرد که امروز جبر بول نامیده می شود . برای تعریف مستدل جبر بول ، ما اصول فرموله شده بوسیله هانتینگتون در ۱۹۰۴ را به کار خواهیم برد . این اصول برای تعریف جبر بول منحصر به فرد نیستند و اصول دیگری نیز در آن بکار رفته اند .

جبر بول یک ساختار جبری است که با عناصر مجموعه B همراه با دو عملگر (+) و (.) تعریف شده و دارای اصول زیر (اصول هانتینگتون) باشد :

۱- (a) مجموعه نسبت به عملگر (.) بسته باشد .

(b) مجموعه نسبت به عملگرد (.) بسته باشد .

۲- (a) عنصر خنثی در مجموعه برای (+) برابر با ۰ باشد .

$$x+0=0+x=x$$

۳- (b) عنصر خنثی در مجموعه برای (.) برابر ۱ باشد .

$$x.1=1.x=x$$

۴- (a) مجموعه نسبت به (+) دارای خاصیت جابجایی باشد .

$$x+y=y+x$$

(b) مجوعه نسبت به (.) دارای خاصیت جابجایی باشد :

$$x.y=y..x$$

۴- (a) (.) روی (+) دارای خاصیت پخشی است . $x.(y+z)=(x.y)+(x.z)$

(b) (+) روی (.) دارای خاصیت پخشی است . $x+(y.z)=(x+y).(x+z)$

۵- به ازای هر عنصر $x \in B$ عنصری مثل $x \in B$ وجود داشته باشد (این عنصر مکمل خوانده می شود) بطوری که :

(a) $$x + x' = 1$$

(b) $$x.x' = 0$$

۶- حداقل دو عنصر مانند $x, y \in B$ موجود باشند بطوریکه : $x \neq y$ ازمقایسه جبر بول با ریاضیات جبری معمولی (میدان اعداد حقیقی) اختلافات زیر ملاحظه می گردند :

۱- اصول هانتینگتون شامل اصل اشتراک پذیری نیستند . این قانون برای جبر بول نیز وجود دارد و می توان آن را برای هر دو عملگر از سایر اصول بدست آورد .

۲- قانون توزیع پذیری (+) و (.) اختلاف بعدی است . رابطه :

$$x + (y.z) = (x + y).)x + z)$$

برای جبر بول معتبر ولی برای جبر معمولی قابل قبول نیست .

۳- جبر بول معکوس جمع و ضرب را ندارد ، بنابراین تفریق و تقسیم مفهوم نخواهند داشت .

۴- اصل ۵ عملگرد دیگری بنام مکمل را معرفی می نماید که در جبر معمولی وجود ندارد .

۵- جبر معمولی در مورد اعداد حقیقی است که بی نهایت عنصر را شامل می شود . جبر بول با عناصری از مجموعه B که البته تا کنون معرفی نشده اند سرو کار داشت ولی درجبر بول دو ارزشی یا دو مقداری که در زیر تعریف شده ، B یک مجموعه دو عنصری است که این دو عنصر ۰ و ۱ می باشند .

۲-۲ قضیه های اصلی و خواص جبر بول

اصول هانتیگتون بصورت جفت جفت لیست و با قسمت های (a) و (b) مشخص شد . هر یک از این دو را می توان از دیگری بدست آورد بشرط اینکه عملگرها و نیز عناصر خنثی تعویض شوند. این خاصیت مهم درجبر بول به اصل دوگانگی معروف است و بیان می دارد که هر عبارت جبری منتجه از اصول جبر بول حتی با تعویض عملگر ها و عناصر خنثی باز هم معتبر می باشد . در جبر بول دو ارزشی عناصر خنثی و خود عناصر محموعه B یکسانند : ۱و۰ اصل دوگانگی کاربردهای فراوانی دارد . اگر دو گان یک عبارت جبری ، مورد نظر باشد تنها کافی است عملگرهای OR و AND تعویض شده و ۰ ها به ۱ ها و همچنین ۱ها به ۰ ها تبدیل گردند .

تئوری های اساسی

جدول (۱-۲) شش تئوری و چهار اصل از جبر بول را در بر دارد . در سمت چپ روابط ، شماره اصول بکار رفته نوشته شده است .

جدول (۱-۲) اصول و قضایای جبر بول)

اصل ۲	(a) $x + 0 = x$	(b) $x.1 = x$
اصل ۵	(a) $x + x' =$ ۱	(b) $x.x = 0$
تئوری ۱	(a) $x + x = x$	(b) $x.x = x$
تئوری ۲	(a) $x + 1 = 1$	(b) $x .0 = 0$
تئوری ۳ رجعت	$(x')' = x$	
اصل ۳ جابجایی	(a) $x+y=y+x$	(b) $xy = yx$
تئوری ۴ شرکت پذیری	(a) $x+(y+z) = (x+y)+z$	(b) $x (yz) = (xy)z$
اصل ۴ توزیع پذیری یا پخش	(a) $x(y+z) = xy+xz$	(b) $x+yz = (x+y)(x+z)$
تئوری ۵ دمورگان	(a) $(x+y) = x\ y$	(b) $(xy) = x+y)$
تئوری ۶ جذب	(a) $x + xy = x$	(b) $x(x+y) = x$

۲-۳ توابع بول

یک متغییر دودویی می تواند یکی از دو مقدار ۰ یا ۱ را اختیار کند . یک تابع بول عبارتی است که از متغیرهای دودویی ، عملگر های OR ، AND ، NOT پرانتز ها و

علامت تساوی تشکیل شده است . به ازای مقادیر مفروضی از متغیرها تابع فقط می تواند ۰ یا ۱ باشد . مثلاً تابع بول $F_1 = xyz'$ را در نظر بگیرید. تابع f_1 برابر با ۱ است بشرطی که x=1 ، y=1 و $z'=1$ باشد ، در غیر این صورت $F_1=0$ خواهد بود . برای نمایش یک تابع بفرم جدول درستی نیاز به 2^n ترکیب از ۱ ها و ۰ ها مربوط به n به تغییر دودویی و ستونی یکه در آن مقدار تابع برابر ۰ یا ۱ است ، داریم . از جدول (۲-۲) دیده می شود وکه برای سه متغیر ۸ حالت جدا می توان در نظر گرفت . در جدول (۲-۲) ، چهار ردیف آخر مساوی ۱ و xy در ردیفهای ۰۰۱ و ۱۰۱ برابر ۰۱ است . ترکیب آخری دلالت بر x=۱ نیز دارد .بنابراین برای F_2=۱ پنج حالت وجود دارد .

جدول (۲-۲) جدول درستی برای

$F_1 = xyz \quad F_2 = x + y'z \;,\; F_3 = x'y'z + x'yz + xy \quad ,\; F_4 = xy' + xz$

x	y	Z	F_1	F_2	F_3	F_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

عملیات جبری

لیترال ، یک متغیر با پریم یا بدون پریم است . وقتی که یک تابع بوسیله گیت منطقی پیاده شود هر لیترال در تابع معروف یک ورودی به یک گیت و هر جمله منطقی نیز توسط یک گیت ساخته می شود . می نیمم کردن تعداد متغیرها و جملات ، نتیجه اش ساخت دستگاهی با قطعات کمتر است .

البته همیشه ممکن نیست که هر دو را با هم کاهش داد . فعلاً ما می نیمم سازی را فقط به متغیرها محدود میکنیم تعداد متغیر ها در تابع بول می تواند با یک سری اعمال جبری می نیمم گردد ، متاسفانه قوانین مشخص و معینی که تضمین کننده فرم نهایی باشد وجود ندارد . تنها روش موجود سعی در کاهش مدار و تداوم این عمل با استفاده از اصول اولیه ، تئوری های اصلی و هر روش عملیاتی دیگری ، که ضمن عمل با آنها حاصل می گردد ، می باشد .

مثال ۱-۲ : تابع بولی زیر را از نظر تعداد متغیرها می نیمم کنید .

$$1.\ x + x'y = (x + x')(x + y) = 1.(x + y) = x + y$$

$$2.\ x(x' + y) = xx' + xy = 0 + xy = xy$$

$$3.\ x'y'z + x'yz + yz = x'z(y' + y) + xy' = x'z + xy'$$

$$\begin{aligned} 4.\ xy + x'z + yz &= xy + x'z + yz(x + x') \\ &= xy + x'z + xyz + x'yz \\ &= xy(1 + z) + x'z(1 + y) \\ &= xy + x'z \end{aligned}$$

$$5.\ (x + y)(x' + z)(y + z) = (x + y)(x' + z)$$

با توجه به دو گانه بودن تابع ۴

تابع ۱ و ۲ دوگان یکدیگرند و عبارت دوگانی رادر مراحل مربوط به خود بکار می برند .

تابع ۳ هم ارزی توابع F_4,F_3 بحث شده در قبل را نشان می دهد . چهارمین تابع روشنگر این واقعیت است که افزایش در تعداد متفیرها گاهی اوقات سبب ساده تر

شدن عبارت نهایی می گردد . تابع ۵۴ مستقیماً ساده نشده است ولی با استفاده از دوگان مراحل رمربوط به تابع ۴ می تواند حاصل گردد .

مکمل یک تابع

مکمل یک تابع F تابعی است مانند َ F که با تعویض ۰ ها به ۱ها و ۱ ها به ۰ ها در مقدار F حاصل می گردد . مکمل یک تابع ممکن است با استفاده از تئوری دمورگان نیز بدست می آید . زوج قوانین دمورگان برای دو متغییر در جدول (۱-۲) لیست شده اند . تئوری های دمورگان قابل تعمیم برای سه متغیر و یا بیشتر از آن نیز هستند . فرم سه متغیر تئوری اول دمورگان در زیر آمده است . اصول و تئوری های بکار رفته همان همایی هستند که در جدول (۱-۲) آورده شده اند .

با فرض B + C = A $\quad (A+B+C)'=(A+X)'$

با توجه به تئوری ۵- (a) دمورگان $\quad =A'X'$

با جایگزینی B + C = X $\quad =A'.(B+C)'$

با توجه به تئوری ۴- (a) شرکت پذیری $\quad =A'B'C'$

تئوری های دمورگان برای هر تعداد از متغیر ها ابتد به شکل دو متغیره در آمده و سپس با جایگزینی های متوالی ، مشابه با آنچه در فوق دیده شد ، نتیجه نهایی حاصل می گردد .

این تئوریها می تواند به صورت زیر عمومیت داده شوند .

$$(A+B+C+D+...+F)'=A'B'C'D'...F'$$
$$(ABCD...F)'=A'+B'+C'+D'+...+F'$$

فرم های کلی تئوری دمورگان بیان می کند که مکمل هر تابع با تعویض عملگرهای AND و OR و مکمل نمودن هر متغیر حاصل می شود .

مثال ۲-۲ : مکمل توابع $F_1 = x'yz' + x'y'z$, $F_2 = x(y'z' + yz)$ را بدست آورید .

تئوری دمورگان را هر چند بار که لازم باشد بکار ببرید . مکمل ها بفرم زیر حاصل می گردند

$$F_1' = (x'yz' + x'y'z)' = (x'yz')(x'y'z) = (x + y' + z)(x + y + z')$$

$$F_2' = [x(y'z' + yz)]' = x' + (y'z') + y'z' + yz)' = x' + (y'z')'.(yz)'$$
$$= x' + (y + z)(y' + z')$$

روش ساده تری برای بدست آوردن مکمل یک تابع این است که ابتدا دوگان آنرا بدست آورده و سپس متغیرهایش را مکمل نماییم . این روش با توجه به فرم کلی تئوری دمورگان نتیجه می شود . بخاطر داشته باشید که دوگان یک تابع با تبدیل عملگر AND و OR وتبدیل ۱ ها و ۰ ها به یکدیگر بدست می آید .

مثال ۲-۳ : مکمل های توابع F_2 , F_1 مثال ۲-۲ را باتوجه به دوگان آنها و مکمل کردن هر متغیر بدست آورد .

1. $F_1 x'yz' + x'y'z$

دوگان تابع F_1 برابر است با $(x' + y + z')(x' + y' + z)$

پس از مکمل کردن هر متغیر داریم $(x + y' + z)(x + y + z') = F_1'$

2. $F_2 = x(y'z' + yz).$

دوگان تابع F_2 برابر است با $x + (y' + z')(y + z)$

پس از مکمل کردن هر متغیر داریم $x' + (y + z)(y' + z') = F_2'$

۲-۴ حالات متعارف و استاندارد

یک متغیر دودویی ممکن است بفرم معمولی (x) یا مکملش (x') ظاهر شود . حال فرض کنیم که متغیرهای دودویی x و y بوسیله عملگر AND با یکدیگر ترکیب شوند . چون هر متغیر ممکن است به هر یک از دو شکل فوق ظاهر گردد چهار ترکیب برای آن دو متغیر وجود دارند $xy', x'y, x'y'$ و xy . هر یک از این چهار جمله نشان دهنده یک ناحیه در دیاگرام ون ، شکل (۱-۲) بوده و مینترم نامیده می شود . بروشی مشابه ، n متغییر می تواند روشی مشابه یا آنچه در جدول (۳-۲) برای سه متغیر حاصل شده بدست آیند . اعداد دودویی از صفر تا 2^n-1 برای n متغیر در زیر ستون متغیر ها در جدول نوشته می شوند . هر مینترم از اجزای عملگر AND روی n متغیر بدست می آید و هر متغیر در آن با مقدار ۰ با علامت پریم و با مقدار ۱ بدون پریم خواهد بود . سمبل مینترم نیز درجدول بفرم m_j آورده شده است که j معادل دهدهی جمله مربوطه می باشد .

جدول (۳-۲) مینترم و ماکسترم ها برای سه متغییر دودویی

			مینترم		ماکسترم	
x	y	z	جمله	علامت	جمله	علامت
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x+y+z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x+y+z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x+y'+z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x+y'+z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x'+y+z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x'+y+z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x'+y'+z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x'+y'+z'$	M_7

بطریق مشابهی n متغیر در یک جمله OR ، که هر یک می توانند با پریم و یا بدون پریم باشند ، 2^n ترکیب ممکن را ایجاد می نمایند که هر یک از آنها ماکسترم نامیده می شود . هشت جمله ماکسترم مربوط به سه متغیر با سمبل آنها درجدول (۳-۲) لیست شده اند . هر 2^n جمله ماکسترم برای n متغیر مشابهی تعیین می شوند . هر ماکسترم از یک جمله OR مربوط به n متغیر دارای متغیر های بدون پریم است بشرطی که آن متغیرها ۰ باشند ولی هر گاه مقدار متغیر ۱ باشد در اینصورت آن متغیر پریم دار نمایش داده می شود . توجه داشته باشید که هر جمله ماکسترم مکمل مینترم مربوطه اش می باشد و بالعکس .

یک تابع بول می تواند با استفاده از جدول درستی بفرم جبری با در نظر گرفتن مینترم هایی که تابع به ازای آنها برابر ۱ است و اجرای عملگر OR روی آنها تشکیل گردد . مثلاً تابع F_1 در جدول (۴-۲) بدین طریق معین می شود که ۰۰۱ و۱۰۰ و ۱۱۱ را بفرم $xy'z, x'y'z$ و xyz نشان داده و سپس با یکدیگر ترکیب کنیم . چون هر یک از این مینترم ها برابر ۱ است باید رابطه زیر را داشته باشیم :

$$f_1 = x'y'z + xy'z' + xyz = m_1 + m_4 + m_7$$

بطور مشابه بسادگی می توان نشان داد که :

$$f_2 = x'yz + xy'z + xyz = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

این مثالها نشان دهده یک خاصیت مهم جبر بول می باشند که عبارتست از : هر تابع بول می تواند بصورت مجموع مینترم ها (در اینجا بمعنی OR است) بیان شود . حال مکمل یک تابع بول را در نظر بگیرد .این مکمل را می توان با استفاده از جدول وبکارگیری جملات مینترم که در جدول برای تابع ۰ هستند و اعمال عملگرد OR روی آنها بوجود آورد . لذا مکمل تابع f_1 برابر خواهد بود با .

$$f_1' = x'y'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz'$$

اگر ما مکمل f_1 را پیدا کنیم نتیجه همان تابع f_1 خواهد شد .

$$f_1 = (x+y+z)(x+y'+z)(x+y'+z')(x'+y+z')(x'+y'+z)$$
$$= M_0 . M_2 . M_3 . M_5 . M_6$$

بطور مشابه عبارت مربوط به f_2 را با توجه به جدول می توان نوشت :

$$f_2 = (x+y+z)(x+y+z')(x+y'+z)(x'+y+z)$$
$$= M_0 . M_1 . M_2 . M_4$$

این مثالها بیانکر دومین خاصیت مهم جبر بول می باشند . یعنی هر تابع می تواند بصورت حاصلضرب ماکسترم ها (حاصلضرب به معنی اعمال عملگرد AND می باشد) نوشته شود . روش بدست آوردن مستقیم حاصلضرب ماکسترم ها با استفاده از جدول ربطریق زیر است : ابتدا جملات ماسکترمی که از ترکیب متغیرها تشکیل شده و برای تابع تولید ۰ می نماید انتخاب شده و سپس با اجرای عملگر AND روی تمام آنها می توان به نتیجه مورد نظر رسید . هر گاه توابع بول بصورت مجموعمینترم ها یا حاصلضرب ماکسترم ها در آیند گویند به شکل متعارف می باشند .

مجموع مینترم ها

قبلاً گفته شده که برای n متغیر 2^n مینترم مستقل بدست آورده و هر تابع بول را میتوان بصورت مجموع آنها بیان کرد . تابع بول از مجموع مینترم هایی که مقدارشان در جدول درستی برابر ۱ است تشکیل می گردد. چون مقدار هر مینترم می تواند ۱ یا ۰ باشد و نیز 2^n . گاهی اوقات بهتر است که تابع را بصورت مجموع مینتم ها نشان داد . چنانچه تابع به این شکل نباشد می توان آن را با اجرای اعمال زیر بفرم مورد نظر در آورد . ابتدا مجموعه جملات AND شده را بدست می آوریم و سپس جملات را از

نظر وجود کلیه متغیر ها مورد بازرسی قرار می دهیم . در صورت عدم وجود برخی متغیرها ، باید آنها رادر عباراتی مانند x+x́ و غیره AND کرد . که x یکی از متغیرهایی است که در جمله وجود ندارد . مثال زیر مطلب را روشن میکند :

مثال ۴-۲- : تابع $F=A+B'C$ را بصورت مجوع مینترم نشان دهید .

تابع دارای سه متغیر A,B,C می باشد . در اولین جمله دو متغیر وجود ندارد ، بنابراین

$$A=A(B+B')+AB+AB$$

هنوز هم یک متغیر کسر است .

$$\begin{aligned}A&=AB(C+C')+AB'(C+C')\\&=ABC+ABC'+AB'C+AB'C'\end{aligned}$$

جمله دوم $B'C$ یک متغیر کسر دارد .

$$B'C=B'C(A+A')=AB'C+A'B'C'$$

از ترکیب نتایج فوق داریم

$$\begin{aligned}F&=A+B'C\\&=ABC+ABC'+AB'C+AB'C'+AB'C+A'B'C\end{aligned}$$

از طرفی $AB'C$ دوباره تکرار شده است و بر طبق تئوری ۱ ، $(x=x+x)$ می توان یکی از آنها را حذف کرد . با مرتب نمودن مینترم ها بترتیب صعودی چنین نتیجه می شود .

$$\begin{aligned}F&=A'B'C+AB'C'+AB'C+ABC\\&=m_1+m_4+m_5+m_6+m_7\end{aligned}$$

هنگامی که تابع بول بفرم مجموع مینترم ها است مناسب تر است تا آن بفرم خلاصه زیر نشان دهیم .

$$F(A,B,C)=\sum(1,4,5,6,7)$$

سمبل $\sum$ به معنی اجرای عملگر OR روی جملات است . حروفی که در داخل پرانتز قرار دارند لیست متغیرهای بکار رفته را بهنگام تشکیل جملات مینترم و جمع آنها معین می کنند . روش دیگری برای تشکیل مینترم های تابع بول تهیه جدول درستی تابع مستقیماً از عبارت جبری است که از روی آن مینترم ها خوانده می شوند . تابع بول مثال ۴-۲ را در نظر بگیرد :

$F=A+B'C$

جدول درستی شکب (۵-۲) مستقیماً از عبارت جبری با هشت ترکیب دودویی متغیر های A , B , C حاصل می شود که برای مینترم هایی که در آنها $A=1$, $BC=01$ باشد ۱ قرار می دهیم . سپس با توجه به حجدول درستی پنج مینترم تابعی را که ۱،۴،۵،۶،۷ می باشند می خوانیم.

ضرب ماکسترم ها

هر یک از 2^{2^n} تابع متشکل از n متغیر را همچنین می توان بصورت حاصلضرب ماکسترم ها بیان داشت . برای چنین فرمی باید اول جمله های OR را تشکیل داد . این عمل را می توان با استفاده از قانون توزیع ÷ذیری $x+yz=(x+y)(x+z)$ نیز انجام داد . سپس هر متغیر غایب در هر جمله OR با xx ، OR می شود . این روش با مثال زیر واضحتر خواهد شد :

جدول (۲-۵) جدول درستی برای $F = A + B'C$

A	B	C	F
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱

مثال ۵-۲ : تابع $F = xy + x'z$ را بصورت حاصلضرب ماکسترم بنویسید :

ابتدا با استفاده از قانون توزیع پذیری تابع را به صورت جملا OR در می آوریم :

$$F = xy + x'z = (xy + x')(xy + z)$$
$$= (x + x')(y + x')(x + z)(y + z)$$
$$= (x' + y)(x + z)(y + z)$$

تابع دارای سه متغیر z,y,x است . هر جمله OR فاقد یک متغیر است . بنابراین .

$$x' + y = x' + y + zz' = (x' + y + z)(x' + y + z')$$
$$x + z = x + z + yy' = (x + y + z)(x6y' + z)$$
$$y + z = -y + z + xx' = (x + y + z)(x' + y + z)$$

با ترکیب عبارت فوق و حذف آنهایی که بیش از یکبار تکرار شده اند خواهیم داشت :

$$F = (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z)(x' + y + z')$$
$$= M_0 M_2 M_4 M_5$$

روش مناسب تری برای نمایش تابع بقرار زیر است :

$$F(x, y, z) = \prod(0,2,4,5)$$

سمبل ضرب ، $\prod$ بیانگر حاصلضرب ماکسترم ها می باشد و اعداد ، شماره جملات ماکسترم را مشخص می سازد .

تبدیل فرمهای متعارف به یکدیگر

مکمل یک تابع که بصورت مجموع منیترم ها نشان داده شده برابر است با مجموع مینترم هایی که در فرم اصلی تابع وجود ندارد . زیرا تابع اصلی از جملات مینترمی تشکیل شده که تابع را برابر ۱ می نماید ، در حالیکه مکمل آن تابع به ازای جملاتی برابر ۱ است که تابع اصلی به ازای آنها ۰ می باشد . بعنوان مثال تابع زیر را در نظر بگیرید :

$$F=(A,B,C)=\sum(1,4,5,6,7)$$

مکل این تابع به شکل زیر است :

$$F'(A,B,C)=\sum(0,2,3)=m_0+m_2+m_3$$

حال ، اگر مکمل `F را با توجه به تئوری دمورگان بدست آوریم فرم جدیدی برای F بدست می آید.

$$F=m_0+m_2+m_3)=m_0.m_2.m_3=M_0M_2M_3=\prod(0,2,3)$$

آخرین تبدیل در رابطه فوق نتیجه تعاریف جدول (۲-۳) می باشد . با توجه به جدول درستی رابطه زیر مسلم است .

$$m'_j=M_j$$

یعنی ، جمله ماکسترم با اندیس j مکمل جمله مینترم با همان اندیس است و بالعکس .

آخرین مثال ، تبدیل یک تابع بصورت مجموع مینترم ها بیان شده به معادل آن که بصورت حاصلضرب ماکسترم ها است را بیان می دارد . بحث مشابهی نشان می دهد که تبدیل حاصلضرب ماکسترم ها به مجموع مینترم ها بطریق فوق است . حال یک روش کلی را برای تبدیل بیان می کنیم :

برای تبدیل یک فرم متعارف به دیگری سمبل های $\sum$, $\prod$ را با یکدیگر عوض نموده و جملاتی که در تابع اصلی وجود ندارد را نیز لیست می نماییم . برای یافتن جملات گم شده باید بیاد بیاوریم که تعداد کل جملات 2^n است که در آن n تعداد متغیرها در تابع است .

یک تابع بول بفرم عبارت جبری بوسیله جدول درستی و روش تبدیل متعارف قابل تبدیل به ضرب ماکسترم ها است . مثلاً عبارت بول زیر را در نظر بگیرید :

$$F = xy + x'z$$

ابتدا جدول درستی را بدست می آوریم ،شکل (۶-۲) . ۱ های زیر ستون F از ترکیب متغیرها با x=11 و xz=01 حاصل می شود مینترم های تابع از روی جدول درستی عبارتند از ۱،۳،۶،۷ . تابع بر حسب مینترم ها برابرست با

$$F(x,y,z)=\sum(1,3,6,7)$$

چون جمعاً هشت مینترم یا ماکسترم در یک تابع سه متغیره وجود دارد ، ما جملات غیر موجود در فوق را می یابیم که عبارتند از ۰ ، ۲ ، ۴ و ۵ . تابع بر حسب ضرب ماکسترم ها چنین خواهد شد .

$$F(x,y,z)=\prod(0,2,4,5)$$

این همان مثالی است که در مثال ۵-۲ دیدیم .

جدول (۶-۲) جدول درستی برای $F = xy + x'z$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
۰	١	۰	۰
۰	١	١	١
١	۰	۰	۰
١	۰	١	۰
١	١	۰	١
١	١	١	١

فرم های استاندارد

دو فرم متعارف جبر بول ، فرم هایی ابتدایی هستند که هر کس می تواند با توجه به جدول درستی به آنها دسترسی پیدا کند . این فرم ها معمولاً دارای حداقل متغیرها نیستند ، زیرا هر مینترم یا ماکسترم بایستی بنا به تعریف دارای تمام متغیرها اعم از مکمل و غیر مکمل باشند . راه دیگری برای بیان تابع بول ، فرم استاندارد است . در این فرم ، جمله هایی که تابع را تشکیل می دهند ممکن است یک یا دو یا هر تعدادی از متغیرها را داراباشند .دو نوع فرم استاندارد وجود دارد . یکی جمع حاصلضرب ها و دیگری ضرب حاصل جمع ها .

جمع حاصلضرب ها ، یک عبارت بول است که شامل جملات AND (با نام جملات حاصلضرب)از یک یا چندمتغیر می باشد .کلمه جمع دراینجا به معنی عملگر OR روی این جملات است .

مثالی از این نوع بقرار زیر می باشد :

$$F_1 = y' + xy + x'yz'$$

عبارت دارای سه جمله حاصلضرب از یک ، دو و سه متغیر است . جمع آنها در واقع اجرای عمل OR است که جمع نامیده می شوند . هر جمله هر تعداد متغیر را ممکن

است دارا باشد .ضرب بیانگر عملگر AND روی آنها است . مثالی از یک تابع که بصورت ضرب حاصل جمع ها بیان شده عبارتست از :

$$F_2 = x(y' + z)(x' + y + z' + w)$$

این عبارت به ترتیب دارای سه جمله ، با یک ، دو چهار متغیر است . ضرب آنها در واقع اجرای عمل AND می باشد . کاربرد کلمه ضرب و جمع بیانگر شباهت AND با ضرب و عملگر OR با جمع در حساب می باشد .

یک تابع بول ممکن است بفرم غیر استاندارد نیز بیان شود . بعنوان مثال تابع :

$$F_3 = (AB + CD)(A'B' + C'D')$$

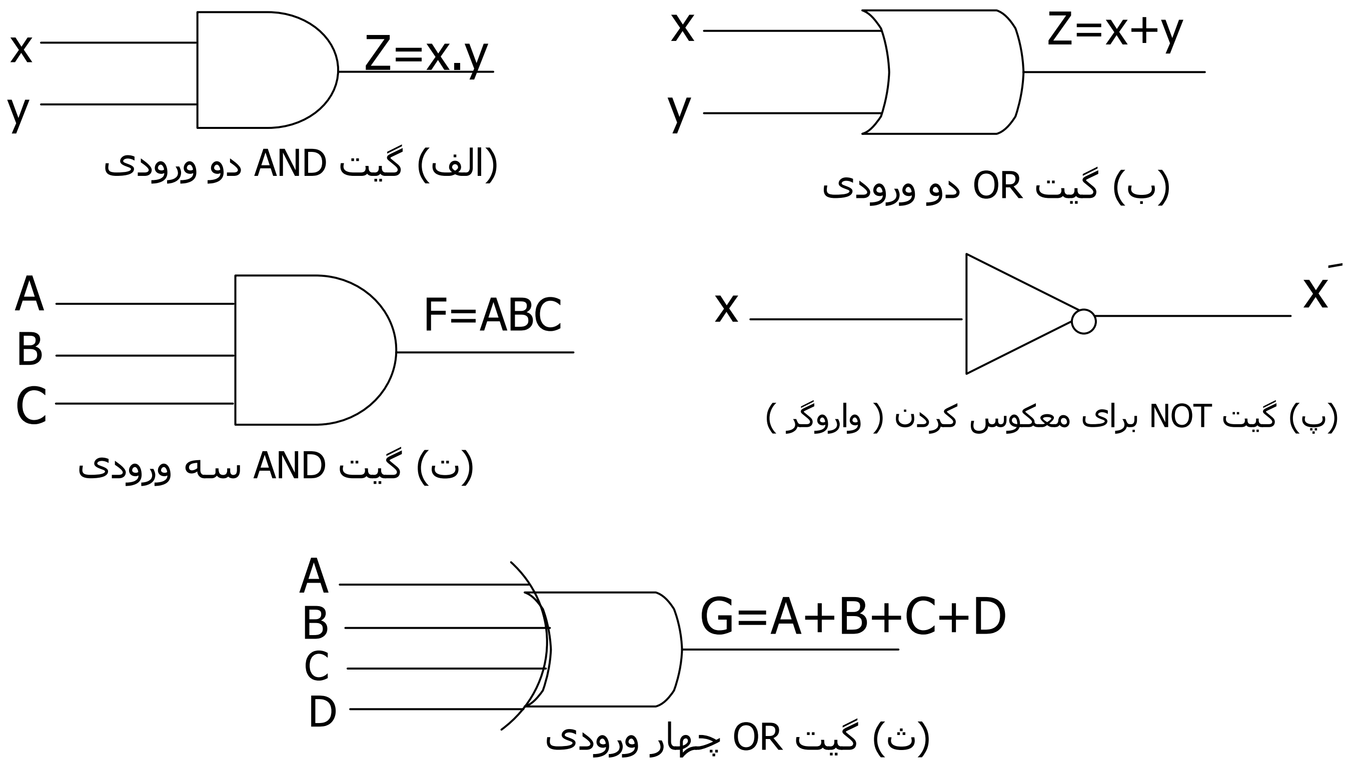
نه بشکل جمع حاصلضرب ها و نه بشکل ضرب حاصل جمع ها است . البته می توان با استفاده از قانون توزیع پذیری آن را بفرم استاندارد در آورد :

$$F_3 = A'B'CD + ABC'D'$$

۲-۵ گیت های منطقی دیجیتال

مدارهای دیجیتال الکترونیکی ، مدارهای منطقی نیز نامیده می شوند . زیرا اینگونه مدارهای در مقابل ورودی مناسبی ، تولید کننده یک سری اعمال منطقی می باشند . هر گونه اطلاعات محاسباتی یا کنترلی مورد نظر را می توان با عبور سیگنال های دودویی از میان دسته های متفاوت مدارهای منطقی مورد استفاده قرار داد ، که هر سیگنال نشان دهنده یک متغیر بوده و یک بیت از اطلاعات راحمل می کند . مدارهای منطقی که اعمال منطقی AND و OR و NOT را اجرا می کند به همراه سمبل های مربوطه در شکل (۱-۲) نشان داده شده اند . این مدارها که گیت نامیده می شوند بلوکهای سخت افزاری هستند که با ورودی منطقی مناسبی در خروجی

خود ۰ یا ۱ منطقی تولید می کنند . توجه کنید که چهار نام مختلف برای این مدارها بکار رفته است . مدارهای دیجیتال ، مدارهای سوئیچینگ ، مدارهای منطقی و گیت ها . همه این اساس بطور گسترده ای استفاده میشوند ولی بهتر است ما این مدارهای را AND و OR و NOT گاهی مدار وارونگر یا معکوس کننده نیز نامیده می شود زیرا سیگنال دودویی را معکوس می کند .

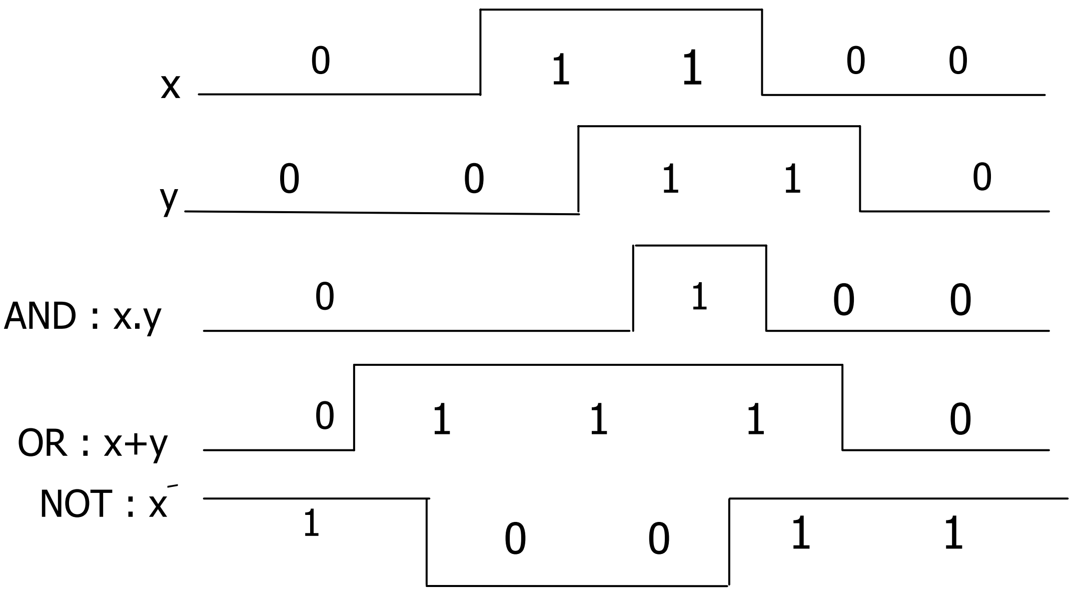


شکل (۱-۲): گیتهای NAND، NORو NOT

سیگنال های ورودی X و Y در گیت هایی با دو ورودی ، طبق شکل (۲-۲) مُی توانند به یکی از چهار حالت ممکن ۰۰ ، ۰۱ ، ۱۰ ، ۱۱ باشند . این سیگنال های ورودی به همراه سیگنال های خروجی شان برای گیت های AND و OR در شکل (۲-۲) نشان داده شده اند . نمودار زمانی شکل (۲-۲) پاسخ هر مدار را به هر یک از چهار ترکیب ممکن ورودی نشان می دهد . دلیل انتخاب نام وارونگر برای گیت NOT از مقایسه پالس X (ورودی وارونگر) و X (خروجی وارونگر) بخوبی آشکار می شود .

گیت های AND و OR ممکن است بیش از دو ورودی داشته باشند . یک گیت AND با سه ورودی و یک گیت AND با سه ورودی و یک گیت OR با چهار ورودی در شکل (۱-۲) نشان داده شده اند . گیتAND سه ورودی ، بشرطی در خروجی خود دارای پاسخ ۱ منطقی باشد ، خروجی گیت ۰ منطقی است . گیت OR با چهار ورودی دارای خروجی ۱ منطقی است بشرطی که حداقل یک ورودیها ،۱ منطقی باشد و اگر همه سیگنال های ورودی ۰ منطقی باشند خروجی ۰ منطقی خواهد بود .

فرم ریاضی منطق دودویی ، اغلب جبر بول و یا جبر سوئیچینگ خوانده می شود . این جبر برای تشریح عملیات شبکه های پیچیده در مدارهای دیجیتال استفاده می گردد . طراحان سیستمهای دیجیتال از جبر بول برای تبدیل اشکال مدارها به عبارت جبری و بالعکس استفاده می کنند .



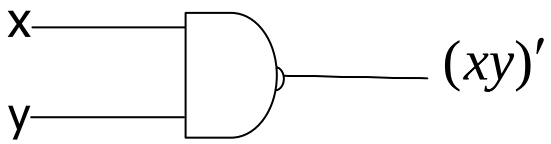
شکل (۲-۲) سیگنالهای ورودی – خروجی برای گیت های (الف) (ب) (پ) از شکل (۱-۲)

گیتهای دیگری یعنی بعنوان گیت های استاندارد در طراحی سیستم های دیجیتال بکار می روند .این گیتها عبارتند از: NAND ، NOR ، XOR ، XNOR

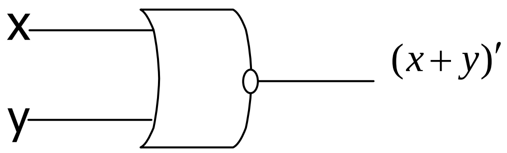
.

تابع NAND ، مکمل AND می باشد و متشکل از یک سمبل AND که بدنبال آن دایره کوچکی قرار گرفته است . تابع NOR مکمل تابع OR بوده و بوسیله سمبل OR که بدنبال آن دایره کوچک نمایش داده می شود . گیت های NAND و NOR بسادگی بوسیله مدارات ترانزیستوری قابل تولید بوده و می توان براحتی توابع بول را با آنها پیاده نمود .

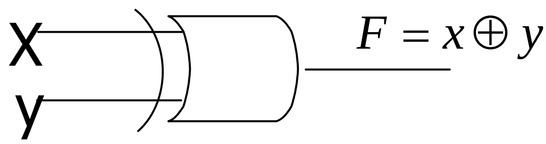
گبت XOR دارای سمبل مشابهی با OR می باشد ، بجز یک خط منحنی که در سمت ورودی اش کشیده شده است . گیت XNOR مکمل XOR است و لذا یک دایره کوچک اضافی در سمت خروجی سمبل آن وجود دارد .



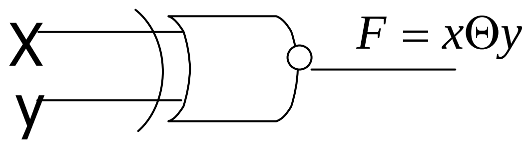
(الف) گیت NAND



(ب) گیت NOR



(پ) گیت XOR



(ت) گیت XNOR

شکل (۲-3) گیت های NAND ، NOR ، XOR ، XNOR

گسترش ورودی گیت ها

گیت های نشان داده شده بجر معکوس کننده و بافر ، قابل گسترش به حالتی بیش از دو ورودی هستند بشرط اینکه عمل دودویی ارائه شده بوسیله آنها خواص جابجایی و شرکت پذیری را داشته باشد . اعمال AND و OR که در جبر بول تعریف شدند دارای این دو خاصیت هستند . برای تابع OR داریم :

جابجایی $x+y=y+x$

و شرکت پذیری $(x+y)+z=x+(y+z)=x+y+z$

این روابط بیانگر آنند که ورودی قابل تعویض بوده و بنابراین تابع OR قابل گسترش به سه متغیر و بیشتر است .

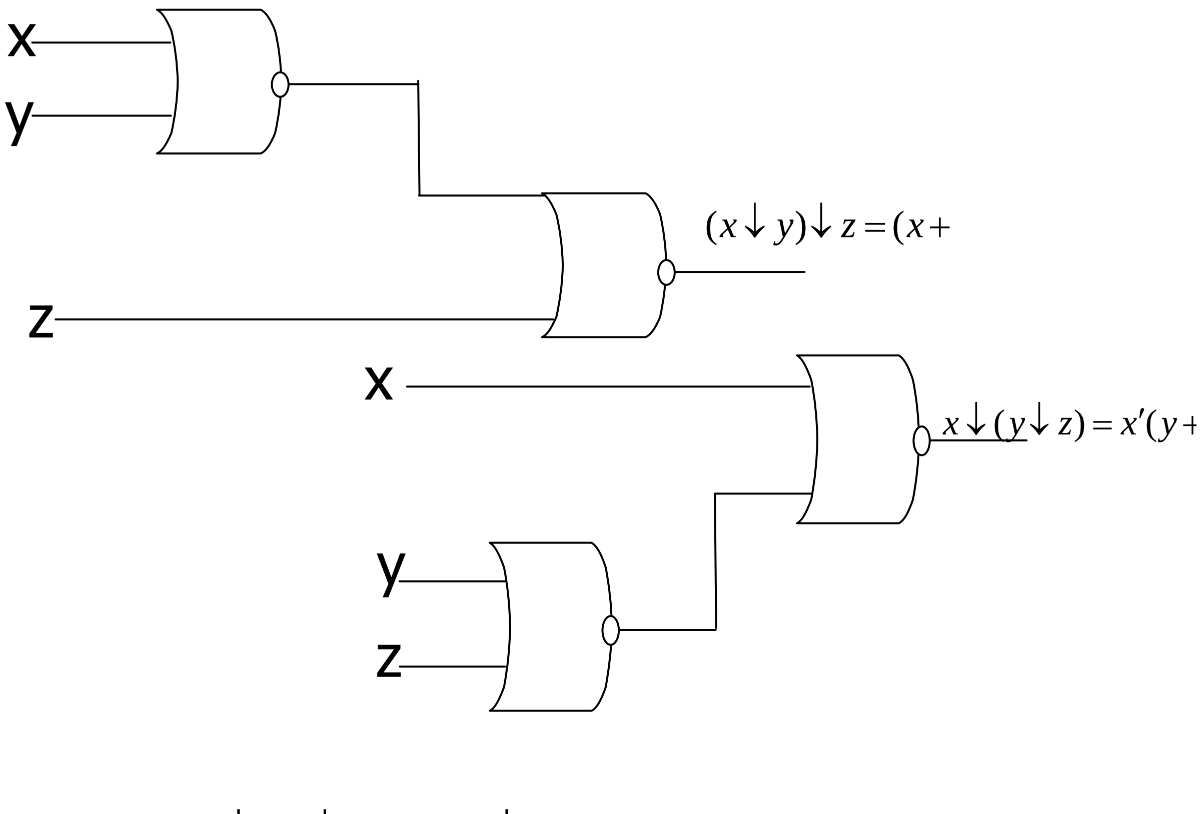
توابع NAND و NOR خاصیت جابجایی دارند و ورودی گیت آنها قابل گسترش است ، بشرط اینکه تعریف عمل آنها تصحیح شود. مشکل این است که عملگرهای NAND ، NOR شرکت پذیری نیستند . یعنی :

$$(x\downarrow y)\downarrow z \neq x\downarrow (y\downarrow z)$$

زیرا طبق شکل (۲-4) داریم :

$$(x\downarrow y)\downarrow z=[(x-y)'+z]'=(x+y)z'=xz'+yz'$$

$$x\downarrow (y\downarrow z)=[x+(y+z)']'=x'(y+z)=x'y+x'z$$



شکل (۲-4) نمایش شرکت پذیر نبودن NOR، $(x\downarrow y)\downarrow z \neq x(y\downarrow z)$

برای غلبه براین مشکل گیت های NOR (NAND) چند ورودی را بعنوان مکمل OR (AND) آن تعریف می کنیم ، بنابراین داریم :

$$x \downarrow y \downarrow z = (x+y+z)'$$
$$x \uparrow y \uparrow z = (xyz)'$$

سمبل های گرافیکی برای گیت های سه ورودی در شکل (5-۲) نشان داده شده اند . در نوشتن متوالی اعمال NOR و NAND بایستی پرانتزها بفرم صحیح انتخاب شوند ، تا بیانگر ترتیب صحیح گیت ها باشند . برای نمایش این مطلب مدار شکل (5-۲-پ) راملاحظه کنید . تابع بول برای این مدر بایستی بفرم زیر نوشته شود :

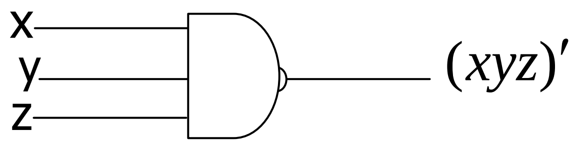
$$F = [(ABC)'(DE)']' = ABC + DE$$

دومین عبارت از رابطه دمورگان نتیجه شده است . این رابطه همچنین بیانگر آنست که جمع حاصلضرب ها قابل پیاده شدن بوسیله گیت ها NAND است .

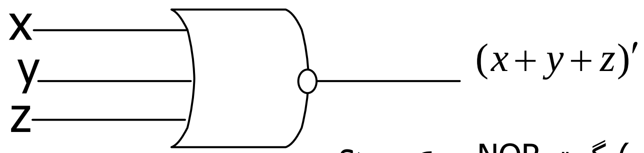
گیت ها XOR و XNOR هر دو دارای خواص جابجایی و شرکت پذیری بوده ، ورودی شان قابل توسعه به بیشتر از دو می باشد . معهذا مدارهای XOR با چند ورودی ، از نقطه نظر سخت افزاری متداول نیستند .در واقع حتی فرم دو ورودی آن نیز معمولاً از سایر گیت ها ساخته می شود . علاوه بر این تعریف این توابع بایستی بهنگام گسترش ورودی آنها تصحیح گردد .تابع XOR یک تابه فرد است یعنی هرگاه ورودی ها تعداد غردی ۱ را دارا باشند این تابع برابر ۱ خواهد بود . ساختمان یک گیت XOR با سه ورودی در شکل (۶-۲) دیده می شود .این مدار معمولاً با گیت های دو ورودی تهیه می گردد . شکل (الف) فرم گرافیکی آن را با گیت سه ورودی نیز می توان نشان داد ، شکل ب) جدول درستی در (پ) بطور آشکار مشخص می نماید که خروجی F

برابر ۱ خواهد بود ، اگر فقط یکی از ورودی ها و یا هر سه ورودی برابر باشد . به بیان دیگر وقتی تعداد ۱ ها درورودی فرد است F مساوی ۱ است .

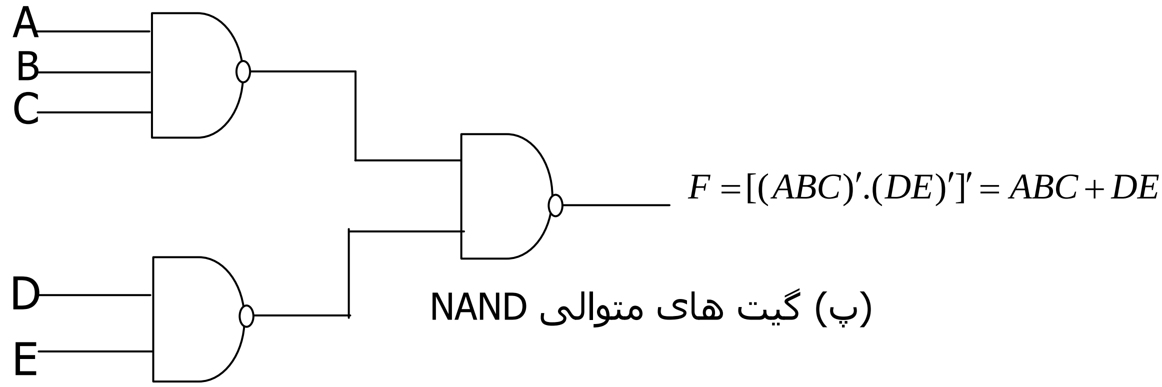
اضافه می نماید که تابع NOR یک تابع زوج است . یعنی هرگاه تعداد ۰ ها در ورودی زوج باشد این تابع مساوی ۱ است .



(الف) گیت NOR سه ورودی

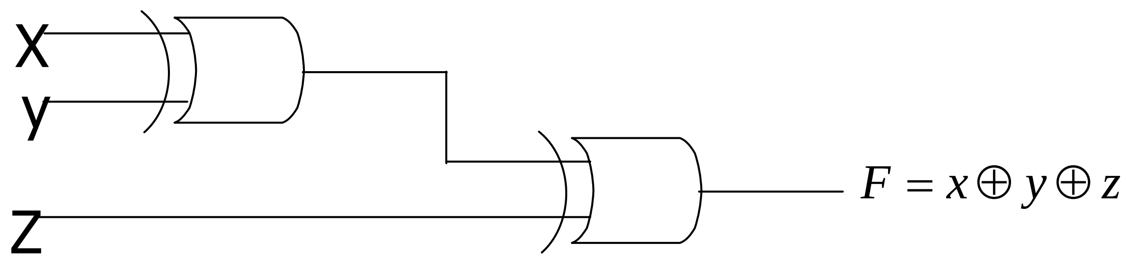


(ب) گیت NOR سه ورودی

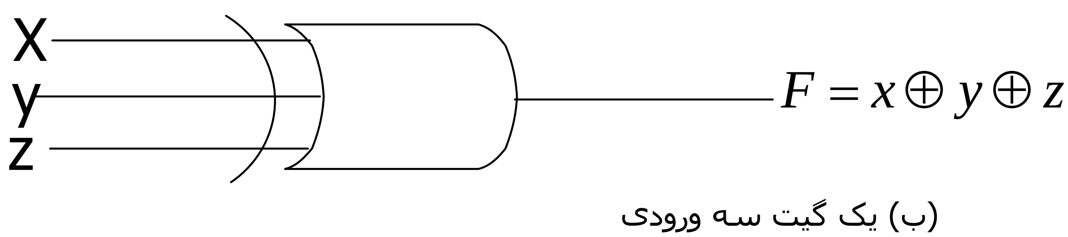


(پ) گیت های متوالی NAND

شکل (5-۲) گیت های NAND و NOR پشت سر هم و چند ورودی



(الف) با گیت های دو ورودی

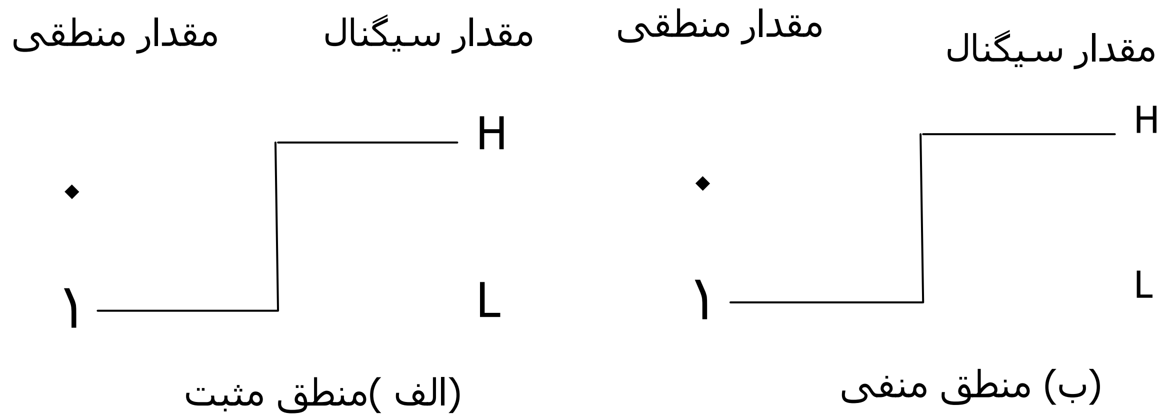


(ب) یک گیت سه ورودی

شکل (۶-۲) گیت XOR سه ورودی

منطق مثبت و منفی

سیگنال دودویی در ورودی یا خروجی هر گیت یکی از دو مقدار را بجز در حالت گذرا ، دارد . یک مقدار سیگنال منطق -۱ و دیگری منطق -۰ را نمایش می دهد . چون دو مقدار سیگنال متعلق به دو ارزش منطقی است ، لذا دو انتساب متفاوت برای دو ارزش منطقی می توان اختیار کرد ، شکل (۷-۲) انتخاب سطح بالاتر H برای نمایش منطق ۱ مطابق شکل (۷-۲-الف) ، سیستم منطق مثبت را معرفی می نماید و انتخاب سطح پایین L بعنوان منطق ۱.



شکل (۷-۲) علامت دامنه سیگنال و نوع منطق